S. A. Nazarov, K. I. Pileckas, The Fredholm property of the Neumann problem operator in domains with an exit to infinity in the form of a layer,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 6, 57–104

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 6

ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ОПЕРАТОРА ЗАДАЧИ НЕЙМАНА В ОБЛАСТЯХ С ВЫХОДОМ НА БЕСКОНЕЧНОСТЬ В ВИДЕ СЛОЯ

© С. А. Назаров, К. И. Пилецкас

Рассматривается задача Неймана для дифференциального уравнения второго порядка в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, совпадающей вне некоторого шара со слоем $\Pi = \{x : |x_n| < 1/2\}$. Доказано фредгольмово свойство оператора этой задачи,определенного на функциональном пространстве $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$, норма в котором характеризуется ступенчатым анизотропным распределением весовых множителей (выделяется направление x_n). Показателю гладкости l разрешено принимать натуральные значения, а показателю веса β — любые вещественные, за исключением счетного набора запретных (в них фредгольмовость теряется).

§1. Постановка задачи и обрисовка результатов

1. Область и краевая задача. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, совпадающая вне шара $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ со слоем единичной толщины

$$\Pi = \{x = (y, z) : y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},\ |z| < 1/2\}. \tag{1.1}$$

Пусть еще $L(x, \nabla_x)$ — скалярный дифференциальный оператор второго порядка,

$$L(x, \nabla_x) = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.2}$$

В (1.2) $\nabla_x = \operatorname{grad}$, a_{jk} — гладкие функции на $\overline{\Omega}$, причем для всех $p = 0, 1, \dots$ справедливы неравенства

$$|\nabla^p_x(a_{jk}(x) - a^0_{jk}(z))| \leqslant c_p(1 + |x|)^{-\delta - p}, \tag{1.3}$$

Ключевые слова: фредгольмов опоератор, слой, анизотропные весовые нормы, асимптотика.

в которых $\delta > 0$, $a^0_{jk} \in C^\infty[-1/2, 1/2]$, а под $\nabla^p_x v$ подразумевается совокупность производных функции v порядка p. Предположим, что для любых $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x), \quad c|\xi|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j a_{jk}(x)\xi_k \leqslant C|\xi|^2, \tag{1.4}$$

где c и C — положительные постоянные. Таким образом, оператор L формально самосопряженный и эллиптический. Эти свойства наследуются при замораживании коэффициентов на бесконечности (т. е. замене $a_{jk}(x)$ на $a^0_{jk}(z)$ в (1.2)), поскольку в силу (1.3) формулы (1.4) выдерживают предельный переход $|y| \to \infty$.

Далее удобно пользоваться следующим соглашением: по повторяющимся латинским (греческим) индексам производится суммирование в пределах от 1 до n (до $n-1$). Кроме того, будем применять обозначения $\partial_j = \partial/\partial x_j$ и $\partial_\alpha = \partial/\partial y_\alpha$, т. е. краткая запись оператора (1.2) такова: $-\partial_j a_{jk}(x)\partial_k$.

В области Ω рассматривается краевая задача Неймана

$$L(x, \nabla_x)u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

$$N(x, \nabla_x)u(x) \equiv \nu_j(x)a_{jk}(x)\partial_k u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.6}$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Множество $\partial\Omega \setminus B_R$ содержит части двух плоскостей $\Pi_\pm$, ограничивающих слой Π. На $\Pi_\pm \setminus B_R$ нормаль ν имеет вид $(0, \ldots, 0, \pm 1)$, а оператор краевых условий Неймана $N(x, \nabla_x)$ совпадает с

$$N_\pm(y, \nabla_x) = \pm a_{nk}(y, \pm 1/2)\partial_k. \tag{1.7}$$

Операторы, получающиеся из (1.2) и (1.7) замораживанием коэффициентов на бесконечности, обозначаем $L^0(z, \nabla_x)$ и $N^0_\pm(\nabla_x)$. Наконец, при рассмотрении задачи в слое (1.1) правая часть g условий Неймана записывается в виде $g_\pm$, т. е. индексы $\pm$ отвечают сужению g с $\partial\Pi$ на $\Pi_\pm$.

Основная цель данной статьи — указать двупараметрические шкалы функциональных пространств $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ и $\mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)$ для u и (f, g), в которых оператор

$$\mathcal{A}^l_\beta = \{L, N\} : \mathcal{D}^l_\beta(\Omega) \to \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega) \tag{1.8}$$

задачи (1.5), (1.6) обладает фредгольмовым свойством, т. е. образ $\mathcal{A}^l_\beta \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)$ и

$$\dim\ker \mathcal{A}^l_\beta < \infty, \quad \dim\operatorname{coker} \mathcal{A}^l_\beta < \infty.$$

Как это часто бывает, показатель гладкости l — натуральное, а весовой показатель β — вещественное число, причем счетное множество значений β являются запретными (в них $\mathcal{A}^l_\beta$ теряет фредгольмовость).

2. Обсуждение. Множество Ω имеет выход на бесконечность в виде слоя и геометрически родственно другому объекту: две гладкие компоненты границы области $\widetilde{\Omega}$, на которой ставится краевая задача, касаются одна другой в начале координат. Это родство особенно наглядно в случае уравнения Лапласа в Π — после инверсии $x \mapsto x' = x|x|^{-2}$ множество (1.1) превращается в пространство, из которого вырезана „целующаяся" пара единичных шаров,

$$\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\pm} \{x' = (y', z') : |y'|^2 + |z' \pm 1|^2 \leqslant 1\},$$

а преобразование Кельвина сохраняет гармоничность функции. Поэтому всюду далее интерпретируем бесконечность как особую точку на границе $\partial\Omega$.

В начатых известной работой В. А. Кондратьева [1] исследованиях общих эллиптических краевых задач в областях с кусочно гладкими границами немаловажную роль играют функциональные пространства с нормами, содержащими весовые множители. Необходимость и удобство оперирования весами становятся очевидными при первой же попытке обосновать конструкции особенностей решений (они в первую очередь бывают востребованы прикладными дисциплинами, например, механикой разрушения). Более того, для достижения асимптотической точности оценок весовые множители обязаны отслеживать изменения в поведении решений при их дифференцировании. Так, в случае n-мерных конических (угловых для $n = 2$) выходов на бесконечность асимптотика решений задач с однородными дифференциальными операторами составляется из выражений вида

$$|x|^\Lambda \mathrm{U}(\omega, \log|x|) \tag{1.9}$$

($\Lambda \in \mathbb{C}$, ω — точка единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $l \mapsto \mathrm{U}(\omega, l)$ — полином), а пространства $V^l_\sigma(\Omega)$, введенные в [1], снабжены нормами

$$\|v; V^l_\sigma(\Omega)\| = \Big(\int\limits_\Omega \sum_{k=0}^{l} (1+|x|^2)^{\sigma-l+k} |\nabla^k_x v(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \tag{1.10}$$

(см. [2–4] по поводу норм, порожденных классами Гельдера и L_p). Нетрудно проверить, что в случае $O \notin \Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция (1.9) принадлежит $V^l_\sigma(\Omega)$ лишь при условии

$$\operatorname{Re}\Lambda < l - \sigma - n/2, \tag{1.11}$$

причем все слагаемые в подынтегральном выражении из (1.10) оказывают одинаковое влияние на сходимость интеграла по Ω. Последнее означает, что весовые множители подобраны в (1.11) удачно.

Асимптотические конструкции в коническом выходе на бесконечность очень чувствительны к структуре дифференциальных операторов, входящих в краевую задачу, и малейшее отклонение от ситуации, рассмотренной в [1], приводит к возникновению асимптотических членов с новыми свойствами, а значит, и к необходимости модифицировать весовые нормы. К примеру, для изученного в [5, 6] класса задач с неоднородными дифференциальными операторами помимо (1.9) в асимптотике возникают слагаемые типа экспоненциального пограничного слоя, которые в случае простейшего конуса $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (y, z) : y \in \mathbb{R}^{n-1}, z > 0\}$ имеют вид

$$|x|^{\Lambda-s+1/2} \exp(-hz) \mathbf{V}(\omega, \log|x|), \tag{1.12}$$

где h и s — положительные числа. В [6] установлена фредгольмовость упомянутых задач в функциональных пространствах $V^l_\sigma(\Omega; s)$ с такими нормами:

$$\|v; V^l_\sigma(\Omega; s)\| = \Big(\sum_{k=0}^{l} \int\limits_\Omega (1+|x|^2)^{\sigma-l+k-(k-s)_+} |\nabla^k_x v(x)|^2 dx \Big)^{1/2}; \tag{1.13}$$

здесь $s \in (0, l)$ и $t_+ = 2^{-1}(t+|t|)$. Заменяя $v(x)$ суммой величин (1.9) и (1.12), видим, что для области Ω, совпадающей с $\mathbb{R}^n_+$ вне B_R и не содержащей начала координат O, каждый из интегралов I_k в (1.13) сходится при условии (1.11).

В самом деле, если $k < s$, то в $\nabla_x^k v$ главенствуют производные функции (1.9) и

$$I_k \leqslant c \int\limits_R^\infty (1+|x|^2)^{\sigma-l+k} |x|^{2(\operatorname{Re}\Lambda-k)} |x|^{n-1} d|x| < \infty,$$

(игнорируем логарифмы), но при $k > s$ ведущими становятся производные функции (1.12) и

$$\begin{aligned} I_k &\leqslant c \int\limits_R^\infty (1+|x|^2)^{\sigma-l+k-(k-s)} |x|^{2(\operatorname{Re}\Lambda-s+1/2)} \int\limits_{\mathbb{S}_+^{n-1}} e^{-2h|x|d(\omega)} ds_\omega |x|^{n-1} d|x| \\ &\leqslant C \int\limits_R^\infty (1+|x|^2)^{\sigma-l-s} |x|^{2(\operatorname{Re}\Lambda-s)} |x|^{n-1} d|x| < \infty; \end{aligned}$$

здесь ds_ω — элемент поверхности единичной полусферы $\mathbb{S}_+^{n-1} = \{x \in \partial B_1 : z > 0\}$, а $d(\omega)$ — расстояние от точки $\omega \in \mathbb{S}_+^{n-1}$ до экватора $\{x \in \partial B_1 : z = 0\}$. В обоих случаях условие (1.11) точное, т. е. нормы (1.13) приспособлены к асимптотической структуре (1.9)+(1.12).

В (1.9) график зависимости показателя степени $1+|x|^2$ от порядка k производной — отрезок наклонной прямой, но в случае (1.13) он превращается в ломаную с горизонтальным участком для $k \in [s, l]$ (появляется „ступенька"). Поэтому $V_\sigma^l(\Omega; s)$ названы ступенчатыми весовыми классами (step-weighted).

Обратимся собственно к задаче (1.5), (1.6). Известно (см. [7–9], а также далее §2), что асимптотика ее решений сооружается из выражений вида

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x) &= \left(1 - b_\alpha^0(z)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) r^\Lambda \mathrm{U}(\varphi, \log r) \\ &= r^\Lambda \mathrm{U}(\varphi, \log r) + r^{\Lambda-1} \mathrm{V}(z, \varphi, \log r) \end{aligned} \tag{1.14}$$

(подобные асимптотические конструкции также найдены в [10–13] для уравнений Стокса и в [11, 14–18] для системы Ламе). В (1.14) под (r, φ) теперь подразумеваются сферические координаты в $\mathbb{R}^{n-1} \ni y$; $\Lambda \in \mathbb{C}$, $b_\alpha^0 \in C^\infty[-1/2, 1/2]$ и $l \mapsto \mathrm{U}(\cdot, l)$ — полином с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{S}^{n-2})$.

Предположим на время, что прямая $\{x : y = 0\}$, на которой величина (1.14) обладает не интересующими нас особенностями, лежит вне $\overline{\Omega}$ (слой с отверстием). Если

$$\operatorname{Re}\Lambda < -\sigma - (n-1)/2,$$

то $\mathcal{U} \in V^1_\sigma(\Omega)$, так как главный член $r^\Lambda \mathrm{U}$ в (1.14) не зависит от z, $\partial_z \mathcal{U}(x) = r^{\Lambda-1}\partial_z \mathrm{V}(z,\varphi,\log r)$ и потому все компоненты вектора $\nabla_x \mathcal{U}(x)$ имеют одинаковое поведение $O(r^{\Lambda-1}|\log r|^N)$ на бесконечности. Однако, начиная уже со вторых производных, приходится различать дифференцирования ∇_y и ∂_z: первое понижает порядки обобщенной однородности относительно r, а второе нет. Таким образом, в рассматриваемой ситуации естественными оказываются пространства $\mathcal{V}^l_\gamma(\Omega)$ с анизотропным распределением веса,

$$\|v; \mathcal{V}^l_\gamma(\Omega)\| = \Big(\sum_{j+k\leqslant l}\int_\Omega (1+r^2)^{\gamma-l+j}|\nabla^j_y \partial^k_z v(x)|^2 dx\Big)^{1/2}. \qquad (1.15)$$

Ясно, что $\nabla_x \mathcal{U} \in \mathcal{V}^l_\gamma(\Omega)$ при условии

$$\operatorname{Re}\Lambda < l + 1 - \gamma - (n-1)/2.$$

В отличие от конического выхода на бесконечность, где все направления равноценны и каждое дифференцирование сопровождается в (1.10) появлением дополнительного множителя $1+|x|^2$, в слое Π направление z выделено как самой геометрией множества (1.1), так и строением весовой нормы (1.15) (дифференцирование ∂^k_z в отличие от ∇^j_y не влияет на вес — показатель степени $1+r^2$ не зависит от k). Далее мы установим фредгольмовость оператора задачи (1.5) (1.6) именно в анизотропном весовом пространстве со „ступенькой", возникающей в связи с упомянутым свойством градиента $\nabla_x u$ (при однократном дифференцировании все направления равноценны).

3. Структура статьи. Основная теорема о фредгольмовом свойстве отображения (1.8) формулируется в §2 после определения и изучения простейших свойств классов $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ и $\mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)$. Там же обсуждаются возможные обобщения, в частности, переход к несамосопряженному оператору L (мы возвращаемся к рассмотрению этого случая в разд. 5 §3 и 6 §5, где показываем, что все результаты работы без дополнительных затрат приспосабливаются к произвольному дифференциальному оператору второго порядка, коэффициенты которого „правильно" ведут себя на бесконечности).

В §3 приводятся вспомогательные конструкции (расщепление задачи в слое, вывод результирующего уравнения на гиперплоскости и пр.). В §4 устанавливаются асимптотически точные весовые оценки решений; при этом среднее $\overline{u}$ решения u по переменной z и остаток $u_\perp = u - \overline{u}$ обратываются по-разному. Последний, пятый, параграф статьи посвящен доказательству основной теоремы 2.7.

§2. Формулировка теоремы о фредгольмовом свойстве

1. Пространство $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ — область определения оператора $\mathcal{A}^l_\beta$. Напоминаем, что $V^l_\sigma(\Omega)$ и $\mathcal{V}^l_\gamma(\Omega)$ — пополнения по нормам (1.10) и (1.15) множества $C^\infty_0(\overline{\Omega})$, состоящего из бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями.

Фиксируем показатели веса и гладкости, вещественное и натуральное числа β и l, т. е. будем иметь дело с решениями u задачи (1.5), (1.6), принадлежащими $H^{l+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ и $V^0_{\beta-l}(\Omega)$ (т. е. u содержится в соболевском классе $H^{l+1}(K)$ для любого компакта $K \subset \overline{\Omega}$ и $(1+r^2)^{(\beta-l-1)/2}u \in L_2(\Omega)$) . В пространство $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ поместим все такие функции u, что

$$u \in V^1_{\beta-l}(\Omega), \quad \nabla_x u \in \mathcal{V}^l_\beta(\Omega) \tag{2.1}$$

(классы векторых и скалярных функций не различаются в обозначениях), и снабдим $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ следующей нормой:

$$\|u; \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\| = (\|u; V^1_{\beta-l}(\Omega)\|^2 + \|\nabla_x u; \mathcal{V}^l_\beta(\Omega)\|^2)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Отметим, что из первого включения (2.1) вытекают соотношения

$$u \in V^0_{\beta-l-1}(\Omega), \quad \nabla_y u, \partial_z u \in V^0_{\beta-l}(\Omega), \tag{2.3}$$

а из второго — соотношения

$$\nabla^j_y u \in V^0_{\beta-l-1+j}(\Omega), \quad \nabla^j_y \partial^k_z u \in V^0_{\beta-l+j}(\Omega), \quad \partial^j_z u \in V^0_{\beta-l}(\Omega),$$
$$j = 1, \ldots, l+1, \quad k = 1, \ldots, l+1-j. \tag{2.4}$$

Таким образом, $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ — весовой класс с анизотропным и ступенчатым распределением веса. При этом в силу (2.3), (2.4) и (1.15)

$$u \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{V}^{l+1}_\beta(\Omega). \tag{2.5}$$

2. Вспомогательные утверждения. Далее понадобятся базовые свойства пространства $\mathcal{V}^l_\gamma(\Omega)$, которые и устанвливаются в данном разделе.

Лемма 2.1. *Если $l \geqslant 1$ и $\varepsilon \geqslant 0$, то вложение*

$$\mathcal{V}^l_\gamma(\Omega) \subset \mathcal{V}^{l-1}_{\gamma-1-\varepsilon}(\Omega) \tag{2.5}$$

непрерывно; оно компактно при условии $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Непосредственно из определения нормы (1.15) вытекает нужная непрерывность. К тому же

$$\|v; \mathcal{V}^{l-1}_{\gamma-1-\varepsilon}(\Omega \setminus B_{2\rho})\| \leqslant c\rho^{-\varepsilon}\|v; \mathcal{V}^l_\gamma(\Omega \setminus B_\rho)\|.$$

Так как $V^l_\gamma(\Omega \cap B_{2\rho})$ совпадает с $H^l(\Omega \cap B_{2\rho})$ и алгебраически и топологически, по известным свойствам пространств Соболева оператор вложения (2.5) представляется как сумма малого (при $\rho \to +\infty$) и компактного. •

Лемма 2.2. *Пусть a — функция, подчиненная неравенствам*

$$|\nabla^j_y \partial^k_z a(x)| \leqslant c(1+r^2)^{\varkappa - j/2},$$

где j, $k = 0, \dots, l$ и $j + k \leqslant l$. Если $v \in V^l_\sigma(\Omega)$ и $w \in \mathcal{V}^l_\gamma(\Omega)$, то $av \in \mathcal{V}^l_{\sigma-2\varkappa}(\Omega)$ и $aw \in \mathcal{V}^l_{\gamma-2\varkappa}(\Omega)$, причем

$$\|av; \mathcal{V}^l_{\sigma-2\varkappa}(\Omega)\| \leqslant c_a\|v; V^l_\sigma(\Omega)\|,$$
$$\|aw; \mathcal{V}^l_{\gamma-2\varkappa}(\Omega)\| \leqslant c_a\|w; \mathcal{V}^l_\gamma(\Omega)\|.$$

Доказательство. Утверждение относительно w очевидно и достаточно привести следующую цепочку неравенств:

$$\sum_{j+k\leqslant l} \int_\Omega (1+r^2)^{\sigma-l+j} |\nabla^j_y \partial^k_z [a(x)v(x)]|^2 dx$$
$$\leqslant c \sum_{j+k\leqslant l} \sum_{p=0}^{j} \sum_{q=0}^{k} \int_\Omega (1+r^2)^{\sigma-l+j} (1+r^2)^{-(j-p)-2\varkappa} |\nabla^p_y \partial^q_z v(x)|^2 dx$$
$$\leqslant c \sum_{p+q\leqslant l} \int_\Omega (1+r^2)^{\sigma-2\varkappa-l+p+q} |\nabla^p_y \partial^q_z v(x)|^2 dx$$

(в конце показатель степени множителя $q + r^2 \geqslant 1$ увеличен на $q \in [0, l]$). •

При $l \geqslant 1$ через $\mathcal{V}_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)$ обозначим пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $\mathcal{V}_\gamma^l(\Omega)$, снабженное естественной нормой

$$\|w; \mathcal{V}_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)\| = \inf\{\|v; \mathcal{V}_\gamma^l(\Omega)\| \,|\, v = w \quad \text{на } \partial\Omega\}. \tag{2.6}$$

След на $\partial\Pi$ функции, заданной на слое Π, забывает о наличии нормальной координаты z и потому пространство $\mathcal{V}_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)$ обязано стать изотропным весовым (на гиперплоскостях, составляющих $\partial\Pi$, все направления $y_1, \dots, y_{n-1}$ равноправны). Упомянутое свойство становится очевидным при использовании иной нормировки в $\mathcal{V}_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)$.

Лемма 2.3. *Норма* (2.6) *и норма*

$$\begin{aligned}\Big\{&\|w; H^{l-1/2}(\partial\Omega \cap B_{2R})\|^2 \\ &+ \sum_{\pm} \Big[\|w; V_{\gamma-1}^{l-1}(\Pi_\pm \setminus B_R)\|^2 \\ &\quad + \int\limits_{\Pi_\pm\setminus B_R}\int\limits_{\Pi_\pm\setminus B_R} \perp\big|\nabla_y^{l-1}[(1+|y|^2)^\Gamma w(y)] \\ &\qquad - \nabla_{y'}^{l-1}[(1+|y'|^2)^\Gamma w(y')]\big|^2 \frac{dy\,dy'}{|y-y'|^n}\Big]\Big\}^{1/2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

эквивалентны. В (2.7) $\Gamma = \gamma - 1/2$ *и по аналогии с* (1.10) *для области* $\Xi \subset \mathbb{R}^{n-1}$

$$\|w; V_\varkappa^h(\Xi)\| = \Big(\sum_{j=0}^{h} \int\limits_{\Xi} (1+|y|^2)^{\varkappa-h+j} |\nabla_y^j w(y)|^2 dy\Big)^{1/2}. \tag{2.8}$$

Замечание 2.4. 1) В (2.7) интегрирование по Π_+ и Π_- производится раздельно, дабы избежать путаницы: в $\mathbb{R}^n$ расстояние между точками y и y', расположенными одна под другой на Π_+ и Π_-, равно 1, в то время как расстояние между ними на $\partial\Omega$ (правильное) есть $O(|y|)$. При соответствующем истолковании символа $|y - y'|$ из правой части громоздкой формулы (2.7) можно убрать первое слагаемое и знак $\sum_{\pm}$, заменив при этом $\Pi_\pm \setminus B_R$ на $\partial\Omega$ и понимая под Ξ в (2.8) $(n-1)$-мерное подмногообразие. Кроме того, в (2.7) вместо $\nabla_y^{l-1}[(1+|y|^2)^\Gamma w(y)]$ и т. п. можно писать $(1+|y|^2)^\Gamma \nabla_y^{l-1} w(y)$

и т. п. — интегралы от остальных членов, появляющихся при выполнении диференцирований ∇_y^{l-1} и $\nabla_{y'}^{l-1}$ имеют мажоранту $c\|w;\, V_{\gamma-1}^{l-1}(\partial\Omega)\|^2$.

2) Пополнение $C_0^\infty(\partial\Omega)$ по норме (2.7) естественно обозначить $V_{\gamma-1/2}^{l-1/2}(\partial\Omega)$ хотя бы потому, что

$$V_{\gamma-1/2}^{l-1/2}(\partial\Omega) \subset V_{\gamma-1}^{l-1}(\partial\Omega) \subset V_{\gamma-l}^{0}(\partial\Omega)$$

(по аналогичным правилам связываются весовые показатели во вложении $V_\sigma^s(\Omega) \subset V_{\sigma-s}^0(\Omega)$).

3) Пусть в лемме 2.2 $\varkappa = 0$ и a — срезающая функция, равная единице на $\partial\Omega$ и зависящая лишь от z при $x \in \Omega \setminus B_R$. Тогда следы на $\partial\Omega$ у $v \in V_\gamma^l(\Omega)$ и $av \in \mathcal{V}_\gamma^l(\Omega)$ одинаковы, т. е. $v|_{\partial\Omega} \in V_{\gamma-1/2}^{l-1/2}(\partial\Omega)$. С другой стороны, непрерывен такой следовой оператор: $V_\gamma^l(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \to V_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [1, 2, 4] и др.). Видимое несоответствие между весовыми индексами еще раз подтверждает, что изотропные весовые классы, приспособленные для конических выходов ($\mathbb{R}^n \setminus \Pi$ — объединение двух полупространств-конусов), не годятся для слоев.

Доказательство леммы 2.3. Пусть $v \in \mathcal{V}_\gamma^l(\Omega)$. Как и ранее, опираясь на известные следовые теоремы для пространств Соболева сводим дело к случаю $v = 0$ вне $\Omega \setminus B_R$. Используя сферические координаты (r, φ), отвечающие $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, и замену $r \mapsto t = \log r$, вводим на многообразии $\Sigma = (\log R, \infty) \times \mathbb{S}^{n-2} \times (-1/2, 1/2)$ функцию

$$\Sigma \ni (t, \varphi, z) \mapsto V(t, \varphi, z) = (1 + r^2)^{\gamma - l + (n-1)/2} v(x).$$

Принимая во внимание неравенства $r > R/2$ на $\Omega \setminus B_R$ и

$$|\nabla_y^k (1 + r^2)^S| \leqslant c_k (1 + r^2)^{S-k} \quad \text{при } r > R/2,$$

непосредственными вычислениями убеждаемся в эквивалентности следующих норм:

$$\|v; \mathcal{V}_R^l(\{x \in \Pi : r > R\})\| \sim \|V; H^l(\Sigma)\|.$$

Поэтому

$$\|v_\pm; \mathcal{V}_\gamma^{l-1/2}(\{y \in \Pi_\pm : |y| > R\})\| \sim \|V_\pm; H^{l-1/2}(\sigma_\pm)\|,$$

где $\sigma_\pm = (\log R, \infty) \times \mathbb{S}^{n-2} \times \{\pm 1/2\}$, а $v_\pm$ и $V_\pm$ — следы функций v и V. Для формирования (2.7) осталось при учете замечания 2.4(1) выполнить обратные замены в известной (см. [19] и др.) норме пространства Соболева-Слободецкого $H^{l-1/2}(\sigma_\pm)$ (сумма нормы $V_\pm$ в $H^{l-1}(\sigma_\pm)$ и интегральной полунормы $\nabla^{l-1}V_\pm$ в $H^{1/2}(\sigma_\pm)$). •

3. Пространство $\mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)$ — область значений оператора $\mathcal{A}^l_\beta$. В силу леммы 2.2 и формул (2.1)–(2.3), (1.3) для функции $u \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ справедливы включения

$$a_{jk}\partial_k u \in \mathcal{V}^l_\beta(\Omega) \tag{2.9}$$

при всех j, $k = 1,\dots,n$ (на первом шаге дифференцирования по всем направлениям равноценны). Если согласно (1.2) вычислить вторые производные, то при учете (2.4) мы получим

$$\partial_\alpha a_{\alpha k}\partial_k u \in \mathcal{V}^{l-1}_\beta(\Omega), \quad \partial_z a_{nk}\partial_k u \in \mathcal{V}^{l-1}_{\beta-1}(\Omega); \tag{2.10}$$

здесь $\partial_z = \partial/\partial z$, $\partial_\alpha = \partial/\partial y_\alpha$ и $\alpha = 1,\dots,n-1$ (напомним еще про соглашение о суммировании из разд. 1 §1). Разумеется, $\mathcal{V}^{l-1}_\beta(\Omega) \subset \mathcal{V}^{l-1}_{\beta-1}(\Omega)$, $L\mathcal{D}^l_\beta(\Omega) \subset \mathcal{V}^{l-1}_{\beta-1}(\Omega)$ и можно попытаться назначить $\mathcal{V}^{l-1}_{\beta-1}(\Omega)$ в качестве области значений оператора L из (1.2). Однако загрубление весового множителя в первой формуле (2.10) пагубно сказывается на фредгольмовом свойстве оператора задачи (1.5), (1.6), так как образ $L\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ не замкнут в $\mathcal{V}^{l-1}_{\beta-1}(\Omega)$. Поэтому на втором шаге отщепим дифференцирование по z от оператора L и запишем правую часть уравнения (1.5) так:

$$f = f_0 - \partial_z F; \tag{2.11}$$

при этом $f_0 \in \mathcal{V}^{l-1}_\beta(\Omega)$ и $F \in \mathcal{V}^l_\beta(\Omega)$. Аналогично поступим с краевым условием (1.6) — его правую часть разложим следующим образом:

$$g = g_0 + \nu_n F. \tag{2.12}$$

В (2.12) ν_n — компонента единичного вектора внешней нормали ν, F взята из (2.11), а $g_0 \in \mathcal{V}^{l-1/2}_{\beta+1}(\partial\Omega) = V^{l-1/2}_{\beta+1/2}(\partial\Omega)$.

В соответствии со сказанным составим пространство $\mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)$ из пар (f,g), допускающих представления (2.11), (2.12), и снабдим его нормой

$$\begin{aligned}&\|(f,g);\mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)\|\\ &\quad= \inf\{\|f_0;\mathcal{V}^{l-1}_\beta(\Omega)\| + \|F;\mathcal{V}^l_\beta(\Omega)\| + \|g_0;V^{l-1/2}_{\beta+1/2}(\partial\Omega)\|\},\end{aligned} \tag{2.13}$$

где infimum вычисляется по всем указанным представлениям.

Предложение 2.5. *Отображение* (1.8) *непрерывно.*

Доказательство. Положив

$$f_0 = -\partial_\alpha a_{\alpha k} \partial_k u, \qquad g_0 = \nu_\alpha a_{\alpha k} \partial_k u,$$

сразу же заканчиваем проверку непрерывности ссылками на формулы (2.9), (1.2), (1.6), (2.13), лемму 2.3 и замечание 2.4(2). •

Пример 2.6. На первый взгляд определение пространства $\mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)$ кажется искусственным. Поэтому мы обсудим задачу о декомпозиции Гельмгольца, которая находит применение в механике сплошных сред и для которой используемые конструкции вполне естественны. Пусть векторное поле $v = (v_1, v_2, v_3)$ и скалярное поле p в трехмерной области Ω удовлетворяют соотношениям

$$-v(x) + \nabla_x p(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.14}$$

$$-\nabla_x \cdot v(x) = \mathbf{f}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.15}$$

$$\nu(x) \cdot v(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.16}$$

Здесь $\nabla_x = \operatorname{grad}$, точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ (т. е. $\nabla_x \cdot = \operatorname{div}$), $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, $\mathbf{f}_0$ и $\mathbf{g}$ — скалярные функции. Выразим вектор v, исходя из равенства (2.14), и подставим его в (2.15) и (2.16). В результате получим задачу Неймана для оператора Лапласа

$$\begin{aligned} -\nabla_x \cdot \nabla_x p(x) &= \mathbf{f}_0(x) - \nabla_x \cdot \mathbf{f}(x), && x \in \Omega, \\ \partial_\nu p(x) \equiv \nu(x) \cdot \nabla_x p(x) &= \mathbf{g}(x) + \nu(x) \cdot \mathbf{f}(x), && x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Если предъявить разумные требования

$$\mathbf{f}_0 \in V^{l-1}_\beta(\Omega), \qquad \mathbf{f}_j \in V^l_\beta(\Omega), \quad j = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{g} \in V^{l-1/2}_{\beta-1/2}(\partial\Omega)$$

к данным задачи (2.14)–(2.16) и положить

$$f_0 = \mathbf{f}_0 - \partial_\alpha \mathbf{f}_\alpha, \qquad F = \mathbf{f}_n, \qquad g_0 = \mathbf{g} + \nu_\alpha \mathbf{f}_\alpha,$$

то для выражений справа в (2.17) будут выполнены представления (2.11), (2.12) и конечна норма (2.13). Таким образом, задача о декомпозиции Гельмгольца и задача Неймана для уравнения Пуассона включаются в предлагаемую схему. Впрочем, ввиду возможности разделения переменных в уравнении Лапласа в слое (1.1) часть результатов (в том числе большинство асимптотических; см. [20]) можно получить при помощи классического метода Фурье.

4. Фредгольмово свойство оператора $\mathcal{A}^l_\beta$. Формулируемая ниже теорема 2.7 представляет основной результат статьи и ее проверке посвящены остальные три параграфа. В данном разделе мы выведем из нее простые следствия.

Теорема 2.7. 1) *Оператор* (1.8) *задачи* (1.5), (1.6) *фредгольмов в том случае, когда $l \geqslant 1$ и весовой показатель β лежит вне запретного множества*

$$\mathbf{B} = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta - l + (n-3)/2 \in \mathbb{Z} \setminus (0, n-3)\}. \tag{2.18}$$

2) *Если $\beta \in \mathbf{B}$, то образ оператора $\mathcal{A}^l_\beta$ незамкнут.*

Для того чтобы обобщить постановку краевой задачи в области Ω, возмутим L и N дифференциальными выражениями

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x) = l_j(x)\partial_j - \partial_z l_0(x) + l(x), \quad \mathcal{N}(x) = b(x) \tag{2.19}$$

и опишем требования к коэффициентам $l_{\dots}$ и b, обеспечивающие возможность разложить отображение

$$(\mathcal{L}, \mathcal{N}) : \mathcal{D}^l_\beta(\Omega) \to \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega) \tag{2.20}$$

в сумму компактного и малого, т. е. перенести утверждения 2.7 на случай задачи с оператора $L+\mathcal{L}$ и $N+\mathcal{N}$. Мы не включили в $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}$ слагаемые $-\partial_j l_{jk}\partial_k$ и $\nu_j l_{jk}\partial_k$ с исчезающими на бесконечности коэффициентами l_{jk} лишь потому, что такое вомущение разрешено условием (1.3) с самого начала. При замене Ω, $\partial\Omega$ на $\Omega \cap B_{2R}$, $\partial\Omega \cap B_{2R}$ полная непрерывность отображения (2.20) становится очевидной, т. е., как обычно, можно считать, что коэффициенты $l_{\dots}$ и b аннулируются внутри шара B_R.

Положим $f = \mathcal{L}u$, $g = \mathcal{N}u$ и в согласии с (2.11), (2.12), (2.19)

$$f_0 = l_j\partial_j u + lu, \qquad F = l_0 u, \qquad g_{0\pm} = (b_\pm \pm l_{0\pm})u.$$

Обращаясь к формулам (2.1), (2.5) и к леммам 2.1–2.3, видим, что

$$\partial_j u \in V^{l-1}_{\beta-1}(\Omega), \qquad u \in V^l_{\beta-1}(\Omega) \subset V^{l-1}_{\beta-2}(\Omega), \qquad u_\pm \in V^{l-1/2}_{\beta-3/2}(\Pi_\pm \setminus B_R).$$

Таким образом, нужное разложение для (2.20) обеспечивается следующим предположением: справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&|\nabla^p_y \partial^q_z [l_h(y,z) - l^0_h(z,\varphi) r^{-1}]| \\
&+ r|\nabla^p_y \partial^q_z [l(y,z) - l^0(z,\varphi) r^{-2}]| \\
&\qquad \leqslant c_{pq} r^{-\varepsilon-1-p} \quad \text{при } x \in \Pi \setminus B_R, \\
&|\nabla^p_y [b(y,\pm 1/2) \pm l_0(y,\pm 1/2) - b^0_\pm(\varphi) r^{-2}]| \\
&\qquad \leqslant c_p r^{-\varepsilon-2-p} \quad \text{при } |y| > R
\end{aligned} \tag{2.21}$$

и

$$\begin{aligned}
&|\partial^q_z \nabla^p_\varphi l^0_h(z,\varphi)| + |\partial^q_z \nabla^p_\varphi l^0(z,\varphi)| + |\nabla^p_\varphi b^0_\pm(\varphi)| \\
&\qquad \leqslant c_{pq} \tau \quad \text{при } (z,\varphi) \in [-1/2, 1/2] \times \mathbb{S}^{n-2},
\end{aligned} \tag{2.22}$$

в которых p, $q = 0, 1, \ldots, \varepsilon > 0$, $h = 0, \ldots n$, а τ — малое число.

Следствие 2.8. 1) *Пусть $\beta \notin$ B и выполняются формулы* (2.19) *и* (2.21), (2.22). *Тогда найдется $\tau(\beta) > 0$ такое, что при $\tau < \tau(\beta)$ фредгольмово свойство присуще отображению*

$$\{L + \mathcal{L}, N + \mathcal{N}\} : \mathcal{D}^l_\beta(\Omega) \to \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega). \tag{2.23}$$

2) *Если l^0_h, l^0 и b^0 равны нулю, то отображения* (1.8) *и* (2.23) *фредгольмовы одновременно.*

Замечание 2.9. В разд. 5 §3 и 6§5 мы покажем, что условие малости τ в (2.22) можно снять. При этом теорема 2.7 сохранится для оператора из (2.23), если в ней заменить B другим счетным множеством запрещенных весовых показателей.

Для того чтобы сравнить операторы $\mathcal{A}^l_\beta$ и $\mathcal{A}^l_\gamma$ при близких β и γ, воспользуемся известным приемом окаймления L и N весовыми множителями. Пусть $\mu(y) = (1 + r^2)^{(\beta-\gamma)/2}$. Заметим, что отображения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^l_\beta(\Omega) \ni \quad & u \mapsto \quad u' = \mu u \in \mathcal{D}^l_\gamma(\Omega), \\ \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega) \ni (f, g) & \mapsto (f', g') = (\mu f, \mu g) \in \mathcal{R}^l_\gamma(\Omega, \partial\Omega) \end{aligned} \tag{2.24}$$

суть изоморфизмы. Кроме того, при помощи непосредственных вычислений нетрудно убедиться в том, что для операторов

$$\mathcal{L} = \mu L \mu^{-1} - L, \quad \mathcal{N} = \mu N \mu^{-1} - N$$

справедливы соотношения (2.19), (2.21), (2.22), причем роль τ играет величина $|\beta - \gamma| < 1$. Наконец, если $u \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ — решение задачи (1.5), (1.6) с правой частью $(f, g) \in \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)$, то функция $u' \in \mathcal{D}^l_\gamma(\Omega)$ удовлетворяет задаче

$$\{\mathfrak{L}, \mathfrak{N}\}u' \equiv \{L + \mathcal{L}, N + \mathcal{N}\}u' = (f', g') \in \mathcal{R}^l_\gamma(\Omega, \partial\Omega) \tag{2.25}$$

(u', f', g' определены в (2.24)); верно и обратное. Таким образом, пользуясь устойчивостью индекса при малых возмущениях оператора, выводим из теоремы 2.7

Следствие 2.10. *Для любого* $\beta_0 \notin \mathbf{B}$ *найдется такое* $\delta_0 > 0$, *что индекс оператора* $\mathcal{A}^l_\beta$,

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A}^l_\beta = \dim\ker \mathcal{A}^l_\beta - \dim\operatorname{coker} \mathcal{A}^l_\beta, \tag{2.26}$$

постоянен при $\beta \in (\beta_0 - \delta_0, \beta_0 + \delta_0)$.

§3. Вспомогательные конструкции

1. Результирующий оператор на гиперплоскости. В разд. §1 мы уже обращались к асимптотической конструкции (1.14) при анализе структуры весовой нормы в $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$. В данном параграфе мы, ссылаясь на [8, 9], поясним причины ее возникновения, но вначале будем использовать (1.14) как нечто разумеющееся.

Обсудим видимые аналогии между задачей в слое Π и задачами в тонких областях, которые интенсивно исследуются как в механике (теория пластин и оболочек), так и в математике (см., к примеру, список литературы в [21]).

Во-первых, интересуясь поведением решений около бесконечности, мы обязаны отслеживать, как изменяется при $\rho \to \infty$ пересечение Ω со сферой радиуса ρ, — здесь то и появляется тонкая область: указанное пересечение обладает малой относительной толщиной $O(\rho^{-1})$ (так, в трехмерном случае экваториальный пояс $\{x \in \Pi : |x| = \rho\}$ имеет длину $2\Pi\rho$ и ширину $1 + O(\rho^{-1})$). Во-вторых, дифеницирование по z асимптотического представителя $r^{\Lambda-1}\mathrm{V}(z, \varphi, \log r)$ (см. (1.14)) не снижает порядок $\Lambda - 1$ обобщенной однородности, в то время как порядки его производных по y_α равны $\Lambda - 2$ (уменьшились). В теории краевых задач на тонких множествах такое расхождение по свойствам подчеркивается даже терминологией: z именуется быстрой переменной, а $y_1, \ldots, y_{n-1}$ — медленными. При этом центральный момент в процедуре построения асимптотики — разделение быстрых и медленных переменных (сошлемся как на саму работу [21], так и на указанные в ней многочисленные публикации по этому вопросу).

Следуя общей концепции упомянутой теории, найдем так называемый результирующий оператор $\mathrm{M}(y, \nabla_y)$, возникающий после устранения быстрой переменной z из задачи $\{L, N_\pm\}$ в слое Π. Это делается в несколько этапов. Сначала операторы L и $N_\pm$ расщепляются в суммы

$$\begin{aligned} L(x, \nabla_x) &= L_0(y, z, \partial_z) + L_1(y, z, \nabla_y, \partial_z) + L_2(y, z, \nabla_y), \\ N_\pm(y, \nabla_x) &= N_{0\pm}(y, \partial_z) + N_{1\pm}(y, \nabla_y), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\partial_z = \partial/\partial z$ и

$$L_0 = -\partial_z a_{nn} \partial_z, \qquad L_1 = -\partial_z a_{n\alpha}\partial_\alpha - \partial_\beta a_{\beta n}\partial_z, \\ L_2 = -\partial_\beta a_{\beta\alpha}\partial_\alpha, \qquad N_{0\pm} = a_{nn\pm}\partial_z, \qquad N_{4\pm} = a_{n\alpha\pm}\partial_\alpha. \tag{3.2}$$

Принцип разделения выражений в (3.1) прост: нижний индекс у L_q указывает порядок дифференцирования по медленным переменным.

Затем из главных (первых) членов расщеплений (3.1) составляется основная предельная задача на интервале $(-1/2, 1/2)$:

$$\begin{aligned} -\partial_z a_{nn}(y, z)\partial_z U(y, z) &= F(y, z), \qquad z \in (-1/2, 1/2), \\ \pm a_{nn}(y, \pm 1/2)\partial_z U(y, \pm 1/2) &= G_\pm(y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ее можно также получить удалением из уравнений (1.5), (1.6), написанных для $\Omega = \Pi$, всех производных по y (т. е. сохраняется лишь „быстрое дифференцирование“, а медленные переменные назначаются параметром). Ясно, что задача (3.3) имеет решение в том и только в том случае, если

$$\int_{-1/2}^{1/2} F(y,z)dz + G_+(y) - G_-(y) = 0, \tag{3.4}$$

и что всякое решение однородной ($F = 0, G_\pm = 0$) задачи (3.3) оказывается константой $c(y)$ (величиной, зависящей только от параметра y).

Продолжая описание процедуры, укажем асимптотический анзац для решения задачи в слое:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \Phi_h(y,z,\nabla_y)U(y); \tag{3.5}$$

здесь Φ_h — дифференциальные операторы порядков h, а U — некоторая функция (определение уравнения для U является конечной целью процедуры). Вместо (3.5) удобно иметь дело с формальным рядом

$$\Phi(y,z,\nabla_y) \cong \sum_{h=0}^{\infty} \Phi_h(y,z,\nabla_y) \tag{3.6}$$

или с упорядоченным набором $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots\}$, который в [21] назван операторной квазицепочкой (по аналогии с жордановыми цепочками; подробности см. в §§1.3, 2.3 [21}). Элементы квазицепочек подчинены условиям

$$\Phi_0 = 1, \quad \operatorname{ord}\Phi_h(\cdot,\nabla_y) = h, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_q(y,z,\nabla_y)dz = 0, \;\; q = 1,2,\dots, \tag{3.7}$$

и находятся при решении упомянутой предельной задачи

$$\begin{aligned} L_0\Phi_h &= -L_1\Phi_{h-1} - L_2\Phi_{h-2} + M_h \quad \text{при} \quad z \in (-1/2, 1/2), \\ N_{0\pm}\Phi_h &= -N_{1\pm}\Phi_{h-1} \quad \text{при} \quad z = \pm 1/2; \end{aligned} \tag{3.8}$$

здесь $\Phi_{h-k} = 0$ для $k > h$, а $M_h(y,\nabla_y)$ — дифференциальные выражения, вычисляемые попутно. Поясним приведенные формулы. Равенства (3.8) появляются после подстановки (при учете (3.1), (3.2)) ряда (3.6) в соотношения

$$L\Phi \cong \sum_{h=0}^{\infty} M_h \quad \text{в } \Pi, N_\pm\Phi \cong 0 \text{ на } \Pi_\pm \tag{3.9}$$

и сбора слева и справа операторов одинаковых порядков относительно ∇_y. При этом формальный ряд $\sum M_h$ добавлен в (3.9) для соблюдения условий разрешимости (3.4) и потому

$$M_h(y,\nabla_y)=\int_{-1/2}^{1/2}\{L_1(y,z,\nabla_y,\partial_z)\Phi_{h-1}(y,z,\nabla_y)+L_2(y,z,\nabla_y)\Phi_{h-2}(y,z,\nabla_y)\}dz$$
$$+\sum_{\pm}\pm N_{1\pm}(y,\nabla_y)\Phi_{h-1}(y,\pm 1/2,\nabla_y). \tag{3.10}$$

Так как решения задач (3.8) определены с точностью до любого слагаемого, не зависящего от z, можно удовлетворить последнее из условий (3.7). В качестве начального члена ряда (3.6) берется нормированное решение $\Phi_0=1$ однородной задачи (3.3); отсюда и из (3.10) следует, в частности, что $M_0=0$.

Наконец, первый ненулевой член M_h ряда M из (3.9) объявляется результирующим оператором M (сравни с [21–23]), а функция U в (3.5) находится при решении уравнения с оператором M.

В рассматриваемой конкретной ситуации вычислить оператор $\mathrm{M}(y,\nabla_y)$ нетрудно. В самом деле, ввиду (3.1), (3.2) и (3.7) правые части равенств (3.8) при $h=1$ таковы:

$$\partial_z a_{n\alpha}(y,z)\partial_\alpha+M_1(y,\nabla_y),\mp a_{n\alpha}(y,z)\partial_\alpha$$

(слагаемое $-\partial_\beta a_{\beta n}\partial_z$ исчезло из $L_1\Phi_0$, поскольку $\Phi_0=1$ и нужно выполнить диференцирование по z; подчеркнем, что последнее не касается $\partial_\alpha=\partial/\partial y_\alpha$). Положив $M_1=0$, указываем явное решение

$$\Phi_1(y,z,\nabla_y)=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{c_\alpha(y)-\int_{-1/2}^{z}a_{nn}(y,\zeta)^{-1}a_{n\alpha}(y,\zeta)d\zeta\right\}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \tag{3.11}$$

а величину $c_\alpha(y)$ определяем в соответствии с (3.7),

$$c_\alpha(y)=\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}-\zeta\right)a_{nn}(y,\zeta)^{-1}a_{n\alpha}(y,\zeta)d\zeta. \tag{3.12}$$

Итак, $M_0 = M_1 = 0$ — найдем M_2. Заметим, что ввиду представлений (3.2) член $-\partial_z a_{n\alpha}\partial_\alpha$ в L_1 и операторы $N_{1\pm}$ можно не учитывать в формуле (3.10), поскольку там они взаимно сокращаются (после вычисления интеграла). Таким образом,

$$M_2(y,\nabla_y) = -\int\limits_{-1/2}^{1/2} \{\partial_\beta a_{\beta\alpha}(y,z)\partial_\alpha - L_1(y,z,\nabla_y,\partial_z)\Phi_1(y,z,\nabla_y)\}dz$$
$$\equiv -\partial_\beta \mathrm{a}_{\beta\alpha}(y)\partial_\alpha \equiv \mathrm{M}(y,\nabla_y), \tag{3.13}$$

где

$$\mathrm{a}_{\beta\alpha}(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \{a_{\beta\alpha}(y,z) - a_{\beta n}(y,z)a_{nn}(y,z)^{-1}a_{n\alpha}(y,z)\}dz. \tag{3.14}$$

Переходя в (3.14) к пределу при $|y| \to \infty$, получаем с помощью (1.3) коэффициенты $\mathrm{a}^0_{\beta\alpha}$ главной (на бесконечности) части

$$\mathrm{M}^0(\nabla_y) = -\mathrm{a}^0_{\beta\alpha}\partial^2/\partial y_\beta \partial y_\alpha \tag{3.15}$$

результирующего оператора. Эллиптичность M вытекает из общих теорем 2.5, 3.8 [21] (см. также §3.5 [21]), однако здесь мы докажем этот факт напрямую для удобства читателю.

Предложение 3.1. *При любом* $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ *выполняется неравенство* $\eta_\alpha \mathrm{a}_{\alpha\beta}(y)\eta_\beta \geqslant c|\eta|^2$, *где* $|y| > R$, *а* c *— та же постоянная, что и в* (1.4). *Иными словами,* (3.13) *и* (3.15) *— эллиптические операторы.*

Доказательство. Подставим во вторую формулу из (1.4) $\xi = (\eta,\xi_n)$, где $\xi_h = -a_{nn}(y,z)^{-1}a_{n\alpha}(y,z)\eta_\alpha$. Так как $a_{n\alpha} = a_{\alpha n}$, средняя часть полученной формулы совпадает с подынтегральным выражением в (3.14), окаймленным множителями η_β и η_α. Левая часть оценивается снизу величиной $c(|\eta|^2 + |\xi_n|^2) \geqslant c|\eta|^2$. •

2. Расщепление задачи в слое. Решение $u \in \mathcal{D}^l_\beta(\Pi)$ задачи (1.5), (1.6) в $\Omega = \Pi$ представим как сумму

$$u(y,z) = \overline{u}(y) + u_\perp(y,z), \tag{3.16}$$

где

$$\overline{u}(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} u(y,z)dz. \tag{3.17}$$

Ясно, что $\overline{u_\perp} = \overline{(u - \overline{u})} = \overline{u} - \overline{u} = 0$.

Лемма 3.2. *Функции $\overline{u}$ и $u_\perp$ принадлежат соответственно $V_\beta^{l+1}(\mathbb{R}^{n-1})$ и $\mathcal{D}_\beta^l(\Pi)$. Выполняется неравенство*

$$\|\overline{u}; V_\beta^{l+1}(\mathbb{R}^{n-1})\| + \|u_\perp; \mathcal{D}_\beta^l(\Pi)\| \leqslant c\|u; \mathcal{D}_\beta^l(\Pi)\|. \tag{3.18}$$

Доказательство. Норма в пространстве $V_\sigma^l(\mathbb{R}^{n-1})$ получается из (2.8) заменой Ξ, h, $\varkappa$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, l, σ. Так как $\partial_z \overline{u} = 0$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|y|^2)^{\cdots} |\nabla_y^k \overline{u}(y)|^2 dy \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{-1/2}^{1/2} (1+|y|^2)^{\cdots} |\nabla_y^k u(y,z)|^2 dydz,$$

нужные свойства $\overline{u}$ очевидны. Кроме того, тождественное по направлению z продолжение $\overline{u}$ с гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ в слой Π сопровождается непрерывным вложением $V_\beta^{l+1}(\mathbb{R}^{n-1})$ в $\mathcal{D}_\beta^l(\Pi)$ (в соответствии с определением нормы (2.2)), т. е. остается учесть формулу $u_\perp = u - \overline{u}$. •

Образуем задачи для $\overline{u}$ и $u_\perp$. С проекцией $u_\perp$ осложнений не возникнет, поскольку ее поведение на бесконечности заведомо лучше, чем у $\overline{u}$ (для асимптотического представителя (1.14) $\bar{U}(x) = O(r^\Lambda)$ и $U_\perp(x) = O(r^{\Lambda-1})$). Необходимые оценки функции $u_\perp$ выводятся (см. далее лемму 4.2 и разд. 1 §5) на основе легко доступной информации: разность $u_\perp = u - \overline{u}$ удовлетворяет задаче

$$Lu_\perp = \mathbf{F}_0 - \partial_j \mathbf{F}_j \quad \text{в } \Pi, \qquad N_\pm u_\perp = \mathbf{G}_\pm \pm \mathbf{F}_n \quad \text{на } \Pi_\pm \tag{3.19}$$

(в дальнейшем переходим к обобщенной постановке). Правые части в (3.19) имеют вид

$$\mathbf{F}_0 = f_0 - \partial_z F, \quad \mathbf{F}_j = -a_{j\alpha}\partial_\alpha \overline{u}, \qquad \mathbf{G}_\pm = g_{0\pm} \pm F$$

и для них справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}_0; V^0_{\beta-l}(\Pi)\| + \|\mathbf{G}_\pm; V^0_{\beta-l}(\Pi_\pm)\| &\leqslant c\|(f,g); \mathcal{R}^l_\beta(\Pi,\partial\Pi)\|,\\ \|\mathbf{F}_j; V^0_{\beta-l-1}(\Pi)\| &\leqslant c\|\nabla_x v; V^0_{\beta-l-1}(\Pi)\|.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Все эти формулы следуют из представлений (2.11), (2.12) и (3.1) (3.2), из обычных включений для f_0, g_0 и F, а также из соотношений $\partial_z F \in \mathcal{V}^{l-1}_{\beta-1}(\Pi) \subset \mathcal{V}^0_{\beta-l}(\Pi)$, $\nabla_x v \in \mathcal{V}^l_\beta(\Pi)$. Подчеркнем, что второе неравенство неточно и на самом деле $\mathbf{F}_j \in \mathcal{V}^l_\beta(\Pi) \subset V^0_{\beta-l}(\Pi)$, однако по лемме 2.1 вложение $V^0_{\beta-l-1}(\Pi) \equiv \mathcal{V}^0_{\beta-l-1}(\Pi) \subset \mathcal{V}^l_\beta(\Pi)$ компактно, что и окажется решающим фактором в §5. Наконец, в левой части первой оценки из (3.20) можно заменить весовой показатель $\beta - l$ на меньший $\beta - l - 1$ — именно такая, загрубленная, оценка и применяется в §5.

Для того чтобы найти уравнение для $\overline{u}$, воспользуемся приемом, предложенным в [9, 13]. Возьмем произвольную пробную функцию $U \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1})$ и подставим сумму $v = U + \Phi_1 U \equiv U + b_\alpha\partial_\alpha U$ первых двух членов ряда (3.5) в формулу Грина

$$(Lu,v)_\Pi + (Nu,v)_{\partial\Pi} = (u,Lv)_\Pi + (u,Nv)_{\partial\Pi}, \tag{3.21}$$

обслуживающую задачу в слое. Согласно (1.5), (1.6) и (2.11), (2.12) левая часть (3.21) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}&(f_0, U + b_\alpha\partial_\alpha U)_\Pi + (F, \partial_z b_\alpha \partial_\alpha U)_\Pi + (g_0, U + b_\alpha\partial_\alpha U)_\Pi\\ &\quad = ((\mathcal{F}_0, U)) + ((\mathcal{F}_\alpha, \partial_\alpha U));\end{aligned} \tag{3.22}$$

здесь b_α — выражение из фигурных скобок в (3.11), $((\,,\,))$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$,

$$\mathcal{F}_0 = \bar{f}_0 + \sum_\pm g_{0\pm}, \mathcal{F}_\alpha = \overline{b_\alpha f_0} + \overline{F\partial_z b_\alpha} + \sum_\pm (b_\alpha g_0)_\pm, \tag{3.23}$$

чертой обозначена операция вычисления среднего (3.17), а $w_\pm$ — след w на $\Pi_\pm$. Таким образом, если справедливо включение $(f,g) \in \mathcal{R}^l_\beta(\Pi,\partial\Pi)$, то в силу лемм 2.2, 3.2

$$\mathcal{F}_0 \in V^{l-1}_\beta(\mathbb{R}^{n-1}) \subset V^0_{\beta-l+1}(\mathbb{R}^{n-1}), \qquad \mathcal{F}_\alpha \in V^{l-1}_{\beta-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \subset V^0_{\beta-l}(\mathbb{R}^{n-1})$$

и, к тому же, благодаря (2.13)

$$\|\mathcal{F}_0; V^0_{\beta-l+1}(\mathbb{R}^{n-1})\| + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \|\mathcal{F}_\alpha; V^0_{\beta-l}(\mathbb{R}^{n-1})\| \leqslant c\|(f,g); \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)\|. \tag{3.24}$$

Теперь займемся правой частью (3.21). В силу (3.1), (3.8) и (3.2)

$$\begin{aligned} Lv &= L_2U + L_1 b_\sigma U + L_2 b_\sigma \partial_\sigma U \\ &= \mathrm{M}U - \partial_\tau\{a_{\tau\sigma} - a_{\tau n}\partial_z b_\sigma - \mathrm{a}_{\tau\sigma}\}\partial_\sigma U \\ &\quad - \partial_z a_{n\tau}\partial_\tau b_\sigma \partial_\sigma U - \partial_\tau a_{\tau\alpha}\partial_\alpha b_\sigma \partial_\sigma U, \\ N_\pm v &= N_{1\pm} b_\sigma \partial_\sigma U. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Согласно (3.14) выражение из фигурных скобок имеет нулевое среднее по $x \in (-1/2, 1/2)$ и потому представимо в виде $\partial_z m_{\tau\sigma}$, где $m_{\tau\sigma}(\pm 1/2, y) = 0$. Следовательно, выражения (3.25) переписываются так:

$$\begin{aligned} Lv &= \mathrm{M}U - \partial_j(m^{j0}_{\sigma\tau}\partial_\sigma\partial_\tau + m^{j1}_\sigma \partial_\sigma)U, \\ N_\pm v &= \pm(m^{n0}_{\sigma\tau}\partial_\sigma\partial_\tau + m^{n1}_\sigma\partial_\sigma)U \end{aligned} \tag{3.26}$$

(суммирование по $j = 1, \dots, n$ и $\tau, \sigma = 1, \dots, n-1$). Ввиду предположения (1.3) о коэффициентах $a_{\alpha\beta}$ исходных операторов

$$|\nabla^p_y \partial^q_z m^{jh}_{\dots}(y,z)| \leqslant c_{pq}(1+r^2)^{-(p+h)/2}, \quad h = 0, 1; \quad p, q = 0, 1, \dots \tag{3.27}$$

Итак, правая часть формулы Грина (3.21) принимает вид

$$((u, \mathrm{M}U)) + ((\mathcal{F}^u_{\sigma\tau}, \partial_\sigma\partial_\tau U)) + ((\mathcal{F}^u_\sigma, \partial_\sigma U)), \tag{3.28}$$

причем в соответствии с (3.26) и (3.27), (2.1)

$$\mathcal{F}^u_{\sigma\tau} = \overline{m^{j0}_{\sigma\tau}\partial_j u} \in V^l_\beta(\mathbb{R}^{n-1}), \qquad \mathcal{F}^u_\sigma = \overline{m^{j1}_\sigma \partial_j u} \in V^l_{\beta+1}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{3.29}$$

Как и в случае (3.20), далее понадобятся загрубленные весовые оценки функций (3.29), а именно,

$$\|\mathcal{F}^u_{\sigma\tau}; V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})\| + \|\mathcal{F}^u_\sigma; V^0_{\beta-l}(\mathbb{R}^{n-1})\| \leqslant c\|\nabla_x u; V^0_{\beta-l-1}(\Pi)\|. \tag{3.30}$$

Итогом длинных рассуждений является интегральное тождество

$$((\overline{u}, \mathrm{M}U)) = ((\mathcal{F}_0, U)) + ((\mathcal{F}_\alpha - \mathcal{F}^u_\alpha, \partial_\alpha U)) - ((\mathcal{F}^u_{\alpha\tau}, \partial_\alpha \partial_\tau U)), \tag{3.31}$$

в котором $\overline{u} \in V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, а пробную функцию U можно брать из $V^2_{l+1-\beta}(\mathbb{R}^{n-1})$ (замыкаем (3.31) с $U \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1})$ по норме указанного класса). Само равенство (3.31) получается подстановкой (3.22), (3.28) в (3.21). В следующем разделе будет проверено

Предложение 3.3. *Если функция* $\overline{u} \in V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ *удовлетворяет* (3.31) *и весовой показатель лежит вне запретного множества* (2.18), *то справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\|\overline{u}; V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})\| \\ &\quad \leqslant c\{\|\mathcal{K}\overline{u}; V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})\| \\ &\qquad + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big[\|\mathcal{F}_\alpha - \mathcal{F}^u_\alpha; V^0_{\beta-l}(\mathbb{R}^{n-1})\| + \sum_{\tau=1}^{n-1} \|\mathcal{F}^u_{\alpha\tau}; V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})\|\Big] \\ &\qquad\qquad + \|\mathcal{F}_0; V^0_{\beta-l+1}(\mathbb{R}^{n-1})\|\}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

в котором $\mathcal{K}$ — *компактный оператор в* $V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, *а постоянная* c *не зависит от* u *и* $\mathcal{F}^{\cdots}_{\cdots}$.

3. Оператор М в весовых классах. Рассмотрим непрерывное отображение

$$V^2_\sigma(\mathbb{R}^{n-1}) \ni v \mapsto \mathrm{M}v \in V^0_\sigma(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{3.33}$$

Интерпретируя проколотое пространство $\mathbb{R}^{n-1} \backslash O$ как конус (полный) применим к (3.33) общие теоремы о задачах в областях с коническими выходами на бесконечность (см. замечание 4.1.5 [4]). Известно (см. [1], а также утверждения 3.5.4, 4.1.2 [4]), что оператор из (3.33) является фредгольмовым тогда и только тогда, когда всякое степенное решение $U(y) = r^\Lambda \mathrm{U}(\varphi)$ уравнения

$$\mathrm{M}^0(\nabla_y)U(y) = 0, \quad u \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus O, \tag{3.34}$$

оказывается тривильным при условии, что показатель Λ обобщенной однородности лежит на прямой $\{\Lambda \in \mathbb{C} : \sigma - 2 + \operatorname{Re}\Lambda + (n-1)/2 = 0\}$. В (3.34)

M^0 — оператор (3.15). Отметим еще, что для показателей Λ (комплексных чисел) на указанной прямой подынтегральные выражения из $\|U; V^2_\sigma(\mathbb{R}^{n-1})\|^2$ (см. (2.8)) суть величины $O(|y|^{1-n})$ при $|y| \to +\infty$, т. е. около бесконечности интегралы раходятся с логарифмической скоростью.

После линейной замены переменных $y \mapsto \eta = \mathrm{A}^{-1}y$, где A — положительный квадратный корень из матрицы $(\mathrm{a}^0_{\alpha\beta})^{n-1}_{\alpha,\beta=1}$, оператор M^0 трансформируется в лапласиан $-\nabla_\eta \cdot \nabla_\eta$, для которого все степенные решения известны: гармонические полиномы степеней $m = 0, 1, \ldots$ и производные фундаментального решения $\Gamma_2(\eta) = c_2 \log|\eta|$ и $\Gamma_{n-1}(\eta) = c_{n-1}|\eta|^{3-n}$ при $n > 3$. Поскольку переход $\eta \mapsto y$ не сказывается на показателях однородности, получаем следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Отображение* (3.33) *фредгольмово в том и только в том случае, если*

$$\sigma + (n-5)/2 \notin \mathbb{Z} \setminus [1, n-2]. \tag{3.35}$$

Сопряженный с оператором из (3.33) задается так:

$$V^0_{-\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}) = V^0_\sigma(\mathbb{R}^{n-1})^* \ni w \mapsto \mathrm{M}w \in V^2_\sigma(\mathbb{R}^{n-1})^* \tag{3.36}$$

(учли формальную самосопряженность M). Отображение (3.36) фредгольмово при том же ограничении (3.35), что и для (3.36). Если в условиях предложения 3.3

$$\sigma = l + 1 - \beta,$$

то, во-первых, формула (3.35) эквивалентна формуле $\beta \notin \mathbf{B}$, во-вторых, $\overline{u} \in V^0_{-\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ и, в-третьих, правая часть тождества (3.31) определяет линейный непрерывный функционал на $V^2_\sigma(\mathbb{R}^{n-1}) \ni U$. Итак, оценка (3.32) в предложении 3.3 — следствие фредгольмова свойства отображения (3.35).

4. Несколько слов об асимптотике. На основе рассуждений, близких к только что использованным, в [8] найдена асимптотика решения смешанной краевой задачи в трехмерной области с выходом на бесконечность в виде сектора слоя (вблизи боковых сторон сектора, на которых выставлены условия Дирихле, возникают дополнительно экспоненциальные пограничные слои). Асимптотика решения задачи Неймана в точке касания гладких компонент границы изучена в [9] (напоминаем про геометрическое родство такой особенности границы со слоем; см. начало разд. 2 §1).

Адаптация (сопровождающаяся даже некоторыми упрощениями) асимптотических формул из [8, 9] к задаче в слое нетрудоемка. Поэтому мы не будем приводить алгорифм построения асимптотики и переформулировать теоремы для его обоснования. Упомянем лишь, что главные члены асимптотики имеют вид (1.14), где $r^{\Lambda}\mathrm{U}(\varphi, \log r)$ — степенное решение уравнения (3.34), $b^0_\alpha(z)$ — предел при $|y| \to \infty$ фигурной скобки из (3.11) (обозначение $b_\alpha(z,y)$ для этой скобки уже возникало в (3.22), (3.23)). Полное асимптотическое разложение решения формируется как сумма бесконечного набора рядов (3.5), где в качестве U выступают степенные решения $r^{-m}\mathrm{U}(\varphi, \log r)$ уравнений

$$\mathrm{M}^0(\nabla_y)U(y) = r^{-m-2}\mathrm{F}(\varphi, \log r), \quad y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0,$$

а m принимает целые значения m_0, $m_0+1, \ldots$

5. Несамосопряженный случай. С целью написать предыдущий абзац мы упустили предоставленную следствием 2.8 возможность несколько упростить вычисления в разд. 1: при исследовании свойств отображения (1.8) можно оперировать с главными частями L и $N^0_\pm$ операторов L и N (остатки порождают малые или компактные отображения: $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega) \to \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)$). Воспользуемся этой возможностью теперь и рассмотрим только главные части

$$\mathfrak{L}^0(x, \nabla_x) = -\partial_j a^0_{jk}(z)\partial_k + r^{-1}l^0_j(z,\varphi)\partial_j - r^{-1}\partial_z l^0_0(z,\varphi) + r^{-2}l^0(z,\varphi),$$
$$\mathfrak{N}^0_\pm(y, \nabla_x) = \pm a^0_{nk}(\pm 1/2)\partial_k \pm r^{-1}l^0_0(\pm 1/2, \varphi) + r^{-2}b_\pm(\varphi)$$

операторов $\mathfrak{L} = L + \mathcal{L}$, $\mathfrak{N} = N + \mathcal{N}$, обсуждавшихся в разд. 4 §2.

Действуя аналогично разд. 1 §3, построим результирующий оператор $\mathfrak{M}$ для задачи $\{\mathfrak{L}, \mathfrak{N}\}$ в слое Π. Обратимся к ряду (3.6), в котором $\Phi_0 = 1$, а члены Φ_1 и Φ_2 суть решения задач (3.8), где в правую часть краевого условия добавлено слагаемое $\mathfrak{N}_{2\pm}\Phi_{h-2}$; L_p, $N_{q\pm}$ заменены на $\mathfrak{L}_p$, $\mathfrak{N}_{q\pm}$ и подобно (3.2)

$$\mathfrak{L}_0 = -\partial_z a^0_{nn}\partial_z, \qquad \mathfrak{L}_2 = -\partial_\alpha a^0_{\alpha\beta}\partial_\beta + r^{-1}l^0_\alpha\partial_\alpha + r^{-2}l^0,$$
$$\mathcal{L}_1 = -\partial_z a^0_{n\beta}\partial_\beta - \partial_\alpha a^0_{\alpha n}\partial_z + r^{-1}l^0_n\partial_z - r^{-1}\partial_z l^0_0,$$
$$\mathfrak{N}_{0\pm} = \pm a^0_{nn}\partial_z, \qquad \mathfrak{N}_{1\pm} = \pm a^0_{n\alpha}\partial_\alpha \pm r^{-1}l^0_0, \qquad \mathfrak{N}_{2\pm} = r^{-2}b^0_\pm.$$

На первом шаге имеем $M_1 = 0$ и

$$\Phi_1(y, z, \nabla_y)$$
$$= \Big\{c^0_\alpha - \int\limits_{-1/2}^{z} a^0_{nn}(\zeta)^{-1}a^0_{n\alpha}(\zeta)d\zeta\Big\}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} + r^{-1}\Big\{c_0(\varphi) - \int\limits_{-1/2}^{z} a^0_{nn}(\zeta)^{-1}l^0_0(\zeta)d\zeta\Big\}$$

(ср. с (3.11)); здесь c^0_α — предел (3.12) при $|y| \to \infty$ и

$$c_0(\varphi) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2} - \zeta\right) a^0_{nn}(\zeta)^{-1} l^0_0(\zeta, \varphi) d\zeta.$$

Теперь, выписывая условие (3.4) разрешимости модифицированной указанным способом задачи (3.8), находим, что

$$M_2 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_1 \Phi_1) dz + \mathfrak{N}_{1+}\Phi_1 - \mathfrak{N}_{1-}\Phi_1 + \mathfrak{N}_{2+} - \mathfrak{N}_{2-} \equiv \mathfrak{M},$$

где

$$\mathfrak{M}(y, \nabla_y) = -\partial_\alpha \mathrm{a}_{\alpha\beta} \partial_\beta + r^{-1} \mathrm{a}_\alpha(\varphi) \partial_\alpha + r^{-2} \mathrm{a}(\varphi), \tag{3.37}$$

коэффициенты $\mathrm{a}_{\alpha\beta}$ по-прежнему имеют вид (3.14) и

$$\mathrm{a}_\alpha = \overline{l^0_\alpha} + \overline{a^0_{\alpha n}(a^0_{nn})^{-1} l^0_0} - \overline{l^0_n (a^0_{nn})^{-1} a^0_{n\alpha}},$$
$$\mathrm{a}_\alpha = \overline{l^0} + b^0_+ - b^0_- - \overline{l^0_n (a^0_{nn})^{-1} l^0_0} - \overline{a^0_{\alpha n}(a^0_{nn})^{-1} l^0_0} \psi_\alpha,$$

причем $\psi_\alpha(\varphi) = y_\alpha r^{-1}$. Результирующий оператор (3.37) обладает таким свойством обобщенной однородности:

$$\mathfrak{M}(t^{-1}y, t\nabla_y) = t^2 \mathfrak{M}(y, \nabla_y), \quad t > 0, \ y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus O.$$

Напоследок отметим, что при помощи аналогичной процедуры можно построить результирующий оператор для задачи, формально сопряженной с $\{\mathfrak{L}, \mathfrak{N}\}$, и что этот оператор совпадет с оператором $\mathfrak{M}^*$, сопряженным с (3.37). Сказанное можно проверить при помощи непосредственных вычислений, однако во избежание повторения громоздких выкладок мы сошлемся на ход доказательства теорем 2 в [23] и 2.6 в [21] (они относятся к самосопряженному случаю, но очевидные подмены в рассуждениях приводят к нужному результату).

§4. Весовые оценки решений

1. Оценки для градиента решения. В этом разделе проверяются два вспомогательных неравенства, которые позволят далее получить асимптотически точные оценки для решения u и его проекции $u_\perp$.

Лемма 4.1. *Пусть* $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ — *решение задачи*

$$L(x,\nabla_x)u(x) = f^0(x) - \partial_k f_k(x), \qquad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$N(x,\nabla_x)u(x) = g^0(x) + \nu_k(x) f_k(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.2}$$

причем $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$,

$$u \in V^0_{\gamma-1}(\Omega), \quad f^0 \in V^0_{\gamma+1}(\Omega), \quad g^0 \in V^0_{\gamma+1}(\partial\Omega), \quad \mathbf{f} \in V^0_\gamma(\Omega) \tag{4.3}$$

и при некотором $\sigma \in (-\infty, \gamma]$

$$\nabla_x u \in V^0_\sigma(\Omega)^n. \tag{4.4}$$

Тогда $\nabla_x u \in V^0_\gamma(\Omega)^n$ *и выполняется неравенство*

$$\|\nabla_x u; V^0_\gamma(\Omega)\|^2 \leqslant c(\|f^0; V^0_{\gamma+1}(\Omega)\|^2 + \|g^0; V^0_{\gamma+1}(\partial\Omega)\|^2 + \|\mathbf{f}; V^0_\gamma(\Omega)\|^2 + \|u; V^0_{\gamma-1}(\Omega)\|^2) \tag{4.5}$$

с постоянной c, *не зависящей от* u *и* f, g.

Доказательство. Введем (непрерывную) весовую функцию

$$T_\rho(y) = \begin{cases} (1+r^2)^{\gamma/2} & \text{при } r < \rho; \\ (1+r^2)^{\sigma/2}(1+\rho^2)^{(\gamma-\sigma)/2} & \text{при } r \geqslant \rho; \end{cases} \tag{4.6}$$

здесь $\rho > R$ (далее осуществляется предельный переход $\rho \to \infty$). Умножим уравнение (1.5) на $T(x)^2 u(x)$ и проинтегрируем по частям в Ω при учете краевых условий (1.6). В результате получим равенство

$$\begin{aligned}\int_\Omega & T_\rho^2 a_{jk}\partial_j u \partial_k u dx \\ &= \int_\Omega T_\rho^2 f u dx + \int_{\partial\Omega} T_\rho^2 g^0 u ds_x + \int_\Omega T_\rho^2 f_k \partial_k u dx \\ &\quad + 2\int_\Omega T_\rho u f_k \partial_k T_\rho dx - 2\int_\Omega T_\rho a_{jk} u \partial_j u \partial_k T_\rho dx \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + 2I_4 - 2I_5. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Отметим, что в (4.7) все интегралы сходятся абсолютно благодаря (4.3), (4.4), (4.6) и что поверхностные интегралы, появившиеся при переброске ∂_k от f_k, учитываются представлением правой части (4.2). Еще обратим внимание на следующие обстоятельства. Во-первых,

$$|\partial_k T_\rho(y)| \leqslant c_{\gamma,\sigma}(1+r^2)^{-1/2} T_\rho(y)$$

в согласии с (4.4) и потому

$$\begin{aligned} |I_5| &\leqslant c\|T_\rho \nabla_x u; L_2(\Omega)\| \times \|T_\rho(1+r^2)^{-1/2}u; L_2(\Omega)\|, \\ |I_4| &\leqslant c\|T_\rho \mathbf{f}; L_2(\Omega)\| \times \|T_\rho(1+r^2)^{-1/2}u; L_2(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} \int_{\{u:|y|>R\}} & T_\rho(y)^2(1+r^2)^{-1}\big[u\big(y,+1/2\big)^2 + u\big(y,-1/2\big)^2\big]dy \\ &= \int_{\{x:|y|>R\}} T_\rho(y)^2(1+r^2)^{-1} 2\frac{\partial}{\partial z}\big[zu(y,z)^2\big]dydz, \end{aligned} \tag{4.8}$$

а значит, ввиду известных неравенств $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2$ и

$$\|u; L_2(\partial\Omega \cap B_{2R})\|^2 \leqslant c_R(\varepsilon\|\nabla_x u; L_2(\Omega\cap B_{3R})\|^2 + \varepsilon^{-1}\|u; L_2(\Omega \cap B_{3R})\|^2)$$

верно соотношение

$$|I_2| \leqslant c(\varepsilon\|T_\rho\nabla_x u; L_2(\Omega)\|^2 \\ + \varepsilon^{-1}\|T_\rho(1+r^2)^{-1/2}u; L_2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-1}\|T_\rho g^0; L_2(\partial\Omega)\|^2).$$

Теперь, взяв $\varepsilon > 0$ малым и вспомнив (1.4), после очевидной обработки I_1 и I_3 находим, что

$$\|T_\rho\nabla_x u; L_2(\Omega)\|^2 \\ \leqslant c(\|T_\rho(1+r^2)^{1/2}f^0; L_2(\Omega)\|^2 + \|T_\rho(1+r^2)^{1/2}g^0; L_2(\partial\Omega)\|^2 \\ +\|T_\rho \mathbf{f}; L_2(\Omega)\|^2 + \|T_\rho(1+r^2)^{-1/2}u; L_2(\Omega)\|^2). \tag{4.9}$$

Подчеркнем, что во всех написанных неравенствах постоянные не зависят от ρ. Правая часть (4.9) имеет предел при $\rho \to \infty$, который совпадает с правой частью (4.5), так как разность $(1+r^2)^\gamma - T_\rho(y)^2 \geqslant 0$ аннулируется при $|y| \leqslant \rho$ и все получающиеся интегралы сходятся абсолютно. Поэтому предел левой части (4.9) существует и равен $\|\nabla_x u; V_\gamma^0(\Omega)\|^2$. •

Лемма 4.2. *Пусть* $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *— решение задачи* (4.1), (4.2), *причем*

$$\overline{u}(y) = 0 \quad \textit{при } |y| > R; \tag{4.10}$$

$$f^0 \in V_\gamma^0(\Omega), \quad g^0 \in V_\gamma^0(\partial\Omega), \quad \mathbf{f} \in V_\gamma^0(\Omega) \tag{4.11}$$

и при некотором $\sigma \in (-\infty, \gamma]$ *верны включения* $u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u \in V_\sigma^0(\Omega)$. *Тогда в этих включениях можно заменить* σ *на* γ; *кроме того, выполняется оценка*

$$\|u; V_\gamma^0(\Omega)\|^2 + \|\nabla_x u; V_\gamma^0(\Omega)\|^2 \\ \leqslant c(\|f^0; V_\gamma^0(\Omega)\|^2 + \|g^0; V_\gamma^0(\partial\Omega)\|^2 + \|\mathbf{f}; V_\gamma^0(\Omega)\|^2 + \|u; H^1(\Omega \cap B_{2R})\|^2) \tag{4.12}$$

с постоянной c, *не зависящей от* u *и* f, g.

Доказательство. Благодаря последнему слагаемому в (4.12), можно ограничиться случаем $u(x) = 0$ при $|y| < R$ (умножив решение на подходящую срезку $\chi(y)$). Обратимся к формуле (4.5), содержащей, как и прежде, только сходящиеся интегралы. Ввиду неравенства Пуанкаре на отрезке $(-1/2, 1/2)$ (оно выполняется в соответствии с (4.10)) имеем

$$\begin{aligned}&\int T_\rho^2 a_{jk}\partial_k u \partial_j u dx\\ &\quad\geqslant c\|T_\rho \nabla_x u; L_2(\Pi)\|^2 \geqslant c\|T_\rho \partial_z u; L_2(\Pi)\|^2\\ &\quad\geqslant c\Pi^{-2}\|T_\rho u; L_2(\Pi)\|^2.\end{aligned}$$

Таким образом, в отличие от случая, рассмотренного в лемме 4.1, в нашем распоряжении не только норма $\|T_\rho \nabla_x u; L_2(\Pi)\|$, но и $\|T_\rho u; L_2(\Pi)\|$. Поэтому, меняя несколько ход рассуждений выводим, что

$$\begin{aligned}|I_5| &\leqslant c(1+R^2)^{-1/2}\|T_\rho \nabla_x u; L_2(\Pi)\| \times \|T_\rho u; L_2(\Pi)\|,\\ |I_1| &\leqslant c(\varepsilon\|T_\rho u; L_2(\Pi)\|^2 + \varepsilon^{-1}\|T_\rho f^0; L_2(\Pi)\|^2),\\ |I_3| &\leqslant c(\varepsilon\|T_\rho \nabla_x u; L_2(\Pi)\|^2 + \varepsilon^{-1}\|T_\rho \mathbf{f}; L_2(\Pi)\|^2),\\ |I_4| &\leqslant c(\varepsilon\|T_\rho u; L_2(\Pi)\|^2 + \varepsilon^{-1}\|T_\rho \mathbf{f}; L_2(\Pi)\|^2).\end{aligned}$$

К тому же, после удаления из (4.8) множителя $(1+r^2)^{-1}$ (это, разумеется, не нарушает равенства (4.8)) приходим к формуле

$$|I_2| \leqslant c(\varepsilon\|T_\rho u; L_2(\Pi)\|^2 + \varepsilon\|T_\rho \nabla_x u; L_2(\Pi)\|^2 + \varepsilon^{-1}\|T_\rho g^0; L_2(\partial\Pi)\|^2)$$

Осталось, взяв $\varepsilon > 0$ и R^{-1} достаточно малыми, собрать приведенные неравенства, получить в качестве результата

$$\begin{aligned}&\|T_\rho u; L_2(\Omega)\|^2 + \|T_\rho \nabla_x u; L_2(\Omega)\|^2\\ &\quad\leqslant c(\|T_\rho f^0; L_2(\Omega)\|^2 + \|T_\rho g^0; L_2(\partial\Omega)\|^2 + \|T_\rho \mathbf{f}; L_2(\Omega)\|^2 + \|u; H^1(\Omega\cap B_R)\|^2)\end{aligned}$$

и повторить сказанное после (4.9). •

2. „Грубые“ весовые оценки старших производных решений. В обеих леммах из предыдущего раздела использовалась априорная информация о градиенте решения — включение (4.4) с каким-либо весовым показателем σ. Следующая лемма обеспечивает проверку подобных условий в том объеме, который требуется далее.

Лемма 4.3. *Пусть* $u \in H^{l+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \cap V^0_\sigma(\Omega)$ *— решение задачи* (1.5) (1.6) *с правой частью* (f, g), *подчиненной соотношениям*

$$\nabla^k_x f \in V^0_\sigma(\Omega),\quad \nabla^k_y g_\pm \in V^0_\sigma(\Pi_\pm \setminus B_R),\quad k = 0,\dots,l-1,$$
$$g \in H^{l-1/2}(\partial\Omega \cap B_{2R}),\quad \nabla^{l-1}_y g_\pm \in H^{1/2}(\Pi_\pm \setminus B_R). \tag{4.13}$$

Тогда $\nabla^i_x u \in V^0_\sigma(\Omega)$ *при* $i = 0,\dots,l+1$.

Замечание 4.4. 1) В лемме 4.3 все производные решения u и правых частей f, g снабжены одним и тем же весовым множителем $(1+r^2)^{\sigma/2}$. Поэтому, во-первых, соответствующие весовые оценки решений нельзя признать точными и, во-вторых, при ссылках на лемму 4.3 в качестве σ приходится брать наименьший из показателей в весовых множителях при u, f, g и их производных. Последнее обстоятельство не является ограничительным — еще раз напоминаем, что в (4.4) σ может быть любым.

2) Весовые классы, возникшие в лемме 4.3, далее в статье востребованы не будут. Посему мы не вводим для них специальных обозначений, удлиняя тем самым описание (4.13). Как и ранее в (4.12), в (4.13) учтен тот факт, что на ограниченном множестве весовые множители $(1+r^2)^{\sigma/2}$ можно не принимать во внимание.

Доказательство леммы 4.3. Включение $u \in H^{l+1}(K)$ для всякого компакта $K \subset \overline{\Omega}$ гарантируется локальными оценками решений эллиптических краевых задач (см. [24, 25] и др.). Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением множества $\Xi_N = \Pi \setminus \{x : |x_j| \leqslant N\}$ с большим натуральным N. Пусть Q — единичный куб, попадающий двумя $(n-1)$-мерными гранями на $\partial\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-$; $Q \subset \Xi_N$. Пусть еще Q' — параллелепипед, полученный пересечением Π с раздутием куба Q в два раза относительно его центра; $q'_\pm$ — грани Q', лежащие на основаниях $\Pi_\pm$ слоя Π. Согласно [24, 25] верна оценка

$$\sum_{i=0}^{l+1} \|\nabla^i_x u; L_2(Q)\|^2 \leqslant c_0 \Big\{ \sum_{k=0}^{l-1} \Big[\|\nabla^k_x f; L_2(Q')\|^2 + \sum_\pm \|\nabla^k_y g_\pm; L_2(q'_\pm)\|^2 \Big] + \sum_\pm \|\nabla^{l-1}_q g_\pm; H^{1/2}(q'_\pm)\|^2 + \|u; L_2(Q')\|^2 \Big\}. \tag{4.14}$$

Лишь с целью избежать отдельного обсуждения нормы в $H^{1/2}(q'_{\pm})$ заменим в (4.14) сумму членов, содержащих $g_{\pm}$, выражением

$$\sum_{p=0}^{l} \|\nabla_x^k \widetilde{g}; \quad L_2(Q')\|^2, \tag{4.15}$$

где $\widetilde{g}$ — подходящее продолжение функций $g_{\pm}$. Подчеркнем особо, что во всех случаях постоянную c_0 можно взять одинаковой для всех рассматриваемых кубов.

Заметим, что на Q' выполняются неравенства

$$0 < c < (1+r^2)^{-\sigma/2} \inf\{(1+r^2)^{\sigma/2} \mid x \in Q'\} \leqslant C$$

с постоянными c и C, не зависящими от положения центра куба Q. Поэтому после умножения (4.14), (4.15) на $\inf\{\dots\}$ можно занести под знак каждой из норм весовой множитель $(1+r^2)^{\sigma/2}$ (новая постоянная c_0 сохранит свойство независимости). Если теперь воспользоваться стандартным приемом (см., к примеру, §2 [8] или §3 [9]) и, образовав разбиение Ξ_N на единичные кубы, просуммировать полученные весовые неравенства по всем элементам разбиения, то слева возникнет сумма интегралов

$$\sum_{i=0}^{l+1} \int_{\Xi_N} (1+r^2)^{\sigma} |\nabla_x^i u(x)|^2 dx, \tag{4.16}$$

а правая часть результирующего неравенства окажется конечной ввиду требований, предъявленных в (4.13) (несуществен тот факт, что параллелепипеды, соответствующие построенному разбиению, пересекаются, — кратность $\varkappa$ покрытия ими множества Ξ_N конечна, т. е. попросту в результирующем неравенстве на место c_0 нужно поставить $\varkappa c_0$). Сходимость интегралов из (4.16) обеспечивает включения $\nabla_x^i u \in V_\sigma^0(\Omega)$. •

3. Точные весовые оценки решений. Пусть функция

$$u \in H^{l+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \cap V^0_{\beta-l-1}(\Omega) \tag{4.17}$$

удовлетворяет соотношениям (1.5), (1.6), в которых $(f,g) \in \mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)$. Покажем, что $u \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ и установим неравенство

$$\|u;\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\| \leqslant c(\|(f,g);\mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)\| + \|u;V^0_{l-\beta-1}(\Omega)\|). \tag{4.18}$$

Для сокращения записи договоримся, что в этом разделе любое включение сопровождается оценкой соответствующей нормы правой частью (4.18). Еще одно упрощение возникает вследствие того, что на ограниченном подмножестве в Ω нужные свойства u вытекают из локальных оценок [24, 25] решений эллиптических задач, т. е. можно считать, что Ω совпадает со слоем Π.

По определению нормы (2.13) из формулы $(f,g) \in \mathcal{R}^l_\beta(\Pi,\partial\Pi)$ следует, что при $j = 0,\ldots,l-1$

$$\nabla^j_y f_0 \in V^0_{\beta-l+1+j}(\Pi), \qquad \nabla^j_y F \in V^0_{\beta-l+j}(\Pi), \qquad \nabla^j_y g_0 \in V^0_{\beta-l+1+j}(\partial\Pi). \tag{4.19}$$

Таким образом, беря $j = 0$, мы оказываемся в условиях леммы 2.1 с $\gamma = \beta - l$, а значит, верны включения (2.3). Интерпретируя этот факт как базу индукции, проверим, что предположение

$$\nabla^p_y u \in V^0_{\beta-l-1+p}(\Pi), \qquad \nabla^p_y \nabla_x u \in V^0_{\beta-l+p}(\Pi), \tag{4.20}$$

где $p = 0,\ldots,j-1$, гарантирует справедливость (4.20) при $p = j$ (иными словами, осуществим индукционный переход).

Пусть Du — какая-нибудь производная функция u порядка j по переменным $y = (y_1,\ldots,y_{n-1})$. Применяя оператор $D = D(\nabla_y)$ к задаче (1.5), (1.6) в слое $\Omega = \Pi$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
&L(x,\nabla_x)Du(x) \\
&\quad = Df_0(x) - \partial_z DF(x) + [L(x,\nabla_x),D]u(x), && x \in \Pi; \\
&N_\pm(y,\nabla_x)Du(y,\pm 1/2) \\
&\quad = Dg_0(y,\pm 1/2) \pm DF(y,\pm 1/2) + [N_\pm(y,\nabla_x),D]u(y,\pm 1/2), && y \in \mathbb{R}^{n-1};
\end{aligned} \tag{4.21}$$

здесь $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B. Собираясь воспользоваться леммой 4.1 с весовым показателем $\gamma = \beta - l + j$, приведем (4.21) в соответствие с (4.1), (4.2) при учете, что $\nu(x) = (0, \dots, 0, \pm 1)$ на $\Pi_\pm$. Заметим, что в силу (4.20) с $p = j - 1$ и (4.19)

$$Du \in V^0_{\beta-l+j}(\Pi); \tag{4.22}$$

$$Df_0 \in V^0_{\beta-l+1+j}(\Pi), \qquad DF \in V^0_{\beta-l+j}(\Pi), \qquad Dg_0 \in V^0_{\beta-l+1+j}(\partial\Pi) \tag{4.23}$$

(ввиду произвольности D включение (4.22) составляет первую часть подлежащей проверке формулы (4.20) с $p = j$). Кроме того, по лемме 4.3 при каком-то $\sigma \in (-\infty, \beta - l + j]$

$$\nabla_x Du \in V^0_\sigma(\Pi). \tag{4.24}$$

Наконец, вспоминая (1.2) и (1.7), видим, что

$$[L, D]u = \partial_k P_k u, \qquad [N_\pm, D]u = \mp P_n u, \tag{4.25}$$

где $P_k(x, \nabla_x) = [D, a_{kj}(x)]\partial_j$ — дифференциальный оператор порядка j и согласно (1.3) коэфициентами при $\nabla^q_y \nabla_x$ в нем служат величины $O([1+r^2]^{q-j})$. Таким образом, по индукционному предположению

$$P_k u \in V^0_{(\beta-l+q)-(q-j)}(\Pi) = V^0_{\beta-l+j}(\Pi). \tag{4.26}$$

Теперь, положив

$$f^0 = Df_0, \quad g^0 = Dg_0, \quad \mathrm{f}_\alpha = -P_\alpha u, \quad \mathrm{f}_n = F - P_n u,$$

мы попадаем в условия леммы 4.1, где u, γ заменены на Du, $\beta - l + j$, а требования (4.3), (4.4) соблюдены благодаря (4.22)–(4.24), (4.26). Следовательно, второе включение из (4.20) установлено в случае $Du \in H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Pi})$, т. е. для $j = 0, \dots, l-1$. Если $j \equiv \operatorname{ord} D = l$, то, вообще говоря, $Du \notin H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Pi})$ и для повторения предыдущих рассуждений нужна подготовительная работа.

Пусть $\operatorname{ord} D = l$ и $Du = \partial_\alpha \mathrm{D}_\alpha u$, где $\alpha = 1, \dots, n-1$ и $\mathrm{D}_\alpha u$ — производные порядка $l-1$. Все формулы (4.21)–(4.26) с заменой D на D_α верны; при этом в (4.25) и (4.26) фигурируют операторы, которые мы обозначим $\mathrm{P}_{\alpha k}$. Умножим уравнение $L\mathrm{D}_\alpha u = \dots$ на $\partial_\alpha(\mathrm{T}^2_\rho w)$ и проинтегрируем по частям (при учете краевого условия $N\mathrm{D}_\alpha u = \ldots$) с целью вывести интегральное тождество, содержащее произвольную функцию w из $C_0^\infty(\overline{\Pi})$. Под T_ρ понимается подобная (4.6) положительная весовая функция, совпадающая с $(1+r^2)^{\beta/2}$ при $r < \rho$ и равная

$$(1+r^2)^{\sigma/2}(1+\rho^2)^{-1+(\beta-\sigma)/2}[(1+\delta)(1+\rho^2)^{-1} - \delta(1+r^2)^{-1}] \tag{4.27}$$

при $r \geqslant \rho$. Число $\delta = (\beta - \sigma)/2 > 0$ подобрано так, чтобы первая производная кусочно гладкой функции T_ρ оказалась непрерывной (в отличие от T_ρ приходится дифференцировать T_ρ дважды).

Просуммируем полученные интегральные тождества по $\alpha = 1, \ldots, n-1$ и в их сумме

$$\begin{aligned}\int\limits_\Pi & a_{jk}\partial_k(\mathrm{D}_\alpha u)\partial_j\partial_\alpha(\mathrm{T}_\rho^2 w)dx \\ &= \int\limits_\Pi(\mathrm{D}_\alpha f - \partial_z \mathrm{D}_\alpha F)\partial_\alpha(\mathrm{T}_\rho^2 w)dx \\ &+ \int\limits_\Pi \partial_k(\mathrm{P}_{\alpha k}u)\partial_\alpha(\mathrm{T}_\rho^2 w)dx + \int\limits_{\partial\Pi} \mathrm{D}_\alpha g_0 \partial_\alpha(\mathrm{T}_\rho^2 w)dy \\ &+ \int\limits_{\partial\Pi} \nu_n \mathrm{D}_\alpha F \partial_\alpha(\mathrm{T}_\rho^2 w)dy + \int\limits_{\partial\Pi} \nu_n \mathrm{P}_{\alpha n} u \partial_\alpha(\mathrm{T}_\rho^2 w)dy\end{aligned} \tag{4.28}$$

перебросим некоторые производные и выполним частично дифференцирование. Вспоминая равенство $\partial_\alpha \mathrm{D}_\alpha = D$, приводим (4.28) к виду

$$\begin{aligned}\int\limits_\Pi & \mathrm{T}_\rho^2 a_{jk}\partial_k(Du)\partial_j w dx + 2\int\limits_\Pi \mathrm{T}_\rho a_{jk}\partial_k(Du)w\partial_j \mathrm{T}_\rho dx \\ &= \int\limits_\Pi \mathrm{T}_\rho \mathrm{D}_\alpha f_0(\mathrm{T}_\rho\partial_\alpha w + 2w\partial_\alpha \mathrm{T}_\rho)dx - \int\limits_\Pi \mathrm{T}_\rho^2 \partial_\alpha(\mathrm{D}_\alpha F)\partial_z w dx \\ &+ \int\limits_\Pi \mathrm{T}_\rho \partial_\alpha \mathrm{P}_{\alpha k} u(\mathrm{T}_\rho \partial_k w + 2w\partial_k \mathrm{T}_\rho)dx \\ &+ \int\limits_{\partial\Pi} \mathrm{T}_\rho \mathrm{D}_\alpha g_0 w \partial_\alpha \mathrm{T}_\rho dy + \int\limits_{\partial\Pi} \mathrm{T}_\rho^2 \mathrm{D}_\alpha g_0 \partial_\alpha w dy\end{aligned} \tag{4.29}$$

(комментарии см. ниже в замечании 4.5 (3)). Обработаем отдельно последний интеграл $I(w)$ (в силу (2.13) $\mathrm{D}_\alpha g_0 \in H^{1/2}_{\mathrm{loc}}(\partial\Pi)$ и потому перебрасывать производную ∂_α, вообще говоря, нельзя). Как и в лемме 2.3, сделаем замену радиальной переменной $[R, +\infty) \ni r \mapsto t = \log r$ и образуем функции

$$(t,\varphi) \mapsto r^{(n-1)/2}(1+r^2)^{\beta/2}\mathrm{D}_\alpha g_0(y),$$
$$(t,\varphi,z) \mapsto r^{(n-1)/2}(1+r^2)^{-\beta/2}\mathrm{T}_\rho(y)^2 w(x)$$

(перераспределение весовых множителей учитывает соотношения $\mathrm{D}_\alpha g_0 \in V^{1/2}_{\beta+1/2}(\partial\Pi)$ и $dy = r^{n-1}dtds_\varphi$). Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.3 и замечая, что $(1+r^2)^{\beta/2} \geqslant \mathrm{T}_\rho(y)$ согласно (4.27), находим, что

$$|I(w)| \leqslant c\int_\Pi \mathrm{T}^2_\rho\{|\nabla_y w|^2 + (1+r^2)^{-1}|\partial_z w|^2 + |w|^2\}dy$$
$$times \sum_{\alpha=1}^{n-1} \|\mathrm{D}_\alpha g_0; V^{1/2}_{\beta+1/2}(\partial\Pi)\|. \qquad (4.30)$$

В соответствии с (4.19), (4.20) и (2.13), (1.15)

$$\mathrm{D}_\alpha f_0 \in V^0_\beta(\Pi), \qquad \partial_\alpha \mathrm{D}_\alpha F \in V^0_\beta(\Pi), \qquad \partial_\alpha \mathrm{P}_{\alpha k} u \in V^0_\beta(\Pi),$$
$$\mathrm{D}_\alpha g_0 \in V^{1/2}_{\beta+1/2}(\partial\Pi) \subset V^0_\beta(\partial\Pi).$$

Эти включения вместе с (4.30) позволяют, приблизив Du функциями $w_m \in C^\infty_0(\overline{\Pi})$ по норме

$$\left\{\int_\Pi [(1+r^2)^\sigma|\nabla_x \cdot|^2 + (1+r^2)^{\beta-1}|\cdot|^2]dx\right\}^{1/2}$$

(ср. с (4.24) и (4.27)), перейти в (4.29) с $w = w_m$ к пределу при $m \to \infty$ и, наконец-то, поставить Du на место w (интегралы по Π сохраняют абсолютную сходимость). Теперь ничто уже не мешает при помощи прежних приемов из доказательства леммы 4.1 получить нужное включение $\nabla_x\nabla^l_y u \in V^0_\beta(\Pi)$ (учли дополнительно произвольность D, $\operatorname{ord} D = l$).

Замечание 4.5. 1) У весовой функции T_ρ такие же свойства, как у T_ρ из (4.6), т. е. для предельного перехода $\rho \to +\infty$ годятся соображения, использованные при проверке леммы 4.1.

2) Способ вывода оценок в первой части (простой, относящейся к случаям $p = 0, \dots, l-1$ в (4.20)) такой же, как и в п. 3.3 [9]. Основную трудность представляла вторая часть — оценки старших производных решения (в [8, 9] она отсутствовала и происходила потеря дифференциальных свойств решения).

3) Центральным моментом в преобразованиях (4.28) $\Rightarrow$ (4.29) является обмен производными ∂_z и ∂_α между сомножителями в интеграле по Π, содержащем F. В самом деле, $\partial_\alpha \mathrm{D}_\alpha F$ принадлежит $V^0_\beta(\Pi)$, но $\partial_z \mathrm{D}_\alpha F$ попадает только в пространство $V^0_{\beta-1}(\Omega)$ с „худшим" весовым показателем, т. е. в записи (4.28) предельный переход $m \to \infty$ невозможен. Попутно этот же обмен и аналогичные манипуляции с $\partial_k(\mathbf{P}_{\alpha k} u)\partial_\alpha \dots$ устранили два последних поверхностных интеграла в (4.28).

Дополним формулы (4.20), установленные для $p = 0, \dots, l$, соотношениями

$$\nabla^p_y \partial_z^{2+q} u \in V^0_{\beta-l+p}(\Pi), \quad p = 0, \dots, l-1, \; q = 0, \dots, l-1-p. \tag{4.31}$$

Они легко выводятся по индукции из представления

$$\begin{aligned} \partial_z^{2+q} u = \partial_z^q \{ a_{nn}^{-1} [\partial_z F - f_0 - (\partial_z a_{nn}) \partial_z u \\ - \partial_z a_{n\alpha} \partial_\alpha u - \partial_\alpha a_{\alpha n} \partial_z u - \partial_\alpha a_{\alpha\beta} \partial_\beta u] \}, \end{aligned}$$

получающегося прямыми преобразованиями уравнения (1.5). При этом используются свойство (1.3) коэффициентов a_{jk} и неравенство $a_{nn} > 0$, справедливое в силу (1.4).

Формулы (4.20), (4.31) эквивалентны (2.3), (2.4), т. е. $u \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ и, тем самым, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Если функция u подчинена* (4.17) *и удовлетворяет задаче* (1.5), (1.6) *с правой частью $(f, g) \in \mathcal{R}^l_\beta(\Omega)$, то $u \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ и верна оценка* (4.18), *в которой постоянная c не зависит от u и f, g.*

§5. Доказательство теоремы о фредгольмовом свойстве

1. Конечномерность ядра $\ker \mathcal{A}^l_\beta$ и замкнутость образа $\operatorname{Im} \mathcal{A}^l_\beta$. Пусть $\beta \notin \mathrm{B}$ (см. (2.18)). В этом разделе мы сначала докажем оценку

$$\|u; \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\| \leqslant c(\|(f, g); \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)\| + \|Ku; \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\|), \tag{5.1}$$

где K — компактный оператор в $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$, а затем обычным путем выведем из нее провозглашенные свойства отображения (1.8).

К сожалению, неравенство (4.18), установленное в теореме 4.6, нас не устраивает, поскольку вложение $V^0_{l-\beta-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ не является компактным. Тем не менее, ссылаясь на теорему 4.6, мы сводим задачу (1.5), (1.6) в Ω к такой же задаче в слое Π при помощи умножения решения на подходящую срезающую функцию (вложение

$$L_2(\Omega \cap B_R) \equiv V^0_{l-\beta-1}(\Omega \cap B_R) \subset \mathcal{D}^l_\beta(\Omega \cap B_R) \equiv H^{l+1}(\Omega \cap B_R)$$

уже компактно). Сохраняя за названным произведением символ u, оценим норму $\|u; V^0_{l-\beta-1}(\Pi)\|$, фигурирующую справа в (4.18). Аппелируя к разложению (3.16), воспользуемся установленным в предложении 3.3 неравенством (3.32) вкупе с оценками (3.24), (3.30) и получим, что

$$\begin{aligned}
&\|\overline{u}; V^0_{\beta-l-1}(\Pi)\| = \|\overline{u}; V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})\| \\
&\quad \leqslant c(\|(f,g); \mathcal{R}^l_\beta(\Pi, \partial\Pi)\| + \|\nabla_x u; V^0_{\beta-l-1}(\Pi)\| + \|\mathcal{K}\overline{u}; V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})\|).
\end{aligned}$$

Применим теперь лемму 4.2 с весовым показателем $\gamma = \beta - l - 1$ к задаче (3.19) для компоненты $u_\perp$ (для нее условие (4.10) выполнено в силу (3.16), (3.17)) — при учете (4.12) и (3.20) находим, что

$$\|u_\perp; V^0_{\beta-l-1}(\Pi)\| \leqslant c(\|(f,g); \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)\| + \|\nabla_x u; V^0_{\beta-l-1}(\Pi)\|).$$

Осталось вспомнить, что $\mathcal{K}$ — компактный оператор в $V^0_{\beta-l-1}(\Pi)$, и заметить, что по лемме 3.2 отображение

$$\mathcal{D}^l_\beta(\Pi) \ni u \mapsto \overline{u} \in V^0_{\beta-l-1}(\mathbb{R}^{n-1})$$

непрерывно и по лемме 2.1 вложение пространства $V^l_\beta(\Pi)$, содержащего градиенты функций из $\mathcal{D}^l_\beta(\Pi)$, в пространство $V^{l-1}_{\beta-2}(\Pi) \subset V^0_{\beta-l-1}(\Pi)$ компактно.

Итак, оценка (5.1) действительно имеет место. Проверим неравенство $\dim\ker \mathcal{A}^l_\beta < \infty$, убедившись в том, что шар $\mathcal{B} = \{u \in \ker \mathcal{A}^l_\beta \colon \|u; \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\| \leqslant 1\}$ — компактное подмножество пространства $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$. Пусть $u_m \in \mathcal{B}$ и u_m слабо в $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ сходится к u_∞ при $m \to \infty$. Сходимость $Ku_m \to Ku_\infty$ сильная и потому из оценки (5.1) с $(f,g) = 0$ и $u = u_m - u_\infty$ вытекает сильная сходимость u к u_∞, что и требуется для компактности $\mathcal{B}$.

Теперь рассмотрим образ $\operatorname{Im} \mathcal{A}^l_\beta$. Пусть $\mathbf{D}$ — какое-либо ортогональное дополнение $\ker \mathcal{A}^l_\beta$ до $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$. Если линеал $\operatorname{Im} \mathcal{A}^l_\beta$ незамкнут, то найдется последовательность $\{u_m\}$ элементов $\mathbf{D}$ такая, что

$$\|u_m; \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\| = 1, \qquad \|\mathcal{A}^l_\beta u_m; \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)\| \to 0. \tag{5.2}$$

Выберем подпоследовательность, сходящуюся к u_∞ слабо в $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ (сохраняем обозначение $\{u_m\}$). Так как $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$, даже слабая сходимость влечет равенство $\{L, N\}u_\infty = 0$ (это обстоятельство использовалось и в предыдущем абзаце). Ввиду замкнутости $\mathbf{D}$ заключаем, что $u_\infty \in \mathbf{D}$ и, значит, $u_\infty = 0$. Последнее противоречит предположению (5.2), так как в вытекающей из (5.1) оценке

$$\|u_m - u_\infty; \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\| \leqslant c(\|\mathcal{A}^l_\beta u_m; \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)\| + \|K(u_m - u_\infty); \mathcal{L}^l_\beta(\Omega)\|)$$

правая часть — бесконечно малая при $m \to \infty$.

2. Оператор сопряженный с $\mathcal{A}^1_\sigma$. В этом разделе фиксируем $l = 1$ и для сокращения формул будем писать $\mathcal{A}_\sigma$, $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$ и т. п., опуская знак l. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}^*_\sigma : \mathcal{R}_\sigma(\Omega, \partial\Omega)^* \to \mathcal{D}_\sigma(\Omega)^*,$$

сопряженный с $\mathcal{A}_\sigma$. В следующих двух абзацах мы сообщим известные (см. [25]; гл. 2, [26] и др.) сведения относительно $\mathcal{A}^*_\sigma$.

Подберем функцию $\tilde{a} \in C^\infty(\partial\Omega)$ так, чтобы дифференцирование в $\tilde{N} = N - \tilde{a}\partial_\nu$ происходило только по направлениям, касательным к $\partial\Omega$ (иными словами, $\tilde{N}$ — дифференциальный оператор на многообразии $\partial\Omega$). Оператор $\mathcal{A}^*_\sigma$ действует в пространстве обобщенных функций по формуле

$$\mathcal{R}_\sigma(\Omega, \partial\Omega)^* \ni (v, w) \mapsto \mathcal{A}^*_\sigma(v, w) = L\mathring{v} + \tilde{a}w \otimes \delta^{(1)}(\partial\Omega) + \tilde{N}^* \otimes \delta^{(0)}(\partial\Omega),$$

где кружком обозначена операция продолжения функции нулем с Ω на все пространство $\mathbb{R}^n$; $W \otimes \delta^{(j)}(\partial\Omega)$ — обобщенная функция

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ni \psi \mapsto ([-1]^j \partial^j_\nu \psi, W)_{\partial\Omega}, \tag{5.3}$$

$\partial_\nu = \nu \cdot \nabla_x$; $\widetilde{N}^*$ — сопряженный с $\widetilde{N}$ относительно скалярного произведения в $L_2(\partial\Omega)$, а в (5.3) фигурирует расширение этого произведения до двойственности между $H^{1/2}(\partial\Omega)$ и $H^{-1/2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega)^*$ (W „подрезается" вне носителя пробной функции ψ).

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ — окрестности точки из $\overline{\Omega}$, $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{W}$. Предположим, что правая часть V уравнения

$$\mathcal{A}_\sigma^*(v, w) = V \in \mathcal{D}_\sigma(\Omega)^* \tag{5.4}$$

принадлежит $H^s(\mathcal{W} \cap \Omega)$; тогда, во-первых, v содержится в $H^{s+2}(\mathcal{U} \cap \Omega)$ и удовлетворяет соотношениям $Lv = V$ в $\mathcal{U} \cap \Omega$, $Nv = 0$ на $\mathcal{U} \cap \partial\Omega$, а, во-вторых, компонента w совпадает на $\mathcal{U} \cap \partial\Omega$ со следом v.

Основываясь на приведенной информации, покажем, что подпространство $\ker \mathcal{A}_\sigma^* = \operatorname{coker} \mathcal{A}_\sigma$ может быть представлено в такой форме:

$$\{(v, v|_{\partial\Omega}) : v \in \ker \mathcal{A}_{2-\sigma}\}. \tag{5.5}$$

Подчеркнем, что включение линеала (5.5) в $\operatorname{coker} \mathcal{A}_\sigma$ очевидно, так как по замыканию формула Грина вида (3.21) в области Ω распространяется на пары $u \in \mathcal{D}_\sigma(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}_{2-\sigma}(\Omega)$ и, тем самым, доставляет необходимые условия

$$(f, v)_\Omega + (g, v)_{\partial\Omega} = 0, \quad v \in \ker \mathcal{A}_{2-\sigma} \tag{5.6}$$

разрешимости задачи (1.5), (1.6) (при подстановке u и v в названную формулу ее правая часть исчезает благодаря равенству $\{L, N\}v = 0$). Установим противоположное включение. Подпространство $\ker \mathcal{A}_\sigma^*$ содержит решения $(v, w) \in \mathcal{R}_\sigma(\Omega, \partial\Omega)^*$ однородного ($U = 0$) уравнения (5.4) и потому для $(v, w) \in \ker \mathcal{A}_\sigma^*$ согласно сказанному выше $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — решение однородной задачи (1.5), (1.6), а $w \in C^\infty(\partial\Omega)$ — его след на границе области Ω. Остается изучить поведение v около бесконечности. Заметим, что по определению пространство $\mathcal{R}_\sigma(\Omega, \partial\Omega)$ содержит как подпространство прямое произведение $\mathbf{R} = V_\sigma^0(\Omega) \times V_{\sigma+1/2}^{1/2}(\partial\Omega)$ (считаем, что $F = 0$ в (2.11) и (2.12)). Посему $\mathcal{R}_\sigma(\Omega, \partial\Omega)^* \subset \mathbf{R}^*$. Ясно, что в качестве первого сомножителя в $\mathbf{R}^*$ выступает класс $V_\sigma^0(\Omega)$. Таким образом, заведомо $v \in V_{-\sigma}^0(\Omega)$ и по теореме 4.6 (где $(f, g) = 0$, а l и $\beta - l - 1$ заменены на 1 и $-\sigma = (2 - \sigma) - 1 - 1$) v попадает в $\mathcal{D}_{2-\sigma}(\Omega)$, что и требовалось.

3. Конечномерность коядра оператора $\mathcal{A}^l_\beta$. Пусть $\beta \notin \mathrm{B}$. Наша ближайшая цель — проверить соотношение

$$\operatorname{coker} \mathcal{A}^l_\beta = \{(v, v|_{\partial\Omega}) : v \in \ker \mathcal{A}^l_{2l-\beta}\}, \tag{5.7}$$

из которого (по доказанному в разд. 1) следует нужное свойство коядра, поскольку

$$(2l-\beta) - l + (n-3)/2 = -[\beta - l + (n-3)/2] + n - 3,$$

т. е. β и $2l-\beta$ попадают в запретное множество (2.18) одновременно.

Правое множество из (5.7) содержится в левом (прежняя аргументация, связанная с подстановкой решения u задачи (1.5), (1.6) и элемента v линеала $\ker \mathcal{A}^l_{2l-\beta}$ в формулу Грина (3.11) для Ω, распространенную на пары $u \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}^l_{2l-\beta}(\Omega)$). При $(f,g) \in \mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega) \subset \mathcal{R}^1_{\beta-l+1}(\Omega,\partial\Omega)$ условия разрешимости (5.6) с $\sigma = \beta - l + 1$ обеспечивают существование решения $u \in \mathcal{D}^1_{\beta-l+1}(\Omega) \subset V^0_{\beta-l-1}(\Omega)$, попадающего в $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ благодаря неравенству (4.18). Ввиду соотношения $\ker \mathcal{A}^1_{l-\beta-1} = \ker \mathcal{A}^l_\beta$, вытекающего из теоремы 4.6, последняя фраза как раз и означает, что правое подпространство из (5.7) не уже левого. Проверка (5.7) закончилась.

4. Незамкнутость образа $\operatorname{Im} \mathcal{A}^l_\beta$ при $\beta \in \mathrm{B}$. При уменьшении (увеличении) весового показателя β пространство $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ расширяется ($\mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)$ сужается) и потому $\ker \mathcal{A}^l_\beta \subset \ker \mathcal{A}^l_{\beta-\varepsilon}$ и $\operatorname{coker} \mathcal{A}^l_\beta \subset \operatorname{coker} \mathcal{A}^l_{\beta+\varepsilon}$ для $\varepsilon > 0$, т. е. при всех $\beta \in \mathbb{R}$ подпространства $\ker \mathcal{A}^l_\beta$ и $\operatorname{coker} \mathcal{A}^l_\beta$ конечномерны. Поясним, за счет чего происходит потеря фредгольмовости оператором $\mathcal{A}^l_\beta$ в случае $\beta \in \mathrm{B}$.

Если $\beta \in \mathrm{B}$, то $\beta - l - (n-3)/2 = -m \in \mathbb{Z}$, где $m \geqslant 0$ или $m \leqslant 3-n$. В соответствии с разд. 3 §3 существует нетривиальное степенное решение $r^m \mathrm{U}(\varphi)$ уравнения (3.34). Пусть $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{R})$, $\chi(r) = 1$ при $r \leqslant R$ и $\chi(r) = 0$ при $r \geqslant 2R$; положим $\chi_t(r) = \chi(r/t)$ для $t > 1$. Подставим $U(y) = (1-\chi(r))\chi_t(r) r^m \mathrm{U}(\varphi)$ в ряд (3.5) и возьмем его частичную сумму $\mathcal{U} = U + \Phi_1 U + \Phi_2 U$. Несложные выкладки приводят к формулам

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}; \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\|^2 &\geqslant \|\mathcal{U}; V^0_{\beta-l-1}(\Omega)\|^2 \\ &\geqslant c\Big(-1 + \int_R^{Rt} r^{2(\beta-l-1)} r^{2m} r^{n-2}\, dr\Big) = c\Big(-1 + \int_R^{Rt} \frac{dr}{r}\Big) \\ &= c(\log t - 1). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Вместе с тем, в силу (3.8) выполняются равенства

$$\mathcal{L}\mathcal{U} = \mathrm{M}U + L_1\Phi_2 U + L_2\Phi_1 U + L_2\Phi_2 U,$$
$$\mathcal{N}_\pm\mathcal{U} = N_{1\pm}\Phi_2 U = (\pm a_{n\alpha}\partial_\alpha\Phi_2 U)_\pm.$$

Носитель $\mathrm{M}U$ лежит в объединении колец $\{x : Rt < r < 2Rt\}$ и $\{r : R < r < 2R\}$. Таким образом, вычисляя величину $\|\{L, N\}\mathcal{U}; \mathcal{V}^{l-1}_\beta(\Omega) \times V^{l-1/2}_{\beta+1/2}(\partial\Omega)\|^2$ согласно определению норм в $\mathcal{V}^{l-1}_\beta(\Omega)$ и $\mathcal{V}^l_\beta(\Omega)$, обнаруживаем, что мажорантой для нее служит выражение

$$c\left(1 + \int\limits_{Rt}^{2Rt} \sum_{k=0}^{l+3} t^{2k} r^{-2k} \frac{dr}{r} + \int\limits_{R}^{Rt} \sum_{k=1}^{l+3} r^{-2k} \frac{dr}{r}\right) \leqslant C,$$

(отметим, что первый интеграл в скобках возник при оценке коммутатора $[\mathrm{M}, \chi_t] r^m \mathrm{U}(\varphi)$, а второй — при оценке остатков $L_1\Phi_2 U$ и т. п.). Итак,

$$\|\{L, N\}\mathcal{U}; \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)\| \leqslant C, \tag{5.9}$$

причем постоянная C не зависит от $t \in (1, \infty)$. Замкнутость образа $\operatorname{Im}\mathcal{A}^l_\beta$ равносильна неравенству

$$\|u; \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\| \leqslant c_{\mathrm{D}} \|\{L, N\}u; \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)\| \tag{5.10}$$

для любого $u \in \mathrm{D}$ (подпространство D из ортогонального разложения $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega) = \mathrm{D} \oplus \ker \mathcal{A}^l_\beta$ фигурировало в разд. 1). Формулы (5.8) и (5.9) с $t \to +\infty$ показыают, что при $\beta \in \mathrm{B}$ постоянная c_{D} из (5.10) не может быть общей для всех $u \in \mathrm{D}$, т. е. образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}^l_\beta$ не является замкнутым.

5. О размерностях подпространств $\ker \mathcal{A}^l_\beta$ и $\operatorname{coker} \mathcal{A}^l_\beta$. В разд. 1,2 и 4 мы уже проверили оба утверждения теоремы 2.7. Формальная самосопряженность позволяет уточнить информацию о ядре и коядре оператора (1.8); при этом схема рассуждений — та же, что и в статье [28], относящейся к самосопряженным краевым задачам во внешности компактного множества.

Предложение 5.1. *При $\beta \geqslant l$ оператор $\mathcal{A}^l_\beta$ — мономорфизм, а при $\beta \leqslant l$ — эпиморфизм.*

Доказательство. Пусть $\beta \geqslant l$ и $u \in \ker \mathcal{A}^l_\beta$. Умножим (однородное) уравнение (1.5) на u, проинтегрируем в Ω по частям при учете (однородного) краевого условия (1.6) и получим

$$\int\limits_\Omega a_{jk}(x)\partial_k u(x)\partial_j u(x)dx = 0$$

(сходимость всех возникающих интегралов обеспечивается неравенствами (1.3) и соотношением $\nabla_x u \in V^l_\beta(\Omega) \subset V^0_{\beta-l}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$). Теперь в силу (1.4) $\nabla_x u = 0$ на Ω, т. е. $u = c$. При $c \neq 0$ интеграл $\int (1+r^2)^{\beta-l-1}|c|^2 dx$ расходится (так как $\beta \geqslant l$), что противоречит первому включению из (2.3). Следовательно, $u = c = 0$ и $\dim\ker \mathcal{A}^l_\beta = 0$.

Равенство $\dim\operatorname{coker}\mathcal{A}^l_\beta = 0$ при $\beta \leqslant l$ вытекает из (5.7), поскольку в этом случае $2l - \beta \geqslant l$, и $\ker \mathcal{A}^l_{2l-\beta} = \{0\}$ по доказанному. •

Вспоминая включения для ядра и коядра, упомянутые в начале разд. 4, видим, что функция $\mathbb{R} \ni \beta \mapsto \operatorname{Ind}\mathcal{A}^l_\beta \in \mathbb{Z}$ монотонно возрастает (ср. с (2.26)). Кроме того, согласно следствию 2.10 эта фукнция оказывается кусочно постоянной, непрерывной на $\mathbb{R} \setminus \mathrm{B}$ и претерпевает неустранимые разрывы первого рода в тех точках β, где $\mathcal{A}^l_\beta$ теряет фредгольмовость.

Пусть $n > 3$. По теореме 2.7 оператор $\mathcal{A}^l_\beta$ фредгольмов при всех β из интервала

$$\Upsilon_n = (l - [n-3]/2, l + [n-3]/2)$$

(отметим, что $\Upsilon_3 = \varnothing$). Ввиду предложения 5.1 $\operatorname{Ind}\mathcal{A}^l_l = 0$, а значит, $\operatorname{Ind}\mathcal{A}^l_\beta = 0$ для всякого $\beta \in \Upsilon_n$. По тому же предложению хотя бы одно из подпространств $\ker \mathcal{A}^l_\beta$ или $\operatorname{coker}\mathcal{A}^l_\beta$ тривиально. Итак, установлена

Теорема 5.2. *При $n > 3$ и $\beta \in \Upsilon_n$ оператор $\mathcal{A}^l_\beta$ — изоморфизм.*

Количество $d^\Delta_n(m)$ линейно независимых, однородных степени m, гармонических полиномов в $\mathbb{R}^{n-1}$ находится по формулам $d^\Delta_n(0) = 1$ и

$$d^\Delta_n(m) = (2m + n - 3)[m!(n-3)!]^{-1}(m+n-4)! \quad \text{при } m \geqslant 1$$

(см., например, [28], с. 236). В точности столько же линейно независимых решений вида $r^m \mathrm{U}(\varphi)$ у уравнения (3.4) (см. разд. 3 §3). Определим на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ функцию d_n равенствами

$$\begin{gathered} d_n(m) = d_n(3-n-m) = d_n^{\Delta}(m) \quad \text{при } m \geqslant 1; \\ d_3(0) = 2, \\ d_n(0) = d_n(3-n) = 1, \ d_n(-1) = \cdots = d_n(2-n) = 0 \quad \text{при } n > 3; \\ d_n(m) = d_n^{\Delta}(3-n-m) \quad \text{при } m \leqslant 2-n. \end{gathered}$$

При этом $d_n(p)$ — число линейно независимых решений уравнения (3.4) в форме $r^p \mathrm{U}(\varphi, \log r)$, где $l \mapsto \mathrm{U}(\cdot, l)$ — полином с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{S}^{n-2})$. Из упомянутых в разд. 3 §3 асимптотических результатов (теоремы 6 [8] и 3.6, 3.8 [9] с прежними оговорками) выводится следующая формула для приращения индекса.

Теорема 5.3. *Пусть весовые показатели β и γ не являются запрещенными, а в интервале $(l-\beta-[n-3]/2, l-\gamma-[n-3]/2)$ расположено только одно целое число p (т. е. $\gamma < \beta < \gamma + 1$). Тогда*

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A}_\beta^l - \operatorname{Ind} \mathcal{A}_\gamma^l = d_n(p). \tag{5.11}$$

Теперь все готово для вычисления размерностей ядра и коядра.

Следствие 5.4. 1). *Пусть $n > 3$, $m = 0, 1, \ldots$ и*

$$\beta \in (l - m - [n-1]/2, l - m - [n-3]/2).$$

Тогда $\dim \ker \mathcal{A}_\beta^l = \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_{2l-\beta}^l = d_n(0) + \cdots + d_n(m)$.

2). *Если $n = 3$, то при $\beta \in (l-1, l)$*

$$\ker \mathcal{A}_\beta^l = \{c\}, \qquad \operatorname{coker} \mathcal{A}_{2l-\beta}^l = \{(c, c|_{\partial\Omega})\} \tag{5.12}$$

(*подпространства состоят из постоянных функций*).

3). *Если $n = 3$ и $\beta \in (l-m-1, l-m)$, где m — целое положительное, то* $\dim \ker \mathcal{A}_\beta^l = \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_{2l-\beta}^l = 2m + 1$.

Доказательство. В силу теоремы 5.3 утверждение 1 вытекает из теоремы 5.2, а утверждение 3 — из равенства (5.12). Для того чтобы установить (5.12), достаточно обратить внимание на следующие факты. Во-первых, постоянная функция принадлежит $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ при $\beta < l$ и удовлетворяет однородной задаче (1.5), (1.6), т. е. $c \in \ker \mathcal{A}^l_\beta$. Во-вторых, при $l-1 < \beta < l$

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A}^l_{2l-\beta} = -\operatorname{Ind} \mathcal{A}^l_\beta, \qquad \operatorname{Ind} \mathcal{A}^l_{2l-\beta} = \operatorname{Ind} \mathcal{A}^l_\beta - d_3(0)$$

(следствия формул (5.7) и (5.11)), а значит, в силу предложения 5.1

$$\dim\ker \mathcal{A}^l_\beta = \operatorname{Ind} \mathcal{A}^l_\beta = d_3(0)/2 = 1. \quad \bullet$$

Замечание 5.5. 1) Равенства (5.12) расшифровываются так: всякое решение однородной задачи (1.5), (1.6) из класса $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ с $\beta \in (l-1, l)$ оказывается постоянной, а при $\gamma = 2l - \beta \in (l, l+1)$ условие существования решения $u \in \mathcal{D}^l_\gamma(\Omega)$ задачи (1.5), (1.6) с $(f, g) \in \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)$ принимает вид

$$(f, 1)_\Omega + (g, 1)_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.13}$$

2) В трехмерном случае оператор $\mathcal{A}^l_\beta$ ни при каких допустимых l и β не обладает нулевым индексом (при $n > 3$ в условиях теоремы 5.2 $\operatorname{Ind} \mathcal{A}^l_\beta = 0$). Такая странная потеря самосопряженности задачи (1.5), (1.6) восполняется при помощи видоизменения „ступеньки“ в распределении весовых множителей (подобно тому, как в аналогичной ситуации это было сделано в [30, 31] для областей с коническими точками; см. также §6.4 [4]). Так, можно проверить, что при $\beta \in (l, l+1)$ ядро фредгольмова оператора

$$\{v : v \in V^0_{\beta-l-2}(\Omega), \nabla_x v \in V^l_\beta(\Omega)\} \ni u$$
$$\to \widetilde{\mathcal{A}}^l_\beta u \equiv \{Lu, Nu\} \in \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega)$$

состоит из постоянных, а единственный дефектный функционал указан в (5.13) (т. е. $\operatorname{Ind} \widetilde{\mathcal{A}}^l_\beta = 1 - 1 = 0$).

6. Несамосопряженный оператор $\mathfrak{L}$. Просматривая еще раз приведенные доказательства, убеждаемся в том, что все, за исключением материала предыдущего раздела, легко переговаривается на случай несамосопряженной краевой задачи (2.25). Например, в интегральном тождестве (4.7) появляются новые интегралы

$$\int_\Omega T^2_\rho u \mathcal{L} u dx + \int_{\partial\Omega} T^2_\rho u \mathcal{N} u ds_x,$$

однако благодаря (2.19) их оценивание производится подобно интегралам I_5 и I_2. Единственное принципиальное отличие, которое, впрочем, несложно учесть, заключается в том, что при выполнении расщепления задачи в слое (см. разд. 2, §3) пробная функция v конструируется из членов ряда (3.6), отвечающего не самой задаче (2.25), а формально сопряженной с ней. Таким образом, в результирующем интегральном тождестве (3.31) и в соответствующем отображении (3.36) возникает оператор $\mathfrak{M}(y,\nabla_y)^*$, сопряженный с (3.37). Это ничуть не мешает выводу оценки (3.32), поскольку цитированная в разд. 3, §3 работа [1] (а также книга [4]) относится к общим краевым задачам. Замена M на $\mathfrak{M}(y,\nabla_y)^*$ сказывается лишь на форме условий фредгольмовости (2.18) и (3.35) — в них на месте $\mathbb{Z}\setminus(1,n-2)$ появляется новое счетное множество $\mathfrak{B}(\mathfrak{M}^*)$, содержащее показатели Λ однородности нетривиальных степенных решений $V(y)=r^{\Lambda}\mathrm{U}(\varphi)$ подобного (3.34) уравнения

$$\mathfrak{M}(y,\nabla_y)^*U(y)=0,\quad u\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus 0.$$

Отметим, что согласно предложениям 3.5.4, 3.5.5 и лемме 3.5.9 из [4]

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{M})=\{\Lambda\in\mathbb{R}:-\overline{\Lambda}+(n-3)/2\in\mathfrak{B}(\mathfrak{M}^*)\}\tag{5.14}$$

(черта означает комплексное сопряжение), а в самосопряженном случае множество $\mathfrak{B}(\mathrm{M})=\mathbb{Z}\setminus(3-n,0)$ инвариантно относительно преобразования $\Lambda\mapsto-\overline{\Lambda}+(n-3)/2$.

Сформулируем только основной результат.

Теорема 5.6. *Отображение*

$$\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\ni u\mapsto\{\mathfrak{L},\mathfrak{N}\}u\in\mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)\tag{5.15}$$

фредгольмово в том и только в том случае, если на прямой $\{\Lambda\in\mathbb{C}:\beta-l-1+\operatorname{Re}\Lambda+(n-1)/2=0\}$ нет точек из множества $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Если такие точки есть, то образ оператора (5.15) незамкнут.

Список литературы

[1] Кондратьев В. А., *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Тр. Моск. мат. о-ва **16** (1967), 209–292.

[2] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе*, Math. Nachr. **81** (1978), 25–82.

[3] Solonnikov V. A., *On the Stokes equations in domains with nonsmooth boundaries and on viscous incompressible flow with a free surface*, Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Collège de France Seminar, Vol. III (Paris, 1980/1981), Res. Notes Math., vol. 70, Pitman, Boston, MA-London, 1982, pp. 340–423.

[4] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991.

[5] Назаров С. А., *Метод Вишика-Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 1. Задача в конусе*, Сиб. мат. ж. **22** (1981), № 4, 142–163.

[6] Назаров С. А., *Метод Вишика-Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 3. Задача с вырождением в конической точке*, Сиб. мат. ж. **25** (1984), № 6, 106–115.

[7] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Асимптотика спектра задачи Неймана в сингулярно вырождающихся тонких областях*. 1, Алгебра и анализ **2** (1990), № 2, 85–111.

[8] Назаров С. А., *Асимптотика решения краевой задачи в тонком цилиндре с негладкой боковой поверхностью*, Изв. РАН. Сер. мат. **57** (1993), № 1, 202–239.

[9] Назаров С. А., *Асимптотика решения задачи Неймана в точке касания гладких компонент границы области*, Изв. РАН. Сер. мат. **58** (1994), № 1, 92–120.

[10] Пилецкас К. И., *О существовании решений уравнений Навье-Стокса, имеющих бесконечную диссипацию энергии, в одном классе областей с некомпактной границей*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **110** (1981), 180–202.

[11] Назаров С. А., *Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя*, Докл. АН АрмССР **87** (1988), № 4, 156–159.

[12] Nazarov S. A., *Asymptotics of the Stokes system solutions at a surfaces contact point*, C. R. Acad. Sci. Paris Śer. I Math. **312** (1991), 207–211.

[13] Назаров С. А., *О течении воды под лежачий камень*, Мат. сб. **186** (1995), № 11, 75–110.

[14] Назаров С. А., *Упругие емкость и поляризация дефекта в упругом слое*, Изв. АН СССР. Мех. тверд. тел. **1990**, № 5, 57–65.

[15] Назаров С. А., *Об эффекте трехмерности вблизи вершины трещины в тонкой пластине*, Прикл. мат. и мех. (Москва) **55** (1991), № 3, 500–510.

[16] Назаров С. А., *Проявление пространственной структуры поля напряжений в окрестности угловой точки тонкой пластины*, Прикл. мат. и мех. (Москва) **55** (1991), № 4, 653–661.

[17] Nazarov S. A., *Three-dimensional effects at plate crack tips*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre **314** (1992), 995–1000.

[18] Назаров С. А., Полякова О. Р., *Асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи пространственной особенности границы типа звершины клюва«*, Прикл. мат. и мех. (Москва) **57** (1993), № 5, 127–142.

[19] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

[20] Назаров С. А., *Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением*, Тр. Моск. мат. о-ва **53** (1990), 98–129.

[21] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Самосопряженные эллиптические задачи с условиями излучения на ребрах границы*, Алгебра и анализ **4** (1992), № 3, 196–225.

[22] Назаров С. А., *Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. астроном. **1982**, вып. 2, 65–68.

[23] Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В., *Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. **26** (1986), № 7, 1032–1048.

[24] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), no. 4, 623–727.

[25] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

[26] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г., *Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения*, Мат. сб. **78** (1969), № 3, 446–472.

[27] Назаров С. А., *Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых разложений*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **5** (1996).

[28] Михлин С. Г., *Линейные уравнения в частных производных*, Высш. школа, М., 1977.

[29] Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области*, Уравнения в частных производных. Спектральная теория, Пробл. мат. анал., т. 8, ЛГУ, Л., 1981, сс. 72–153.

[30] Назаров С. А., *Оценки вблизи ребра решения задачи Неймана для эллиптической системы*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1 **1988**, вып. 1, 37–42.

[31] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей*, Тр. Ленингр. мат. о-ва **1** (1990), 174–211.

Государственная Морская Академия
им. адм. С. О. Макарова
Кафедра высшей математики
199026, Санкт-Петербург
В.О., Косая линия, 15А

Поступило 11 марта 1996 г.

Институт математики и кибернетики
АН Литвы
Вильнюс
E-mail: pileckas@ktl.mii.lt