

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

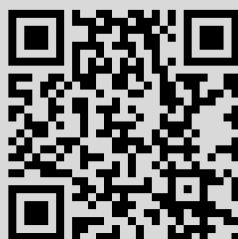
V. A. Vatutin, Distance to the nearest common ancestor in bellman-harris branching processes, *Mat. Zametki*, 1979, Volume 25, Issue 5, 733–741

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

February 14, 2025, 10:39:22



О РАССТОЯНИИ ДО БЛИЖАЙШЕГО ОБЩЕГО ПРЕДКА В ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ БЕЛЛМАНА — ХАРРИСА

В. А. Ватутин

Пусть $z(t)$ обозначает количество частиц ветвящегося процесса Беллмана — Харриса в момент t , если в момент $t = 0$ была одна частица нулевого возраста; $G(t) = \mathbf{P}\{\eta \leq t\}$, $G(+0) = 0$, — функцию распределения длительности жизни η одной частицы; $F(s)$ — производящую функцию числа потомков частицы в конце ее жизни, а $\Phi(t, s) = \mathbf{E}s^{z(t)}$ — производящую функцию числа частиц в процессе в момент t .

Сопоставим каждой частице ее «родословную», т. е. конечный набор чисел $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_k)$, следующим образом: первоначальной частице ставится в соответствие набор $\mathbf{d} = (1)$, а частице, являющейся i -м непосредственным потомком частицы $\mathbf{d} = (1, d_1, \dots, d_k)$, ставится в соответствие набор $\mathbf{d}' = (1, d_1, \dots, d_k, i)$. В дальнейшем частица и ее родословная отождествляются.

О п р е д е л е н и е 1. Ближайшим общим предком частиц $\mathbf{d}' = (1, d'_1, \dots, d'_k)$ и $\mathbf{d}'' = (1, d''_1, \dots, d''_k)$ называется частица $\mathbf{p} = \mathbf{d}' \cap \mathbf{d}'' = (1, p_1, \dots, p_n)$, где $n = \min\{i: d'_{i+1} \neq d''_{i+1}\}$, а $p_j = d'_j = d''_j$ при $j = 1, 2, \dots, n$.

О п р е д е л е н и е 2. Родителем частицы $\mathbf{d} = (1, d_1, \dots, d_k, d_{k+1})$ называется частица $\mathbf{d}^* = (1, d_1, \dots, d_k)$.

Пусть $\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \dots, \mathbf{d}^{(z(t))}$ — все частицы, существующие в момент t . На множестве $\{z(t) > 0\}$ определим случайную величину $\xi(t)$ — расстояние до ближайшего

общего предка:

$$\xi(t) = t - T(t),$$

где $T(t)$ — момент деления частицы $p(t) = \bigcap_{j=1}^{z(t)} d^{(j)}$, если $z(t) > 1$, момент деления родителя частицы $d^{(1)}$, если $z(t) = 1$ и $d^{(1)} \neq 1$, и $T(t) = 0$, если $z(t) = 1$ и $d^{(1)} = 1$.

В работе [1] для марковских ветвящихся процессов с дискретным и непрерывным временем изучалось поведение при $t \rightarrow \infty$ случайной величины $\tau(t)$, которая отличается от $\xi(t)$ лишь тем, что $\tau(t) = 0$, если $z(t) = 1$. В настоящей заметке получены предельные распределения $\xi(t)$ для надкритических и критических ветвящихся процессов Беллмана — Харриса, которые аналогичны распределениям, полученным в [1] для случайной величины $\tau(t)$.

1. Надкритический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса.

ТЕОРЕМА 1. Если $F(0) > 0$ и $F'(1) > 1$, то

$$P\{\exists \lim_{t \rightarrow \infty} (t - \xi(t)) = \xi \mid z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\} = 1,$$

причем

$$P\{\xi < T \mid z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\} = 1 - \int_{[0, T]} (1 - G(T - y)) dH_\beta(y), \quad (1)$$

где $H_\beta(y) = \sum_{k \geq 0} \beta^k G^{*k}(t)$, $\beta = F'(q)$, а $q = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, 0) < 1$ — минимальный неотрицательный корень уравнения $F(s) = s$.

Доказательство. Пусть $\tau_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) — время жизни после момента T i -й частицы из числа частиц, существовавших в момент T , и для $B \subseteq \mathbb{R}^k$

$$P(T, k, B) = P\{\tau(T) = (\tau_1(T), \dots, \tau_k(T)) \in B \mid z(T) = k\}.$$

Пользуясь свойствами условного математического ожидания, получаем

$$P\{t - \xi(t) \geq T, z(t) > 0 \mid z(T) = k\} = E[E[\chi(t - \xi(t) \geq T, z(t) > 0) \mid \tau_i(T), i = 1, \dots]]$$

$$\begin{aligned}
 \dots, z(T) | z(T) = k] &= \\
 &= \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^{z(T)} (1 - F(\Phi(t - T - \tau_i(T)))) \cdot \right. \\
 &\cdot \prod_{j \neq i}^{z(T)} F(\Phi(t - T - \tau_j(T))) \left. \middle| z(T) = k \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_k(0, T)} (1 - F(\Phi(t - T - x_i))) \cdot \\
 &\cdot \prod_{j \neq i}^k F(\Phi(t - T - x_j)) \mathbf{P}(T, k, dx), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где $\chi(A)$ — индикатор события A , $\Phi(t - T - x_j) \equiv \Phi(t - T - x_j, 0)$, а интегрирование ведется по множеству $\Omega_k(0, T) = \{x_i \in (0, T], i = 1, \dots, k\}$.

Оценивая вероятность (2) сверху и снизу, убеждаемся, что для любого $N \in (0, t - T]$

$$\begin{aligned}
 k(1 - q) F^{k-1}(\Phi(t - T - N)) [1 - \mathbf{P}\{\exists i: \tau_i(T) \geq \\
 \geq N | z(T) = k\}] &\leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_k(0, N)} (1 - F(\Phi(t - T - x_i))) \cdot \\
 &\cdot \prod_{j \neq i}^k F(\Phi(t - T - x_j)) \mathbf{P}(T, k, dx) \leq \\
 &\leq \mathbf{P}\{t - \xi(t) \geq T, z(t) > 0 | z(T) = k\} \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_k(0, N)} (1 - F(\Phi(t - T - x_i))) \cdot \\
 &\cdot \prod_{j \neq i}^k F(\Phi(t - T - x_j)) \mathbf{P}(T, k, dx) + \\
 &+ k \mathbf{P}\{\exists i: \tau_i(T) \geq N | z(T) = k\} \leq \\
 &\leq k(1 - F(\Phi(t - T - N))) q^{k-1} + \\
 &+ k \mathbf{P}\{\exists i: \tau_i(T) \geq N | z(T) = k\}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Заметим, что для любого фиксированного T

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\exists i: \tau_i(T) \geq N | z(T) = k\} = 0, \quad (4)$$

поскольку

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\exists i: \tau_i(T) \geq N | z(T) = k\} &= \\
 &= 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\max_{1 \leq i \leq k} \tau_i(T) < N | z(T) = k\} = \\
 &= 1 - \mathbf{P}\{\max_{1 \leq i \leq k} \tau_i(T) < \infty | z(T) = k\}
 \end{aligned}$$

и $\mathbf{P}\{\tau_i(T) < \infty | z(T) = k\} = 1$ для любых i, k, T .

Из (3) и (4), устремляя N и t к бесконечности так, чтобы $t - T - N \rightarrow \infty$, и используя равенство $F(q) = q$, выводим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{t - \xi(t) \geq T, z(t) > 0 | z(T) = k\} = k(1 - q)q^{k-1}.$$

Отсюда в свою очередь следуют соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{t - \xi(t) \geq T | z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\} = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P} \{t - \xi(t) \geq T, z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\}}{\mathbf{P} \{z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\}} = \\ = (1/(1 - q)) \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P} \{t - \xi(t) \geq T, \\ z(t) > 0 | z(T) = k\} \mathbf{P} \{z(T) = k\} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \mathbf{P} \{z(T) = k\} = \Phi'_q(T, q). \quad (5) \end{aligned}$$

Как известно (см., например, [2, стр. 198]), функция $\Phi(t, s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Phi(t, s) = s(1 - G(t)) + \int_{(0, t]} F(\Phi(t - y, s)) dG(y) \quad (6)$$

и, кроме того, $\Phi(t, q) = q$ [3, стр. 143]. Дифференцируя уравнение (6) по s в точке q , получаем для функции $\Phi_q(t, q)$ уравнение восстановления

$$\Phi'_q(T, q) = 1 - G(T) + F'(q) \int_{(0, T]} \Phi'_q(T - y, q) dG(y).$$

Отсюда

$$\Phi'_q(T, q) = \int_{[0, T]} (1 - G(T - y)) dH_\beta(y),$$

или, учитывая (5),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{t - \xi(t) < T | z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\} = \\ = 1 - \int_{[0, T]} (1 - G(T - y)) dH_\beta(y). \end{aligned} \quad 1$$

Сходимость с вероятностью 1 следует из того, что функция $t - \xi(t)$ на множестве $\{z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\}$ не убывает.

2. Критический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса. Пусть $F_n(s)$ — n -я итерация функции $F(s)$, $z(t, x)$ — число частиц, существующих в момент t и имеющих возраст не более x , а $z^*(t, x)$ — число частиц, существующих в момент t , которые будут существовать в момент $t + x$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть распределение $G(t)$ — нерешетчатое, $F'(1) = 1$. Если

$$F(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s), \quad (7)$$

где $\alpha \in (0, 1]$, а $L(x)$ медленно меняется при $x \rightarrow +0$ и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1-G(n))}{1-F_n(0)} = 0, \quad (8)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \xi(t) \leq tx \mid z(t) > 0 \} = x. \quad (9)$$

В ходе доказательства теоремы 2 нам понадобится
ЛЕММА. Если выполнены условия теоремы 2, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ z^*(t, t\varepsilon) > 0 \mid z(t) > 0 \} = 0. \quad (10)$$

Доказательство. Используя равенство

$$z^*(t, t\varepsilon) = z(t(1+\varepsilon)) - z(t(1+\varepsilon), t\varepsilon),$$

получаем оценку

$$\mathbf{P} \{ z^*(t, t\varepsilon) > 0 \mid z(t) > 0 \} \leq \mathbf{E} [z^*(t, t\varepsilon) \mid z(t) > 0] \leq (1 - \Phi(t, 0))^{-1} \mathbf{E} [z(t(1+\varepsilon)) - z(t(1+\varepsilon), t\varepsilon)]. \quad (11)$$

В [2, стр. 232] показано, что если $F'(1) = 1$, то $A(t, x) \equiv \mathbf{E} z(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$A(t, x) = (1 - G(t))J(x-t) + \int_{(0, t]} A(t-y, x) dG(y), \quad (12)$$

де $J(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $J(t) = 0$ при $t < 0$.

Применяя к (12) теорему восстановления, приходим к соотношению

$$\mathbf{E} z(t, x) = (1 - G(t))J(x-t) + \int_{(0, t]} (1 - G(t-y))J(x+y-t) dH(y), \quad (13)$$

где $H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$. Из (13) и равенства

$$\mathbf{E} z(t) \equiv 1 = 1 - G(t) + \int_{(0, t]} (1 - G(t-y)) dH(y)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} E [z(t(1+\varepsilon)) - z(t(1-\varepsilon), t\varepsilon)] = \\ = 1 - G(t(1+\varepsilon)) + \int_{(0, t]} (1 - G(t(1+\varepsilon) - y)) dH(y) \leq \\ \leq (1 + H(t))(1 - G(t\varepsilon)). \quad (14) \end{aligned}$$

Известно, что если выполнено условие (7), то (см. [4])

$$1 - F_n(0) = n^{-1/\alpha} L_1(n), \quad (15)$$

где функция $L_1(n)$ медленно меняется при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из (8), пользуясь определением медленно меняющейся функции, получаем оценку

$$1 - G(t\varepsilon) = o(t^{-1-1/\alpha} L_1(t))$$

при $t \rightarrow \infty$. Заметим также, что $H(t) \sim \mu^{-1}t$ при $t \rightarrow \infty$, где $\mu = \int_{[0, \infty)} t dG(t)$ (см. [5, стр. 269]). Приведенные выше асимптотические соотношения дают для левой части (14) такую оценку:

$$\begin{aligned} E [z(t(1+\varepsilon)) - z(t(1-\varepsilon), t\varepsilon)] = \\ = o(t^{-1/\alpha} L_1(t)) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (16) \end{aligned}$$

В заметке [6] доказано, что если выполнены условия теоремы 2, то

$$1 - \Phi(t, 0) \sim (\mu/t)^{1/\alpha} L_1(t) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (17)$$

где функция $L_1(t)$ та же, что и в (15). Объединяя (17), (16) и (11), получаем (10).

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть событие $C(t, x, \varepsilon)$ состоит в том, что $z(t(1-x)) > 0$, а $z^*(t(1-x), t\varepsilon) = 0$. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P \{ \xi(t) \leq tx, z(t) > 0 \} = P \{ \xi(t) \leq tx, C(t, x, \varepsilon), z(t) > \\ > 0 \} + P \{ \xi(t) \leq tx, z^*(t(1-x), t\varepsilon) > 0, z(t) > 0 \}. \end{aligned}$$

Оценивая правую часть последнего равенства сверху и снизу, получаем

$$\begin{aligned} \frac{P \{ C(t, x, \varepsilon) \}}{P \{ z(t) > 0 \}} P \{ \xi(t) \leq tx, z(t) > 0 \mid C(t, x, \varepsilon) \} \leq \\ \leq P \{ \xi(t) \leq tx \mid z(t) > 0 \} \leq \\ \leq \frac{P \{ z(t(1-x)) > 0 \}}{P \{ z(t) > 0 \}} [P \{ z^*(t(1-x), t\varepsilon) > 0 \mid z(t(1-x)) > 0 \} + \\ + P \{ \xi(t) \leq tx, z(t) > 0 \mid C(t, x, \varepsilon) \}]. \quad (18) \end{aligned}$$

Так как событие $C(t, x, \varepsilon)$ измеримо относительно σ -алгебры, порождаемой случайными величинами $z(t(1-x))$, $\tau_i(t(1-x))$, $i = 1, 2, \dots$, $z(t(1-x))$, то

$$\begin{aligned} P \{ \xi(t) \leq tx, z(t) > 0 \mid C(t, x, \varepsilon) \} = \\ = E [E [\chi(\xi(t) \leq tx, z(t) > 0) \mid z(t(1-x)), \tau_i(t(1-x)), \\ i = 1, 2, \dots, z(t(1-x))] \mid C(t, x, \varepsilon)] = \\ = E [\sum_{i=1}^{z(t(1-x))} (1 - F(\Phi(tx - \tau_i(t(1-x))))) \cdot \\ \cdot \prod_{j \neq i}^{z(t(1-x))} F(\Phi(tx - \tau_j(t(1-x)))) \mid C(t, x, \varepsilon)] \quad (19) \end{aligned}$$

(здесь $\prod_{j \neq i}^1 = 1$). Исходя из (19) и пользуясь монотонностью функций $F(s)$ и $\Phi(t)$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(\Phi(tx))}{F(\Phi(t(x-\varepsilon)))} E [z(t(1-x)) \cdot \\ \cdot F(\Phi(t(x-\varepsilon)))^{z(t(1-x))} \mid C(t, x, \varepsilon)] \leq \\ \leq P \{ \xi(t) \leq tx, z(t) > 0 \mid C(t, x, \varepsilon) \} \leq \\ \leq \frac{1 - F(\Phi(t(x-\varepsilon)))}{F(\Phi(tx))} E [z(t(1-x)) \cdot \\ \cdot F(\Phi(tx))^{z(t(1-x))} \mid C(t, x, \varepsilon)]. \quad (20) \end{aligned}$$

Цель дальнейших рассуждений — доказательство существования при $t \rightarrow \infty$ пределов у величин, оценивающих

$$P \{ \xi(t) \leq tx, z(t) > 0 \mid C(t, x, \varepsilon) \}$$

сверху и снизу, и вычисление этих пределов. Докажем сначала, что для любых $y > 0$ и $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E [F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} \mid C(t, x, \varepsilon)] = \\ = 1 - (1 + (1-x)^{-1} \lambda^{-\alpha} y)^{-1/\alpha}. \quad (21) \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} E [F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} \mid C(t, x, \varepsilon)] = \\ = \frac{P \{ z(t(1-x)) > 0 \}}{P \{ C(t, x, \varepsilon) \}} \cdot \{ E [F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} \mid z(t(1-x)) > 0] - \\ - E [\chi(z^*(t(1-x), t\varepsilon) > 0) \cdot \\ \cdot F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} \mid z(t(1-x)) > 0] \}. \quad (22) \end{aligned}$$

Из (10) следуют соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P \{ z(t(1-x)) > 0 \}}{P \{ C(t, x, \varepsilon) \}} = 1 \quad (23)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\chi(z^*(t(1-x), t\varepsilon) > 0) \cdot F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} | z(t(1-x)) > 0] \leq \\ \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{z^*(t(1-x), t\varepsilon) > 0 | z(t(1-x)) > 0\} = 0, \quad (24)$$

а из (17) вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} - \frac{\log F(\Phi(ty))}{1 - \Phi(t(1-x))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi(ty)}{1 - \Phi(t(1-x))} = \left(\frac{1-x}{y}\right)^{1/\alpha}. \quad (25)$$

В работе [6] было доказано, что при выполнении условий теоремы 2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\exp \{-\lambda z(t(1-x))\} | z(t) > 0] = \\ = 1 - (1 + \lambda^{-\alpha})^{-1/\alpha},$$

что вместе с (25) дает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\exp \{\lambda z(t(1-x)) \log F(\Phi(ty))\} | z(t(1-x)) > \\ > 0] = 1 - (1 + (1-x)^{-1} \lambda^{-\alpha} y)^{-1/\alpha}; \quad (26)$$

объединяя (22) — (24) и (26), получаем (21). Поскольку до-
предельное выражение в левой части (21) аналитично в об-
ласти $\operatorname{Re} \lambda > 0$ при каждом t , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{E} [F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} | C(t, x, \varepsilon)] |_{\lambda=1} = \\ = -y(1-x)^{1/\alpha} (1-x+y)^{-1/\alpha-1}. \quad (27)$$

Заметим теперь, что

$$\mathbf{E} [z(t(1-x)) F(\Phi(ty))^{z(t(1-x))} | C(t, x, \varepsilon)] = \\ = \frac{1}{\log F(\Phi(ty))} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{E} [F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} | C(t, x, \varepsilon)] |_{\lambda=1}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (20) при $y = x$ и $y = x - \varepsilon$ и поль-
зуясь (27) и (17), получаем цепочку неравенств

$$x^{-1/\alpha} (1-x)^{1/\alpha} (x-\varepsilon)^{1/\alpha+1} (1-\varepsilon)^{-1-1/\alpha} \leq \\ \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{\xi(t) \leq tx, z(t) > 0 | C(t, x, \varepsilon)\} \leq \\ \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{\xi(t) \leq tx, z(t) > 0 | C(t, x, \varepsilon)\} \leq \\ \leq (x-\varepsilon)^{-1/\alpha} (1-x)^{1/\alpha} x^{1/\alpha+1},$$

Отсюда, из равенства (10), соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P\{C(t, x, \varepsilon)\}}{P\{z(t) > 0\}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P\{z(t(1-x)) > 0\}}{P\{z(t) > 0\}} = (1-x)^{-1/\alpha}$$

и оценок (17) выводим, что

$$\begin{aligned} x^{-1/\alpha}(x-\varepsilon)^{1/\alpha+1} &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) \leq tx \mid z(t) > 0\} \leq \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) \leq tx \mid z(t) > 0\} \leq (x-\varepsilon)^{-1/\alpha} x^{1/\alpha+1}. \end{aligned}$$

Из этой цепочки неравенств, устремляя ε к нулю, получаем (9).

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
21.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубков А. М., Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка, Теор. вероятн. и ее примен., 20, № 3 (1975), 614—623.
- [2] Харрис Т., Теория ветвящихся случайных процессов, М., «Мир», 1966.
- [3] Athreya K. B., Ney P. E., Branching processes, Berlin, Springer-Verlag, 1972.
- [4] Slack R. S., A branching process with mean one and possibly infinite variance, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 9, № 2 (1968), 139—145.
- [5] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., «Наука», 1971.
- [6] Ватутин В. А., Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса с бесконечной дисперсией, Теория вероятн. и ее примен., 21, № 4 (1976), 861—863.