Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ник. Тюрин, Голоморфность и полуголоморфность, *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2001, том 70, 236–254

https://www.mathnet.ru/into110

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
16 января 2026 г., 11:55:47

УДК 515.162.4; 512.774

ГОЛОМОРФНОСТЬ И ПОЛУГОЛОМОРФНОСТЬ

Ник. Тюрин

СОДЕРЖАНИЕ

§ 0. Введение 236
§ 1. Комплексный оператор Ходжа 241
§ 2. Пространство $\overline{\partial}$-операторов 242
§ 3. Два уравнения $SU(4)$-инстантона. Выбор фазы 248
§ 4. Лагранжиан 250
Заключение 253

Литература 254

§ 0. Введение

Одним из важных математических понятий является понятие связности. Важность этого понятия конкретно для алгебраической геометрии четко прослеживается в теории С. Дональдсона — автодуальных связностей или инстантонов. Классическая теорема Дональдсона утверждает эквивалентность понятия автодуальной связности для келеровой метрики над алгебраической поверхностью и стабильного относительно класса келеровой метрики голоморфного расслоения того же топологического типа. Наглядность такого примера позволяет надеяться на то, что и во многих других алгебро-геометрических задачах привлечение нового объекта — пространства связностей — будет оправдано и приведет к давно ожидаемым результатам.

Настоящая работа может рассматриваться именно как небольшой пример такого рода связи в высших размерностях над комплексными многообразиями специального типа.

В декабре 1996 в серии докладов на конференции «Калибровочные теории» в Кембридже С. Дональдсон предложил программу комплексификации «классической» калибровочной теории в размерностях 2, 3 и 4. Под его руководством над этой программой работает группа математиков из Оксфорда (Р. Томас, К. Льюис и др.), и предварительное описание основных конструкций приведено в препринте С. Дональдсона и Р. Томаса «Калибровочная теория в высших размерностях».

Фрагментом этой программы является обобщение теории антиавтодуальных связностей на четырехмерных римановых многообразиях.

Анализ предложенной конструкции привел нас к наблюдению о возможности приложения ее к доказательству гипотезы Ходжа для четырехмерных многообразий Калаби—Яу, например, для произведения поверхностей типа $K3$.

В данной работе представлены некоторые предварительные результаты о полуголоморфных структурах на комплексных расслоениях над четырехмерными многообразиями Калаби—Яу, и выявлена их связь с привычными голоморфными структурами.

Необходимо заметить, что ставшее традиционным именование алгебраических многообразий с тривиальным каноническим классом многообразиями Калаби—Яу может привести к недоразумениям. Например, в нижеизложенных конструкциях не используются Риччи-плоские метрики на таких многообразиях, а используется только комплексная ориентация, т.е. тривиализация канонического расслоения. Мы не в силах сломать прочно сложившуюся традицию, привнесенную физиками, упорно именующих многообразия с тривиальным каноническим классом многообразиями Калаби—Яу.

Во многих аспектах новая теория действительно является «комплексификацией» классической. Особенно четко это видно на уровне лагранжианов, что мы естественно выделяем отдельным параграфом. Наглядность лагранжева подхода в аналитических задачах (воспринятая из физических установок теории Янга—Миллса) действительно проясняет ситуацию и приводит к интересным результатам без особых трудов. Этот метод использовался и в классической теории Дональдсона, с краткого напоминания основных конструкций которой мы и начнем.

Рассмотрим гладкое, ориентируемое, компактное четырехмерное многообразие X. Выбор римановой метрики g и ориентации определяет вещественный оператор Ходжа

$$*_g : \Omega^i \to \Omega^{4-i},$$

отображающий i-формы на X в $(4-i)$-формы, так что для лю-

бой пары форм α, β

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta) \cdot d\mu, \tag{0.1}$$

где $d\mu$ — элемент объема. Легко видеть, что этот оператор действует как инволюция на пространстве сечений Ω^2 и не зависит от выбора элемента объема, т.е. определяется конформной структурой, задаваемой метрикой g, и выбором ориентации.

Оператор Ходжа $*_g$ коммутирует с внешним дифференцированием и оператором Лапласа, так что его действие корректно определено на классах когомологий многообразия X. Форма ω называется (анти)автодуальной, если

$$*_g\omega = (\pm)\omega. \tag{0.2}$$

Таким образом, все пространство 2-форм разлагается в прямую сумму собственных подпространств оператора Ходжа

$$\Omega^2 = \Omega_+ \oplus \Omega_-. \tag{0.3}$$

Напомним, что 2-форма ω совпадает с формой кривизны некоторой связности на линейном расслоении L, если она замкнута (тождество Бианки) и представляет после умножения на стандартную константу $(\frac{i}{2\pi})$ целочисленный класс когомологий $(c_1(L))$. Поэтому, если мы обозначим символом

$$\mathcal{M}_{\mathrm{asd}}(L) \tag{0.4}$$

многообразие антиавтодуальных связностей на линейном расслоении L, виртуальная размерность

$$\mathrm{v.dim}\, \mathcal{M}_{\mathrm{asd}}(L) = -b_2^+(X) \tag{0.5}$$

не зависит от топологического типа расслоения L.

Немного усложняя задачу, рассмотрим $\mathbb{C}^r$-расслоение E на X с фиксированной эрмитовой формой h и калибровочную группу унитарных автоморфизмов $\mathcal{G}_h$ этого расслоения. Пусть $\mathcal{A}(E_h)$ — пространство эрмитовых связностей на расслоении E. Тогда пространство орбит

$$\mathcal{B}(E_h) = \mathcal{A}_h(E)/\mathcal{G}_h \tag{0.6}$$

наделено структурой банахова орбифолда с множеством простейших особых точек, соответствующих приводимым связностям.

Разложение (0.2) продолжается до разложения пространства форм со значениями в пространстве сечений расслоения $\mathrm{End}\, E$

$$\Omega^2(\mathrm{End}\, E) = \Omega^+(\mathrm{End}\, E) \oplus \Omega^-(\mathrm{End}\, E), \tag{0.3'}$$

однако в этом случае калибровочная группа $\mathcal{G}_h$ нетривиально действует на пространстве $\Omega^2(\mathrm{End}\, E)$, сохраняя разложение (0.3′).

Иначе говоря, имеется нетривиальное расслоение над пространством орбит (0.6)

$$\overline{\Omega^2(\operatorname{End} E)} = (\mathcal{A}_h(E) \times \Omega^2(\operatorname{End} E))/\mathcal{G}_h \tag{0.7}$$

со слоем $\Omega^2(\operatorname{End} E)$. Это расслоение имеет выделенное сечение, т.е. $\mathcal{G}_h$-эквивариантное отображение

$$s_F : \mathcal{A}_h(E) \to \Omega^2(\operatorname{End} E), \tag{0.8}$$

сопоставляющее связности $a \in \mathcal{A}_h(E)$ ее тензор кривизны F_a.

Множество нулей этого сечения (= орбиты плоских связностей = классы представлений фундаментальной группы X) пусто, если расслоение E топологически тривиально.

Разложение (0.3′) эквивариантно относительно действия $\mathcal{G}_h$ и, следовательно, определяет разложения расслоения (0.7)

$$\overline{\Omega^2(\operatorname{End} E)} = \overline{\Omega^2(\operatorname{End} E)_+} \oplus \overline{\Omega^2(\operatorname{End} E)_-} \tag{0.9}$$

и сечения (0.8)

$$\begin{aligned} s_F &= s_F^+ + s_F^-, \\ s_F^+ &: \mathcal{A}_h(E) \to \Omega^2(\operatorname{End} E)_+, \\ s_F^- &: \mathcal{A}_h(E) \to \Omega^2(\operatorname{End} E)_-. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Множества нулей компонент последнего разложения почти всегда нетривиальны и называются многообразиями модулей

$$(s_F^+)_0 = \mathcal{M}_{\mathrm{asd}} \tag{0.11}$$

инстантонов или антиавтодуальных связностей топологического типа E или

$$(s_F^-)_0 = \mathcal{M}_{\mathrm{sd}} \tag{0.12}$$

антиинстантонов или автодуальных связностей топологического типа E.

Эти подмножества бесконечномерного пространства орбит конечномерны, гладки в случае $b_+^2 > 0$ или имеют простейшие особенности, если $b_+^2 = 0$.

Топология расслоения E отражается в свойствах тензора кривизны и определяет простейшие запреты на непустоту этих многообразий: напомним, что в алгебре Ли $u(r)$ косоэрмитовых матриц

$$\operatorname{tr}(\xi^2) = -|\xi|^2;$$

поэтому

$$\operatorname{tr} F_a^2 = -(|F_a^+|^2 - |F_a^-|^2)d\mu, \tag{0.13}$$

где $d\mu$ — элемент объема римановой метрики. С другой стороны, класс когомологий формы

$$\left[\frac{1}{8}\pi^2 \operatorname{tr} F_a^2\right] = c_2(E) - \frac{1}{2}c_1(E)^2, \tag{0.14}$$

где c_i — классы Черна расслоения E. Таким образом, если a — антиавтодуальная связность $F_a^+ = 0$, то

$$F_a^- \neq 0 \implies c_2(E) - \frac{1}{2}c_1(E)^2 > 0,$$

и дополнительное предположение о классах Черна влечет

$$c_2(E) - \frac{1}{2}c_1(E)^2 = 0 \implies F_a^- = 0, \tag{0.15}$$

т.е. это возможно, только если a — плоская связность, что в свою очередь возможно, только если E топологически тривиально.

Таким образом, существование инстантонов накладывает условия на топологию расслоения, и, в частности, если расслоение E топологически не тривиально, но $c_2(E) - 1/2c_1(E)^2 = 0$, не существует инстантонов или антиинстантонов данного топологического типа.

Для общей римановой метрики $\mathcal{M}_{\mathrm{asd}}$ — гладкое вещественное многообразие размерности

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}_{\mathrm{asd}} = 8 \cdot c_2(E) - 4 \cdot c_1(E)^2 - \\ - (r^2 - r + 1)(1 - b_1 + b_2^+),\end{aligned} \tag{0.16}$$

но априорная неотрицательность этого числа не влечет существования инстантонов данного топологического типа.

Во всех предыдущих формулах встречается агрегат

$$8\pi^2\left(c_2(E) - \frac{1}{2}c_1(E)^2\right) = k(E) \in H^4(X, \mathbb{R});$$

мы будем его использовать и в дальнейшем.

Замечание. Смена ориентации переставляет местами и понятия анти и автодуальности, и многообразия $\mathcal{M}_{\mathrm{asd}}$ и $\mathcal{M}_{\mathrm{sd}}$, но a priori эти последние не только не диффеоморфны, но и разной размерности, если $b_2^+ \neq b_2^-$.

Кольцо когомологий $\mathcal{M}_{\mathrm{asd}}$ порождается поднятыми с X классами точки, фундаментальным и всеми средними $\gamma_i = \mu([\Sigma_i])$, $i = 1, \dots, b_2$. Если размерность многообразия модулей четна, то возможно определить полиномиальные выражения

$$P(\gamma_i) = \gamma^d \cdot [\mathcal{M}_{\mathrm{asd}}], \tag{0.17}$$

из которых получаются наборы численных инвариантов подстановкой определенных выше μ-классов. Определение некорректно, если не задать компактификацию (Фрид—Уленбек) или не представить выбор представителей классов так, чтобы они не «задевали» замыкания (Дональдсон). Как бы то ни было, конструкция дает полиномиальные инварианты гладких структур на четырехмерных многообразиях.

Подробно с теорией Дональдсона можно познакомиться в [2].

§ 1. Комплексный оператор Ходжа

В качестве базовых многообразий для обобщения вещественной теории на случай комплексной размерности 4 необходимо выбрать комплексно ориентируемые многообразия. Комплексно аналитическая ориентация — это выбор тривиализации канонического линейного расслоения.

Таким образом, нас будет интересовать комплексно ориентируемое многообразие, и фиксация старшей голоморфной формы θ и будет задавать ориентацию.

Пусть X — такое многообразие. Выбор любой келеровой метрики превращает его в многообразие со структурной группой $SU(4)$.

Выбор метрики, определяющей норму на пространствах форм, и старшей голоморфной формы без нулей $\theta \in \Omega^{4,0}$ определяет комплексный оператор Ходжа $*_{\mathbb{C}} : \Omega^{0,2} \to \Omega^{0,2}$, обладающий следующим свойством:

$$\alpha \wedge *_{\mathbb{C}}\alpha = |\alpha|^2 \cdot \overline{\theta} \tag{1.1}$$

для любой формы $\alpha \in \Omega^{0,2}$. Требование невырожденности и эрмитовости позволяет единственным образом восстановить по квадратичной форме билинейную, и, как и в вещественном случае, оператор $*_{\mathbb{C}}$ задаст разложение

$$\Omega^{0,2} = \Omega^{0,2}_{+} \oplus \Omega^{0,2}_{-}, \tag{1.2}$$

причем

$$\alpha \in \Omega^{0,2}_{\pm} \equiv \alpha \wedge \alpha = \pm|\alpha|^2 \cdot \overline{\theta}. \tag{1.2'}$$

В отличие от вещественного случая, когда разложение на автодуальные и антиавтодуальные формы было ортогонально относительно внешнего произведения, на сей раз мы имеем только вещественную ортогональность, т.е. для пары $\alpha^{\pm} \in \Omega^{0,2}_{\pm}$ внешнее произведение $\alpha^{+} \wedge \alpha^{-}$ a priori нулю не равно. Из локальных вычислений следует простая

Лемма 1. *Пусть, как выше,* $\alpha^{\pm} \in \Omega^{0,2}_{\pm}$ *и* $\alpha^{+} \wedge \alpha^{-} = Z(\alpha)\overline{\theta}$, *где* $Z(\alpha)$ *— комплексная функция. Тогда* $\operatorname{Re} Z(\alpha) = 0$.

Обратимся теперь к взаимосвязи метрики и формы θ.

Требование невырожденности влечет равенство нормы $|\theta|^2$ по метрике в каждой точке 1. Поэтому

$$\theta \wedge \overline{\theta} = d\mu, \tag{1.3}$$

где последняя форма — элемент объема.

Вещественная и мнимая части формы θ

$$\operatorname{Re}\theta = \frac{1}{2}(\theta + \overline{\theta}), \qquad \operatorname{Im}\theta = \frac{1}{2i}(\theta - \overline{\theta}) \tag{1.4}$$

— пара гармонических форм, представляющих классы $c, \overline{c} \in \in H^4(X, \mathbb{R})$ соответственно, причем эти классы взаимно ортогональны, а гармонические формы автодуальны в обычном смысле относительно выбранной нами метрики.

Заметим, что форма θ определена с точностью до множителя $\lambda \in \mathbb{C}^*$, но на разложение (1.2) модуль этого числа не влияет, а влияет только множитель $e^{i\tau}$, $\tau = \text{const}$, который мы будем называть фазой. При смене фазы классы c и $\overline{c}$ переходят в линейные комбинации исходных, что соответствует повороту на угол τ. Как мы увидим ниже, выбор фазы играет существенную роль в существовании полуголоморфных связностей.

Далее, форма кривизны F_a связности a на комплексном многообразии разлагается на (p, q)-компоненты

$$F_a = F_a^{2,0} + F_a^{1,1} + F_a^{0,2} \tag{1.5}$$

и последняя компонента принадлежит как раз $\Omega^{0,2}$.

Унитарная связность a определяет голоморфную структуру на L, если компонента $F_a^{0,2} = 0$. Но теперь на формах типа $(0,2)$ определен оператор $*_{\mathbb{C}}$ и $(0,2)$ компонента кривизны раскладывается в сумму

$$F_a^{0,2} = (F_a^{0,2})_+ \oplus (F_a^{0,2})_-.$$

Поэтому естественно рассматривать те связности, у которых зануляется не вся $(0,2)$-компонента, а только «половина» ее, скажем, $(F_a^{0,2})_+$.

§ 2. Пространство $\overline{\partial}$-операторов

Снова рассмотрим на X комплексное r-расслоение $E \to X$ и калибровочную группу $\mathcal{G} = \operatorname{Aut} E$ всех автоморфизмов этого расслоения.

Вместо пространства всех связностей $\mathcal{A}(E)$ на расслоении E рассмотрим пространство «полусвязностей», т.е. пространство

$\overline{D}(E)$ всех $\overline{\partial}$-операторов. А именно, назовем $\overline{\partial}$ дифференциальный оператор, действующий на пространстве сечений расслоения

$$\overline{\partial} : \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(E) \tag{2.1}$$

и удовлетворяющий правилу Лейбница: для любой функции f и сечения $s \in \Gamma(E)$

$$\overline{\partial}(f \cdot s) = f\overline{\partial}s + \overline{\partial}f \otimes s. \tag{2.2}$$

Действие такого оператора естественно продолжается на пространства

$$\Omega^{0,i}(E), \quad \Omega^{0,i}(\operatorname{End} E)$$

(опять же по правилу Лейбница).

Очевидно, как и пространство связностей, пространство $\overline{D}(E)$ $\overline{\partial}$-операторов есть аффинное пространство над векторным $\Omega^{0,1}(\operatorname{End} E)$. Квадрат

$$\overline{\partial} \cdot \overline{\partial} \in \Omega^{0,2}(\operatorname{End} E) \tag{2.3}$$

будет уже оператором алгебраическим, просто тензором из $\Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)$, который мы будем также называть кривизной $\overline{\partial}$-оператора.

Естественное действие комплексных калибровок на пространство $\overline{D}(E)$ конечно определяет пространство орбит

$$\mathcal{B}(E) = \overline{D}(E)/\mathcal{G}, \tag{2.4}$$

но это множество никакой приличной структурой не обладает. Из привычных математических объектов это множество больше всего напоминает множество листов слоения.

Сколько-нибудь продуктивно его можно использовать в окрестности «хорошего» трансверсального сечения. Это сечение выбирается в виде «нулевого уровня моментов», чтобы воспользоваться соображениями симплектической редукции, которая сводит факторизацию по комплексной группе к факторизации по ее компактной форме (в нашем случае — по $\mathcal{G}_h$, см. (0.6)). Поэтому чуть позже мы опишем хорошо известную связь между полусвязностями и эрмитовыми (унитарными) связностями.

Тем не менее, рассмотрим расслоение на $\mathcal{B}(E)$ со слоем — пространство (0,2)-форм с коэффициентами в раслоении $\operatorname{End} E$

$$\overline{\Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)} = (\overline{D}(E) \times \Omega^{0,2}(\operatorname{End} E))/\mathcal{G} \tag{2.5}$$

со слоем $\Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)$. Это расслоение тоже имеет сечение, т.е. $\mathcal{G}$-эквивариантное отображение

$$s_{(0,2)} : \overline{D}(E) \to \Omega^{0,2}(\operatorname{End} E), \tag{2.6}$$

31*—8453

сопоставляющее полусвязности $\overline{\partial} \in \overline{D}(E)$ ее тензор кривизны (см. (2.3)).

Множество нулей этого сечения совпадает с множеством голоморфных расслоений топологического типа E, так как равенство $\overline{\partial} \cdot \overline{\partial} = 0$ эквивалентно интегрируемости почти комплексной структуры, заданной $\overline{\partial}$. Отсюда мы видим, что наше сечение нисколько не трансверсально: его нули содержат все, в том числе и нестабильные расслоения, составляющие компоненты растущих до бесконечности размерностей.

Разложение (1.2) продолжается на пространство $\Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)$:

$$\Omega^{0,2}(\operatorname{End} E) = \Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)_+ \oplus \Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)_- \tag{2.7}$$

и определяет прямое разложение векторного расслоения (2.5)

$$\overline{\Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)} = \overline{\Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)_+} \oplus \overline{\Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)_-}, \tag{2.8}$$

которое и лежит в основе новой конструкции С. Дональдсона. Мы подробно опишем его в следующем параграфе, а сейчас, чтобы сделать эти конструкции математически содержательными, вернемся к связи между полусвязностями и эрмитовыми связностями.

Пусть имеется $\overline{\partial}$ — некоторый оператор Коши—Римана. Для восстановления по нему эрмитовой связности a достаточно для каждого сечения $s \in \Gamma(E)$ восстановить первое слагаемое в разложении

$$d_a s = \partial_a s + \overline{\partial}_a s. \tag{2.9}$$

Второе слагаемое — элемент из $\Omega^{0,1}(E) = \Omega^{0,1} \otimes \Gamma(E)$. На первом сомножителе действует обычная вещественная структура, поэтому нам достаточно задать сопряжение на втором. Наличие эрмитовой структуры дает отождествление $h : \Gamma(E) \to \overline{(\Gamma(E)^*}$, поэтому введение эрмитовой метрики на расслоении определяет необходимый изоморфизм.

Все получаемые таким образом связности совместимы с выбираемой метрикой h. Отсюда видно, что пространство операторов Коши—Римана на самом деле изоморфно пространству $U(r)$-связностей на E:

$$\overline{D}(E) = \mathcal{A}_h(E). \tag{2.10}$$

При этом отождествлении унитарная калибровочная группа $\mathcal{G}_h$ — компактная форма комплексной группы $\mathcal{G}$, т.е. если мы рассмотрим проекцию

$$\mathcal{A}(E) \to \overline{D}(E) \tag{2.11}$$

пространства связностей $\mathcal{A}(E)$ на E, сопоставляющую ковариантной производной связности ее $\bar{\partial}$-компоненту, то подпространство эрмитовых связностей $\mathcal{A}_h(E) \subset \mathcal{A}(E)$ является сечением этой проекции. Однако оно не эквивариантно относительно действия комплексной калибровочной группы, а эквивариантно только относительно компактной подгруппы $\mathcal{G}_h$. Чтобы сравнить соответствующие факторы, мы должны наложить условия на эрмитовы связности, играющие роль нулевого уровня отображения моментов. В качестве иного пути сравнения можно предложить введение новой калибровочной эквивалентности, в основе которой лежит стремление окомплексить группу $\mathcal{G}_h$.

Напомним, что две связности $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_h(E)$ являются $\mathcal{G}_h$-эквивалентными, если существует унитарное преобразование, сопрягающее одну связность во вторую. Иными словами, калибровочная эквивалентность предполагает существование унитарного преобразования s такого, что

$$d_{a_1} - d_{a_2} = d_{a_1} s \in \Omega^1(\operatorname{End} E), \tag{2.12}$$

и это соотношение симметрично. Переход к полной группе $\mathcal{G}$ происходит снятием ограничения на унитарность s. Вместо этой натуральной комплексификации можно предложить следующее.

На кокасательном расслоении Ω^1_X над комплексным многообразием X имеется два действия группы $\mathbb{C}^*$ (во избежание недоразумений, $\Omega^1 = T^*_{\mathbb{C}}X = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{1,0}$ — прямая сумма пространств голоморфных и антиголоморфных форм).

Первое — просто умножение на $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}^*$. Иное действие можно определить как перестановочное с вещественной структурой (очевидно, что первое не сохраняет вещественность формы).

На пространстве Ω^1 имеется вещественный оператор I — комплексная структура, поднятая с помощью метрики с касательного расслоения. Если форма $\omega \in T^*X$ вещественна, то и $I(\omega) \in T^*X$ будет такой.

Определим действие $\alpha + i\beta$ на ω как

$$(\alpha + i\beta)(\omega) = \alpha\omega - \beta I(\omega). \tag{2.13}$$

Очевидно, такое определение дает

$$\begin{aligned} [(\alpha + i\beta)(\omega)]^{1,0} &= (\alpha - i\beta)\omega^{1,0}, \\ [(\alpha + i\beta)(\omega)]^{0,1} &= (\alpha + i\beta)\omega^{0,1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

(Безусловно, в правой части формулы (2.13) можно вместо минуса поставить плюс, тогда в правых частях последних формул знаки также поменяются местами.)

Назовем эти действия C^* естественным и вещественным соответственно.

Замечание. Эта пара задает явное действие группы $SU(2)$ на касательном и кокасательном расслоениях над комплексным (или почти комплексным) многообразием. Кроме того, в случае гиперкелеровом, каждая из тройки комплексных структур I, J, K задает свое вещественное действие C^*, и на четверку натягивается действие группы $SU(4)$.

Вернемся к вопросу о калибровочной эквивалентности связностей.

Назовем две связности $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$-полуэквивалентными, если их разность имеет вид

$$a_1 - a_2 = (\alpha + i\beta)_{\mathbb{R}}(d_{a_1} s) = \alpha d_{a_1} s - \beta I(d_{a_1} s), \tag{2.15}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а s — унитарный эндоморфизм. Очевидно, введенное нами отношение не будет транзитивным, поэтому, строго говоря, это не эквиваленция.

Из второй формулы (2.14) видно, что на пространстве $\overline{\partial}$-операторов соотношения $\mathcal{G}$-экивалентности и $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$-полуэквивалентности в точности совпадают, поэтому можно говорить об изоморфности факторов

$$\mathcal{A}_h / \mathcal{G}_h^{\mathbb{C}} \cong \overline{D} / \mathcal{G}, \tag{2.16}$$

если только удастся правильно определить первый из них.

Определение возможно в следующем простейшем модельном примере, раскрывающем мотивы введения такой полуэквиваленции.

Пример. Рассмотрим на комплексном многообразии X тривиальное линейное расслоение L с естественной эрмитовой структурой на нем. Тогда пространство $\mathcal{A}_h = \{d_a = d + i\omega_a, \omega_a \in \Gamma(T^*X)\}$ и две связности $\mathcal{G}_h$-эквивалентны, если только их разность имеет вид

$$a_0 - a_1 = i\, df,$$

где f — вещественная функция на X.

Рассмотрим подпространство $\mathcal{A}^{1,1} \subset \mathcal{A}_h$-связностей, задающих голоморфную структуру на L, т.е. таких $a \in \mathcal{A}_h$, что $F_a^{0,2} = 0$.

Очевидно, что это подпространство устроено следующим образом:

$$a \in \mathcal{A}^{1,1} \equiv d_a = d + i(df + I(dg)), \tag{2.17}$$

где I как раз и есть оператор комплексной структуры.

Таким образом, если мы хотим получить конечное фактор-пространство голоморфных структур на L, необходимо ввести новое отношение на $\mathcal{A}^{1,1}$, а именно — отношение $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$-полуэквивалентности. Результатом факторизации, проводимой в два шага — сначала обычным образом по действию $\mathcal{G}_h$, потом

по «чисто мнимому» действию $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$ (т.е. по отношению $a_1 \equiv a_2$, если $a_1 - a_2 = i(I(dg))$) — будет единственная точка.

Завершая рассмотрение этого простого примера, найдем «объемлющее пространство» найденной точки — фактор $\mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$.

Отождествив $\mathcal{A}_h \equiv \Omega^{0,1}$, действием $\mathcal{G}$ получаем

$$\Omega^{0,1}/\operatorname{Im}\overline{\partial}.$$

В результате нам хватило отношения полуэквивалентности только на факторизацию пространства решений уравнения $F_a^{0,2} = 0$, при этом из всего пространства связностей ничего хорошего не вышло.

Введенное выше отношение $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$- эквивалентности не отвечает какому-либо действию на E: окомплексив алгебру Ли, невозможно окомплексить группу.

Далее, фиксация комплексной ориентации позволяет определить «период» любого целочисленного класса четырехмерных когомологий таким же образом, что и на эллиптической кривой или $K3$-поверхности. Если $\sigma \in H^4(X, \mathbb{Z})$ — целочисленный класс, то периодом естественно назвать $\int\limits_{\sigma^*} \theta = \int\limits_X \sigma \wedge \theta$, где $\sigma^* \in H_4(X, \mathbb{Z})$ — двойственный по Пуанкаре класс.

Возвращаясь к эквивалентности (2.10)–(2.11), воспользуемся аппаратом Черна—Вейля, связывающим однородные полиномы от кривизн связностей с характеристическими классами расслоений.

Введение эрмитовой метрики на E позволяет во всех рассмотрениях заменить операторы Коши—Римана на «полные» эрмитовы связности. Квадрат $\overline{\partial}_a \cdot \overline{\partial}_a$ представится просто как $F_a^{0,2}$ — антиголоморфная часть формы кривизны эрмитовой связности.

Тогда выражение $-\dfrac{1}{4\pi^2}\operatorname{Tr}(F_a^{0,2} \wedge F_a^{0,2})$ представляет класс комплексных когомологий $[c_1^2(E) - 2c_2(E)]|_{H^{0,4}} = \mathrm{const} \cdot \overline{\theta}$. Это дает нам первую константу, а другим численным инвариантом можно считать квадрат

$$[c_1^2(E) - 2c_2(E)]^{4,0} \cdot [c_1^2(E) - 2c_2(E)]^{0,4} =$$
$$\frac{1}{2}(c_1^2(E) - 2c_2(E))^2 - [(c_1^2(E) - 2c_2(E))^{2,2}]^2.$$

Теперь мы можем переходить к исследованию разложения $*_{\mathbb{C}}$.

§ 3. Два уравнения $SU(4)$-инстантона. Выбор фазы

Построенный выше оператор $*_{\mathbb{C}}$, как уже указывалось, определяет разложение (2.7) $\Omega^{0,2}(E)$ на собственые подпространства $\Omega^{0,2}(E)_{\pm}$.

Тогда на $\overline{D}(E)$ рассмотрим следующее уравнение:

$$\overline{\partial} \cdot \overline{\partial}|_{\Omega^{0,2}(E)_+} = 0$$

или, если мы отождествили $\overline{\partial}$-оператор с эрмитовой связностью,

$$(F_a^{0,2})_+ = 0. \qquad (*)$$

Последнее является непосредственным обобщением уравнения антиавтодуальности в вещественной теории и называется *уравнением $SU(4)$-инстантона относительно комплексной ориентации θ*. Так же, как и в классической теории Дональдсона, оно калибровочно инвариантно (но только относительно комплексифицированной группы). Так же, как и в классической теории, линеаризация этого уравнения на орбитах калибровочной группы представляется некоторым эллиптическим комплексом.

Действительно, из определения калибровочной эквивалентности операторов Коши—Римана следует, что срез $\overline{D(E)}$ вблизи орбиты $\overline{\partial}_a$ изображается решениями уравнения кулоновской калибровки

$$\overline{\partial}_a^*(\delta a) = 0, \qquad (3.1)$$

где сопряженность должна браться по любой заданной метрике.

Тогда комплекс

$$\Omega^{0,0}(\operatorname{End} E) \xrightarrow{\overline{\partial}_a} \Omega^{0,1}(\operatorname{End} E) \xrightarrow{\overline{\partial}_a^+} \Omega^{0,2}(\operatorname{End} E)_+ \xrightarrow{\overline{\partial}_a} \Omega^{0,3}(\operatorname{End} E) \qquad (3.2)$$

точен во втором члене, и пространство его когомологий

$$H^1 = \ker \overline{\partial}^+{}_a / \operatorname{Im} \overline{\partial}_a = \ker(\overline{\partial}^+{}_a \oplus \overline{\partial}_a^*) \qquad (3.3)$$

моделирует касательное расслоение к многообразию решений уравнения $(*)$ по модулю калибровочной эквивалентности.

Выбранная для отождествления метрика $||_h$ на E позволяет переписать это уравнение $(*)$ в виде

$$\operatorname{Tr}(F_a^{0,2} \wedge F_a^{0,2}) = |F_a^{0,2}|^2 \cdot \overline{\theta}. \qquad (**)$$

По аналогии с классическим случаем мы можем рассмотреть аналогичные уравнения антиинстантонов

$$\overline{\partial} \cdot \overline{\partial}|_{\Omega^{0,2}(E)_-} = 0$$

или

$$(F_a^{0,2})_- = 0. \qquad (*')$$

Как и в классическом случае, уравнения $(*)$ переходят в уравнения $(*')$ при смене знака комплексной ориентации

$$\theta \to -\theta.$$

Однако на сей раз ситуация более богатая: мы можем менять не только знак, но и *фазу* комплексной ориентации

$$\theta \to -q \cdot \theta, \quad q = e^{i \cdot \tau}. \qquad (3.4)$$

Таким образом, имеем непрерывное семейство уравнений вида $(*)$, индексы линеаризаций которых сохраняются. Это и отличает комплексную ситуацию от вещественной (см. замечание после формулы (0.17)).

С другой стороны, очевидно, что решение, инстантонное относительно двух разных («неколлинеарных») ориентаций, определяет голоморфную структуру на E.

Далее, выбор комплексной ориентации определяет фазу любого 4-коцикла (т.е. любой замкнутой 4-формы) следующим образом.

Выражение $\mathrm{Tr}(F_a \wedge F_a)$ является замкнутой вещественной формой, представляющей класс $k(E) \in H^4(X, \mathbb{R})$. Таким образом, выбор комплексной ориентации θ определяет фазу целочисленного класса когомологий $\frac{1}{4\pi^2}k(E)$:

$$\tau_\theta(E) = \arg\left(\frac{1}{4\pi^2}k(E) \cdot \theta\right), \qquad (3.5)$$

и E допускает полуголоморфную связность, только если эта фаза равна 0.

В следующем параграфе будет доказано, что из нетривиальности фазы следует тривиальность множества решений уравнения $(**)$.

Интересно, что схожие уравнения $(*)$ и $(**)$ в рамках калибровочной теории должны быть различаемы. Действительно, первое калибровочно инвариантно относительно всей комплексной группы $\mathcal{G}$, в то время как второе не выдерживает действия полной группы. Первое, как и условие голоморфности, использует только $(0,2)$-часть формы кривизны, поэтому естественно рассматривать его на пространстве $\overline{D}(E)$, а второе — на $\mathcal{A}_h(E)$. Пространство решений первого факторизуется по действию полной комплексной группы $\mathcal{G}$, второго — только по действию максимальной компактной подгруппы $\mathcal{G}_h$, из чего с

необходимостью требуется дополнительное условие (стабильность) для получения конечного фактора. В качестве альтернативы может быть предложена факторизация по отношению $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$-полуэквивалентности. В конце концов первое — уравнение чистой полуголоморфности, второе — стабильной.

Поэтому естественно назвать *полуголоморфной связностью* решение уравнения (**), а *полуголоморфной структурой* — класс $\mathcal{G}$-эквивалентных полусвязностей, удовлетворяющих (*). Обозначим множество классов $\mathcal{G}_h$-эквивалентных полуголоморфных связностей через $SH_\theta^h(E)$.

Необходимо отметить, что любая голоморфная связность на E по определению является полуголоморфной для произвольных h, θ.

§ 4. Лагранжиан

Эквивалентность уравнений (*) и (**) вместе с изоморфизмом (2.16) позволяют работать в более простой ситуации в присутствии эрмитовой структуры на E, при этом необходимое условие существования полуголоморфных связностей на расслоении с классами Черна c_1, c_2 легко выводимо.

Наблюдения предыдущих параграфов показывают, что функционал на пространстве связностей

$$T(a,\theta) = \int_X \mathrm{Tr}(F_a \wedge F_a) \wedge \theta \tag{4.1}$$

постоянен: для любой связности $a \in \mathcal{A}_h'(E)$

$$T(a,\theta) = \mathrm{const}\,.$$

Действительно, $[\mathrm{Tr}(F_a \wedge F_a)] = k(E)$ и значит $T(a,\theta) = \mathrm{const} = k(E)\cdot(c + i\bar{c})$.

Все наши наблюдения суммирует

Теорема 1. *Для существования полуголоморфной относительно θ связности на E необходима вещественность периода класса $k(E)$. Если, кроме того, этот период равен нулю, то полуголоморфность совпадает с голоморфностью.*

Действительно, для произвольной связности $a \in \mathcal{A}_h(E)$ имеем

$$\begin{aligned}\int_X \mathrm{Tr}(F_a \wedge F_a) \wedge \theta &= \int_X \mathrm{Tr}(F_a^+ + F_a^-)^{\Lambda 2} \wedge \theta \\ &= \int_X \mathrm{Tr}(F_a^+)^{\Lambda 2} \wedge \theta + \int_X \mathrm{Tr}(F_a^-)^{\Lambda 2} \wedge \theta + \\ &\quad + 2\int_X \mathrm{Tr}(F_a^+ \wedge F_a^-) \wedge \theta \\ &= |F_a^+|^2 - |F_a^-|^2 + 2\int_X \mathrm{Tr}(F_a^+ \wedge F_a^-)\theta. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Последнее слагаемое чисто мнимое, в то время как первые два вещественны. Отсюда

$$\begin{aligned} k(E)\cdot c &= |F^{+}{}_{a}|^2 - |F^{-}{}_{a}|^2, \\ k(E)\cdot \bar{c} &= 2\int_X \mathrm{Tr}(F_a^+ \wedge F_a^-)\wedge\theta, \end{aligned} \tag{4.3}$$

из чего вытекает утверждение теоремы 1.

Из полученных нами выражений видно, что полуголоморфные эрмитовы связности являются экстремумами функционала

$$\mathcal{L}(a) = \|F_a^{0,2}\|^2 \tag{4.4}$$

(так же, как и классические инстантоны).

Действительно, если выбрать фазу таким образом, чтобы период θ относительно $k(E)$ был вещественным (а это всегда можно сделать), получаем

$$\begin{aligned} \|F_a^+\|^2 - \|F_a^-\|^2 &= k(E).c(\theta), \\ \|F_a^+\|^2 + \|F_a^-\|^2 &= \|F_a^{0,2}\|^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Пусть, кроме того, фаза выбрана так, что этот период положителен. Тогда полуголоморфные связности являются минимумами функционала

$$\mathcal{L}_h(a) = \|F_a^{0,2}\|_h^2, \tag{4.6}$$

причем $a \in SH_\theta^h(E)$ равносильно тому, что

$$\|F_a^{0,2}\|^2 = k(E)\cdot[\theta], \tag{4.7}$$

где $[\theta] \in H^{0,4}(X,\mathbb{C})$.

Интересно, что в выражение (4.6) для функционала $\mathcal{L}(a)$ не входит θ, что позволяет по-иному ввести понятие класса эквивалентных полуголоморфных связностей как минимума этого функционала.

Замечание. В данном определении минимумом считается только абсолютный минимум — значение функционала в котором не зависит от выбранной метрики.

Как уже указывалось выше, пространство классов $\mathcal{G}_h$-эквивалентных полуголоморфных связностей $SH_h(E)$ не является конечномерным.

Для образования конечномерных объектов возможны два подхода.

Первый предполагает определение $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$-полуэквивалентности на пространстве эрмитовых связностей. При этом необходимо сначала факторизовать по обычной вещественной $\mathcal{G}_h$-эквивалентности, после этого в малых окрестностях орбит фак-

торизовать по чисто мнимой эквивалентности. При этом необходимо определять преобразования переклейки, что задает 1-коцикл на $\mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h$ со значениями в $\mathcal{G}_h$.

С другой стороны, расслоив одно факторпространство над другим

$$p : \mathcal{B}_h = \mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h \xrightarrow{\mathcal{G}_h} \overline{D}/\mathcal{G}, \tag{4.8}$$

заметим, что «факторизация» по отношению $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$-полуэквивалентности соответствует выбору сечения s_h этого расслоения. Нули такого сечения задают область неопределенности факторизации, которая имеет в общем случае коразмерность, равную $\dim \mathcal{G}_h = \frac{1}{2}\dim \mathcal{G}$.

Из этого следует, что в общем случае, если

$$\dim \mathcal{G} > 2\,\mathrm{v.}\dim SH, \tag{4.9}$$

где SH — пространство модулей полуголоморфных структур, возможно профакторизовать пространство полуголоморфных связностей по отношению $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}}$-полуэквивалентности.

Замечание. Еще раз отметим, что при этом факторизация объемлющего пространства $\mathcal{B}_h$ не определена.

Второй путь — ввести условие стабильности. Таким условием для уравнения $SU(4)$-инстантона может служить

$$F_a \cdot \omega = 0, \tag{4.10}$$

где ω — келерова форма (см.[3]). Это условие когомологическое и поэтому универсальное. Оно обеспечивает «минимальность» центра кривизны и конечномерность модулей.

Нетрудно видеть, что для произвольной связности $a \in \mathcal{A}_h(E)$ из условия (4.10) следует

$$\mathrm{Tr}(F_a^{1,1} \wedge F_a^{1,1})\Lambda\omega\Lambda\omega = -|F_a^{1,1}|^2 d\mu. \tag{4.11}$$

Далее, из соотношения

$$\mathrm{Tr}(F_a^{2,0}\Lambda F_a^{0,2})\Lambda\omega\Lambda\omega = \mathrm{Tr}(F_a^{2,0}\Lambda\overline{F_a^{2,0}})\Lambda\omega\Lambda\omega,$$

следует

$$\mathrm{Tr}(F_a\Lambda F_a)\Lambda\omega\Lambda\omega = -|F_a^{1,1}|^2 d\mu - 2|F_a^{2,0}|^2 d\mu = -|F_a|^2 d\mu;$$

но, с другой стороны, это выражение после интегрирования должно равняться $\mathrm{const} = k(E)\cdot[\omega]^2$, т.е. при $k(E)\cdot[\omega]^2 \geqslant 0$ необходимо выбирать иное условие стабильности.

Более того, в последнем равенстве, если a — решение уравнения $SU(4)$-инстантона, известна норма $(0,2)$-компоненты формы кривизны, которая должна быть равна $k(E)\cdot c$. Следовательно,

запрет на существование ω-стабильных $\mathbb{C}$-автодуальных связностей необходимо уточнить.

Вопрос стабильности необходим в рамках возможности построения численных инвариантов комплексно-ориентируемых многообразий. Но в отличие от вещественного случая, когда получение инвариантов гладких структур было существеннейшим вкладом в дело классификации четырехмерных римановых многообразий и послужило еще одним доводом в пользу того, что геометрия и топология в этой размерности не смыкаются, на первый взгляд в вещественной размерности 8 никаких иных, кроме топологических, инвариантов и не должно быть. Этим — абсолютно поверхностным и не претендующим на истинность — соображением закончим на данном этапе обсуждение вопроса о стабильности.

Заключение

Неожиданным образом новая задача дифференциальной геометрии спроецировалась в область интересов алгебраической.

Согласно теореме 1, существование полуголоморфных связностей на расслоениях с классами Черна типа (n, n) влечет существование голоморфных структур, так как в этом случае голоморфность совпадает с полуголоморфностью.

Однако кроме этого достаточно общего результата интересен результат (скорее даже пример) более частного характера.

В качестве комплексно-ориентируемой базы рассмотрим прямое произведение двух $K3$-поверхностей $X = Y_1 \times Y_2$. Выберем метрику — прямое произведение метрик на Y_i. Тогда пространство полуголоморфных структур на расслоении $E \to X$ с $c_2(E) \in \in H^{2,2}$ совпадает с пространством голоморфных структур на E. С другой стороны (см. [3]), можно перейти к «адиабатическому пределу», зафиксировав метрику на одном из прямых слагаемых, например, на Y_1, сжать метрику на втором до нуля, т.е. рассмотреть семейство метрик на X вида

$$g_t = g_1 \times t \cdot g_2, t \in [1, 0],$$

где g_i — метрики на Y_i, и, устремив t к нулю, получить некоторую g_0. Вместе с деформацией метрики g_t происходит деформация и полуголоморфных структур на E — решений уравнения комплексной автодуальности, зависящего от метрики. В пределе (см. [3]) полуголоморфным структурам соответствуют *полуголоморфные отображения* $f : Y_2 \to M_{Y_1}(E)$, где $M_{Y_1}(E)$ — пространство инстантонов, определяемых метрикой g_1 над базой Y_1 в расслоении топологического типа, соответствующего ограничению E на Y_1. Если метрики g_i, выбираемые нами, келеровы, то инстантоны над Y_1 соответствуют стабильным голоморфным расслоениям, и полуголоморфность отображения f может

быть определена следующим образом. На $K3$-поверхности имеется целая сфера комплексных структур с тройкой образующих $I, J, K = IJ$ (гиперкелеровость). С другой стороны, и многообразие модулей стабильных расслоений над $K3$-поверхностью гиперкелерово. Дифференциал нашей функции df отображает касательные пространства к Y_2 в касательные пространства к $M_{Y_1}(E)$ в точках образа. Все касательные пространства — кватернионные (следствие гиперкелеровости). Над каждой точкой мы можем разложить линейное отображение

$$df_p : T_pY_2 \to T_{f(p)}(M_{Y_1}(E))$$

по компонентам H_0, H_I, H_J, H_K, где H_0 — отображения, линейные по всем трем структурам, H_I — линейные по I, но антилинейные по J и K, и т.д. Например, голоморфными будут такие отображения f_0, что

$$df_0|_{H_J} = df_0|_{H_K} = 0$$

в каждой точке Y_2. Тогда *полуголоморфными* будут такие отображения f, что

$$df|_{H_j} = 0$$

в каждой точке.

Таким образом, естественно было бы ожидать, что каждая голоморфная структура на E определяет (при переходе к «адиабатическому пределу») такое полуголоморфное отображение одной $K3$-поверхности на многообразие модулей стабильных расслоений над другой $K3$-поверхностью. Конечно, для того, чтобы утверждать справедливость подобного факта, необходима еще огромная работа, однако уже эти исходные замечания позволяют надеяться на то, что случай прямого произведения $K3$-поверхностей, с точки зрения гипотезы Ходжа (или, более точно, устройства группы Пикара), напоминает хорошо известную ситуацию с прямым произведением пары эллиптических кривых (см., например, [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шафаревич И. Р., Исковских В. А.* Алгебраические поверхности// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундаментальные направления/ ВИНИТИ. — 1989. — *35*. — С. 131–263
2. *Donaldson S., Kronheimer P.* The Geometry of Four-Manifolds. — Oxford: Clarendon Press, 1990
3. *Donaldson S., Thomas R.* Gauge theory in higher dimensions// Prepr., 1996