A. N. Tikhomirov, On the rate of convergence in the CLT for sequences of weakly dependent Hilbert valued random variables, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1992, Volume 194, 174–175

А.Н.Тихомиров

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ ГИЛЬБЕРТОВОЗНАЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - последовательность случайных величин, принимающих значения в гильбертовом пространстве H, имеющих нулевые средние, $\mathbf{E}X_j = 0$, и ковариационные операторы $A_j = \operatorname{cov}(X_j)$. Будем считать, что последовательность $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания с коэффициентом $\varphi(m)$. Положим

$$S_n = \sum_1^n X_j, \quad B_n = \operatorname{cov}(S_n), \quad Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}\, Sp\, B_n}$$

(здесь $Sp\, A$ означает след оператора A). Основной результат настоящей заметки представляет следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbf{E}\|X_j\|^3 \leq L < \infty$ и существуют постоянные $K, \beta > 0$, такие, что для всех $m \geq 1$ $\varphi(m) \leq K \exp(-\beta m)$. Кроме того выполнены следующие условия:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(A_1 + \ldots + A_n) = A \quad \text{и} \quad \varphi(1) < 1 .$$

Тогда найдется постоянная c, зависящая от первых собственных чисел оператора A, такая, что справедливо неравенство

$$\sup_r \left| \mathbf{P}\{\|Z_n + a\| < r\} - \mathbf{P}\{\|Y_n + a\| < r\} \right| \leq$$

$$\leq c L n^{-1/2} \lg^3 n\, (1 + \|a\|)^3 ,$$

где Y_n - гауссовский вектор с ковариационным оператором, таким же, как у Z_n, и нулевым средним.

Доказательство теоремы в основном опирается на технику, описанную автором в работе [I]. Однако, в отличие от упомянутой работы мы не используем координатное представление нормы, а используем устойчивость приводимой ниже характеризации гауссовского распределения в H.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть ξ - случайный вектор в H с $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\operatorname{cov}(\xi) = B$. Вектор ξ имеет гауссовское распределение тогда и только тогда, когда для любых линейных ограниченных операторов A и C, действующих на H, и любого вектора $a \in H$

имеют место равенства

$$\mathbf{E}\langle A(\xi+a),\xi+a\rangle e^{it\langle C(\xi+a),\xi+a\rangle} = Sp(BA)\,\mathbf{E}e^{it\langle C(\xi+a),\xi+a\rangle} +$$

$$+2it\,\mathbf{E}\langle CBA(\xi+a),\xi+a\rangle e^{it\langle C(\xi+a),\xi+a\rangle} +$$

$$+2it\,\mathbf{E}\langle CBAa,\xi+a\rangle e^{it\langle C(\xi+a),\xi+a\rangle} + \qquad (I)$$

$$+\langle Aa,a\rangle\,\mathbf{E}e^{it\langle C(\xi+a),\xi+a\rangle}$$

и

$$\mathbf{E}\langle Aa,\xi+a\rangle e^{it\langle C(\xi+a),\xi+a\rangle} +$$

$$+2it\,\mathbf{E}\langle CBAa,\xi+a\rangle e^{it\langle C(\xi+a),\xi+a\rangle} + \qquad (2)$$

$$+\langle Aa,a\rangle\,\mathbf{E}e^{it\langle C(\xi+a),\xi+a\rangle}.$$

Используя равенства (I) и (2), нетрудно получить, например, известные уравнения для характеристической функции $f(t) = \mathbf{E}exp(it\|\xi+a\|^2)$:

$$f'(t) = i\,Sp(B(I-2itB)^{-1})f(t) + \langle a,(I-2itB)^{-2}a\rangle f(t),$$

полагая в равенствах (I) и (2) последовательно $A=B^k$, $C=I$ (единичный оператор), $k=0,1,2,\ldots$. Применяя равенства (I), (2), можно исследовать также вероятности попадания в эллипс. Подробные доказательства будут опубликованы позднее.

Литература

1. T i k h o m i r o v A.N. On the normal approximation of sums of weakly dependent Hilbert-valued random variables. - In: Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings of the Fifth Vlinius Conference. Vilnius: Mokslas-Utrecht: VSP, 1990, v.2, p.482-495.