ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЮНЬ 1969 г., ТОМ V, № 6

УДК 517.917

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ЦЕЛОМ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, ВСТРЕЧАЮЩЕЙСЯ В ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

М. А. БАЛИТИНОВ

Рассмотрим систему трех уравнений с двумя нелинейностями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$, $\varphi_2(x_2)$ и $\varphi_3(x_3)$ удовлетворяют каким-либо условиям, обеспечивающим существование и единственность решений системы (1). При $a_{21}a_{31} \neq 0$ система (1) линейным преобразованием приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax - \varphi(y) - f(z), \\ \frac{dy}{dt} &= x - by, \\ \frac{dz}{dt} &= x - cz. \end{aligned} \tag{2}$$

Случай $a_{21}a_{31} = 0$ частично рассмотрен в [1, 2].

Пусть система (2) удовлетворяет обобщенным условиям Рауса — Гурвица:

$$a + b + c > 0, \quad c\,\frac{\varphi(y)}{y} + b\,\frac{f(z)}{z} + abc > 0,$$

$$(a+b)\,\frac{\varphi(y)}{y} + (a+c)\,\frac{f(z)}{z} + (a+b)(b+c)(a+c) > 0 \tag{3}$$

при $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Целью настоящей статьи является изучение поведения решений в целом системы (2) в следующих случаях:

а) $b > 0$, $c > 0$, $a + c < 0$, $a + b < 0$;

б) $b < 0$, $c > 0$, $a + c > 0$, $a + b < 0$.

§ 1

Пусть $b>0$, $c>0$, $a+c<0$, $a+b<0$. Введем обозначения

$$m_1=\inf\frac{\varphi(y)}{y},\quad m_2=\sup\frac{f(z)}{z},\quad k^2=\frac{b-c}{a+b}m_2-c^2,$$

$$\varphi(y)=-\frac{a+c}{b-c}(k^2+b^2)y-\varphi_1(y),\ f(z)=m_2z-f_1(z),$$

$$u=(a+b)x-\frac{a+b}{b-c}(k^2+b^2)y+m_2z,\ T=cm_1+bm_2+abc,$$

$$L=(a+b)m_1+(a+c)m_2+(a+b)(b+c)(a+c),\ N=a+b+c.$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что система (2) удовлетворяет условиям (3). Следовательно, имеют место неравенства

$$0\leqslant\frac{\varphi_1(y)}{y}\leqslant-\frac{L}{a+b},\ 0\leqslant\frac{f_1(z)}{z}\leqslant\frac{T}{b}\quad\text{при } y\neq0,\ z\neq0.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия (3), то для устойчивости в целом нулевого решения системы (2) достаточно выполнение неравенства*

$$\frac{\varphi_1(y)}{y}\leqslant\frac{-4cNk^2L}{4c(a+b)Nk^2+\dfrac{(c-b)^2(ak^2-bcN)^2}{(a+c)(k^2+b^2)(k^2+c^2)}\dfrac{T}{b}}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2}u^2+\frac{A}{2}\left[(b-c)x+b(a+c)y-c(a+b)z\right]^2+$$

$$+k^2\frac{A}{2}\left[(a+c)y-(a+b)z\right]^2-$$

$$-(b-c)^2\frac{k^2+bN}{k^2+b^2}A\int\limits_0^z f_1(u)\,du-(b-c)^2\frac{k^2+cN}{k^2+c^2}A\int\limits_0^y\varphi_1(u)\,du,\qquad(*)$$

где

$$A=\frac{(a+b)^2\left[2(k^2+c^2)Nk^2-\dfrac{(b-c)(ak^2-bcN)}{b(a+c)}T\right]}{-(c-b)^2\left[2c(a+b)Nk^2+(b-c)\dfrac{ak^2-bcN}{k^2+b^2}T\right]}.$$

В силу предположений теоремы справедливо неравенство

$$2V(x,\ y,\ z)\geqslant u^2+A\left[(b-c)x+b(a+c)y-c(a+b)z\right]^2+$$

$$+k^2A\left[(a+c)y-(a+b)z\right]^2-(b-c)^2\frac{k^2+bN}{k^2+b^2}\frac{T}{b}Az^2+$$

$$+(b-c)^2\frac{k^2+cN}{k^2+c^2}\times$$

$$\times \frac{4cNk^2AL}{4c(a+b)Nk^2+\dfrac{(c-b)^2(ak^2-bcN)^2}{(a+c)(k^2+b^2)(k^2+c^2)}\dfrac{T}{b}}y^2 = W(x, y, z).$$

Покажем, что $W(x, y, z)$ — определенно положительная квадратичная форма. В самом деле, предположим, что

$$f_1(z) = \frac{T}{b}z, \quad \varphi_1(y) = \frac{-4cNk^2L}{4c(a+b)Nk^2+\dfrac{(c-b)^2(ak^2-bcN)^2}{(a+c)(k^2+b^2)(k^2+c^2)}\dfrac{T}{b}}y.$$

Тогда система (2) устойчива в целом, так как для нее выполнены условия Рауса — Гурвица. Несложными, но громоздкими вычислениями можно показать, что $\frac{dW}{dt} \leqslant 0$ и множество, где $\frac{dW}{dt} = 0$, не содержит целых траекторий системы (2), отличных от $O(0, 0, 0)$. Следовательно, утверждение доказано [3]. Отсюда $V(x, y, z)$ — определенно положительная и бесконечно большая функция.

То же самое можно было бы установить с помощью критерия Сильвестра, однако это связано с чрезвычайно громоздкими вычислениями.

Производная $\frac{dV}{dt}$ в силу системы (2) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -Nu^2 + \left[a+b-\frac{b(b-c)^2(a+c)}{(a+b)(k^2+b^2)}A\right]uf_1(z) +$$
$$+\frac{(a+c)(b-c)^2}{k^2+b^2}k^2Azf_1(z) +$$
$$+\left[a+b-\frac{c(b-c)^2}{k^2+c^2}A\right]u\varphi_1(y) + \frac{(a+b)(b-c)^2}{k^2+c^2}k^2Ay\varphi_1(y).$$

Выше приведенные рассуждения относительно функции $\frac{dW}{dt}$ позволяют заключить, что $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$ и множество, где $\frac{dV}{dt} = 0$, не содержит целых траекторий, отличных от $O(0, 0, 0)$. Итак, функция $V(x, y, z)$ обеспечивает выполнимость достаточных условий устойчивости в целом нулевого решения системы (2).

Теорема 2. *Если выполнены условия (3), а также*

$$\frac{\varphi_1(y)}{y} \leqslant \frac{-4cNk^2L}{4c(a+b)Nk^2+\dfrac{(c-b)^2(ak^2-bcN)^2}{(a+c)(k^2+b^2)(k^2+c^2)}\dfrac{T}{b}}, \quad |y| > M,$$

то система (2) предельно ограничена.

Доказательство. Рассмотрим снова функцию (*) и ее производную в силу системы (2). В силу условий теоремы (2) справедливо неравенство

$$2V(x, y, z) \geqslant W(x, y, z) - R^2,$$

где $W(x, y, z)$ — определенно положительная квадратичная форма, а R^2 — некоторая постоянная.

Построим замкнутое ограниченное множество D, чтобы при $p(x, y, z) \overline{\in} D$ выполнялось неравенство $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. При $|y| > M$, очевидно, имеем $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$.

Выберем теперь u_0 так, чтобы при $|y| \leqslant M$ и $|u| > u_0$ выполнялось неравенство $\frac{dV}{dt} < 0$. Это неравенство выполняется, если выбрать u_0 из условия

$$\left\{ N + \frac{\left[a + b - \frac{b(b-c)^2(a+c)}{(a+b)(k^2+b^2)} A \right]^2 T}{4b \frac{(a+c)(b-c)^2}{k^2+b^2} k^2 A} \right\} u_0 >$$

$$> \left| a + b - \frac{c(b-c)^2}{k^2+c^2} A \right| \max_{|y| \leqslant M} |\varphi_1(y)|.$$

Наконец, найдем такое z_0, чтобы при $|y| \leqslant M$, $|u| \leqslant u_0$ и $|z| > z_0$ выполнялось неравенство $\frac{dV}{dt} < 0$. Очевидно, можно выбрать z_0 из неравенства

$$\left| \frac{(a+c)(b-c)^2}{k^2+b^2} k^2 A \right| z_0 > \left| a + b - \frac{b(b-c)^2(a+c)}{(a+b)(k^2+b^2)} A \right| u_0.$$

Множество $D = \{|y| \leqslant M, \ |u| \leqslant u_0, \ |z| \leqslant z_0\}$ обладает требуемыми свойствами.

Построим замкнутое ограниченное множество $Q \supset D$, чтобы при $p(x, y, z) \overline{\in} Q$ выполнялось неравенство $V(x, y, z) > 0$. $Q \cap \left\{ \frac{dV}{dt} = 0 \right\}$ не содержит целых траекторий системы (2). Отсюда любая траектория системы (2) с течением времени войдет в множество Q и в дальнейшем останется там.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (3), *а также*

$$\frac{f_1(z)}{z} \leqslant \frac{4(a+b)^2 N k^2 T}{4b(a+b)^2 N k^2 - \frac{(c-b)^2 (ak^2 - bcN)^2 L}{(a+c)(k^2+c^2)(k^2+b^2)}}, \quad |z| > M,$$

то система (2) *предельно ограничена.*

Следствие. *Если в условиях теоремы 3 имеем* $M = 0$, *то нулевое решение системы* (2) *устойчиво в целом.*

Теорема 3 и ее следствие доказываются с помощью функции

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} u^2 + \frac{A}{2} \left[(b-c)x + b(a+c)y - c(a+b)z \right]^2 +$$

$$+ k^2 \frac{A}{2} \left[(a+c)y - (a+b)z \right]^2 -$$

$$-(b-c)^2 \frac{k^2+bN}{k^2+b^2} A \int_0^z f_1(u)\,du - (b-c)^2 \frac{k^2+cN}{k^2+c^2} A \int_0^y \varphi_1(u)\,du,$$

где

$$A = \frac{-(a+b)\left[2(a+b)^2(k^2+b^2)Nk^2 - (b-c)(ak^2-bcN)L\right]}{(a+c)(c-b)^2 \left[2b(a+b)Nk^2 + \frac{(b-c)(ak^2-bcN)}{(a+c)(k^2+c^2)} cL \right]}.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Если $\varphi(x)$—непрерывная, неубывающая функция и* $0 \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \lambda_0$, *то при* $(y-x)x \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^y \varphi(u)\,du - \int_0^x \varphi(u)\,du \leqslant \frac{\lambda_0}{2}(y^2-x^2).$$

Лемма 2. *Если $\varphi(x)$—непрерывная, неубывающая функция и* $0 \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \lambda_0$, *то справедливо неравенство*

$$\int_0^x \varphi(u)\,du \leqslant x\varphi(x) - \frac{\varphi^2(x)}{2\lambda_0}.$$

Лемма 3. *Пусть*

$$W(x, y) = \alpha x^2 - 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\mu_1 \int_0^x \varphi(u)\,du - 2\mu_2 \int_0^y \varphi(u)\,du$$

и выполнены условия

1) $\mu_2 \geqslant \mu_1 > 0$, $(\alpha + \mu_1\lambda)(\gamma - \mu_2\lambda) - \beta^2 > 0$ *при* $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$;

2) $\varphi(x)$*—непрерывная, неубывающая функция и такая, что* $0 \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \lambda_0$.

Тогда для того чтобы функция $W(x, y)$ *была определенно положительной и бесконечно большой, достаточно выполнения одного из следующих неравенств: а)* $\mu_2\alpha \leqslant \mu_1|\beta| + \frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\lambda_0}$; *б)* $\alpha \geqslant |\beta|$.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что $\beta \geqslant 0$. Докажем лемму 3 при $\mu_2\alpha = \mu_1\beta + \frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\lambda_0}$.

Случаи $\mu_2\alpha < \mu_1\beta + \frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\lambda_0}$ и $\alpha \geqslant \beta$ рассматриваются аналогично.

Рассмотрим множества

$$Q_1 = \{(y-x)x \geqslant 0\}, \quad Q_2 = \{yx \leqslant 0\}, \quad Q_3 = \{(x-y)y > 0\}.$$

На множестве Q_1 в силу леммы 1 справедливо неравенство

$$W(x, y) \geqslant \alpha x^2 - 2\beta xy + \gamma y^2 + \mu_1\lambda_0 x^2 - \mu_2\lambda_0 y^2 > 0.$$

Так как $\beta \geqslant 0$, то на множестве Q_2 имеем

$$W(x, y) = \alpha x^2 - 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\mu_1 \int_0^x \varphi(u)\,du -$$

$$- 2\mu_2 \int_0^y \varphi(u)\,du \geqslant \gamma y^2 - 2\mu_2 \int_0^y \varphi(u)\,du > 0.$$

Для изучения функции $W(x, y)$ на множестве Q_3 рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta y - \mu_1\varphi(x),$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x - \gamma y + \mu_2 \varphi(y). \tag{4}$$

Так как

$$\left.\frac{dW}{dt}\right|_{(4)} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2,$$

то функция $W(x, y)$ не возрастает вдоль решений системы (4).

Пусть $M(x_0, y_0)$ — точка покоя системы (4), отличная от $O(0, 0)$ и $M \in Q_3$. Тогда, очевидно, имеют место

$$|x_0| > |y_0|, \quad \varphi(u) = \lambda_0 y_0 \text{ при } |y_0| \leqslant |u| \leqslant |x_0|$$

и, далее,

$$W(x_0, y_0) = (\mu_2 y_0 - \mu_1 x_0)\varphi_1(y_0) + 2(\mu_1 - \mu_2)\int_0^{y_0} \varphi(u)\,du + 2\mu_1\lambda_0 y_0 (x_0 - y_0) \geqslant$$

$$\geqslant \left[\mu_2 y_0 - \frac{\mu_1}{\alpha}(\beta y_0 - \mu_1 \lambda_0 y_0)\right]\lambda_0 y_0 + 2\mu_1\lambda_0 y_0 \left[\frac{\beta y_0 - \mu_1\lambda_0 y_0}{\alpha} - y_0\right] +$$

$$+ (\mu_1 - \mu_2)\left[2y_0\varphi(y_0) - \frac{\varphi^2(y_0)}{\lambda_0}\right] = \mu_1\lambda_0 \frac{\beta - \alpha - \mu_1\lambda_0}{\alpha} y_0^2 > 0.$$

Предположим, что $W(\xi, \eta) < 0$, где $p(\xi, \eta) \in Q_3$. Пусть $\varphi(p, t)$ — траектория системы (4), выходящая при $t = 0$ из точки p фазовой плоскости. Так как $W(x, x) > 0$, $W(x, 0) > 0$ и функция $W(x, y)$ не возрастает вдоль решений системы (4), то $\varphi(p, t) \in Q_3$ при всех $t \geqslant 0$. Далее, вдоль $\varphi(p, t)$ выполнено

$$\frac{d}{dt}(\beta x + \alpha y)^2 = -2(\beta x + \alpha y)\left[\beta\mu_1\varphi(x) - \left(\alpha\mu_2 - \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\lambda_0}\right)\varphi(y) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\lambda_0}\left(\lambda_0 - \frac{\varphi(y)}{y}\right) y\right] \leqslant 0.$$

Следовательно, траектория $\varphi(p, t)$ ограничена при всех $t \geqslant 0$, система (4) в области Q_3 не имеет замкнутых траекторий, отличных от состояний равновесия. Отсюда

$$\varphi(p, t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} M(x_0, y_0).$$

Это противоречит тому, что $W(x_0, y_0) > 0$. Предположение о том, что $W(\xi, \eta) = 0$, также приводит к противоречию как в случае $\frac{dW(\xi, \eta)}{dt} < 0$, так и в случае $\frac{dW(\xi, \eta)}{dt} = 0$.

Покажем, что $W(x, y)$ — бесконечно большая функция. В областях Q_1 и Q_2 утверждение очевидно. В области Q_3 это следует из неравенства

$$\alpha W(x, y) = (\alpha x - \beta y)^2 + 2\alpha\mu_1 \int_0^x \varphi(u)\,du -$$

$$-2\left[\alpha\mu_2 - \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\lambda_0}\right]\int_0^y \varphi(u)\,du + 2\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\lambda_0}\int_0^y [\lambda_0 u - \varphi(u)]\,du >$$

$$> 2\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\lambda_0}\int_0^y [\lambda_0 u - \varphi(u)]\,du, \text{ если} \int_0^{\pm\infty} [\lambda_0 u - \varphi(u)]\,du = +\infty.$$

В противном случае это следует из условия (2) настоящей леммы.

Теорема 3. *Если $c > b$ и $\varphi_1(u)$ — неубывающая функция, то для устойчивости в целом нулевого решения системы (2) достаточны условия (3).*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$2V(x,\ y,\ z) = u^2 + A\left[(b-c)x + b(a+c)y - c(a+b)z\right]^2 +$$

$$+ k^2A\left[(a+c)y-(a+b)z\right]^2 - 2(b-c)^2\frac{k^2+bN}{k^2+b^2}A\int\limits_0^z f_1(u)\,du +$$

$$+ 2\frac{(a+b)^2}{b(a+c)}(k^2+bN)\int\limits_0^y \varphi_1(u)\,du +$$

$$+ 2\frac{(c-b)(a+b)^2}{bc^2(a+c)}(ak^2-bcN)\int\limits_0^\theta \varphi_1(u)\,du,$$

где

$$A = -\frac{(a+b)^2(k^2+b^2)}{b(a+c)(b-c)^2},\quad \theta = \frac{c}{c-b}(y-z).$$

Функцию $V(x,\ y,\ z)$ можно представить в виде

$$\frac{2V(x,\ y,\ z)}{(a+b)^2} = -\frac{b(a+c)}{k^2+b\lambda}\left\{\frac{k^2+b\lambda}{b(a+c)}x + 2\frac{k^2+b^2}{b-c}y -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{b-c}\left[k^2+c^2+\frac{c(a+b)}{b(a+c)}(k^2+b^2)\right]z\right\}^2 -$$

$$-\frac{T}{b^2(a+c)}(k^2+bN)z^2 + 2\frac{k^2+bN}{b(a+c)}\int\limits_0^z f_1(u)\,du + W(y,\ \theta),$$

где

$$\lambda = b-(a+c),$$

$$W(y,\ \theta) = \frac{k^2+bN}{b^2(a+c)}T\left(y-\frac{c-b}{c}\theta\right)^2 +$$

$$+\frac{k^2+b^2}{b(k^2+b\lambda)}\left\{\left[-\frac{k^2}{a+c}(k^2+b^2)+b(k^2+N^2)\right]y^2 -\right.$$

$$-\frac{2}{c}\left[\frac{a+b}{a+c}k^2(k^2+b^2)+bc(k^2+N^2)\right]y\theta +$$

$$\left.+\frac{1}{c^2}\left[b(k^2+c^2)(k^2+N^2)-\frac{(a+b)^2}{a+c}k^2(k^2+b^2)\right]\theta^2\right\} +$$

$$+2\frac{k^2+bN}{b(a+c)}\int\limits_0^y \varphi_1(u)\,du + 2\frac{c-b}{bc^2(a+c)}(ak^2-bcN)\int\limits_0^\theta \varphi_1(u)\,du.$$

В силу леммы 3 $W(y, \theta)$ — определенно положительная и бесконечно большая функция, следовательно, такова же и функция $V(x, y, z)$. Производная $\frac{dV}{dt}$ в силу системы (2) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -Nu^2 + 2(a+b)uf_1(z) - \frac{(a+b)^2}{b}k^2zf_1(z) + 2(a+b)u\varphi_1(y) -$$

$$-\frac{(a+b)^2}{c}k^2y\varphi_1(y) - \frac{(c-b)(a+b)^2}{bc(a+c)}(ak^2-bcN)(y-\theta)\left[\varphi_1(y)-\varphi_1(\theta)\right].$$

Если $\frac{\varphi_1(y)}{y} > 0$, то $\frac{dV}{dt}$ — определенно отрицательная функция. В противном случае $\frac{dV}{dt}$ может обратиться в нуль только при $u=0$, $z=0$, а множество $\{u=0, \quad z=0\}$ не содержит целых траекторий системы (2), отличных от $O(0, 0, 0)$.

Итак, наша функция обеспечивает выполнимость достаточных условий устойчивости в целом.

Теорема 4. *Если $c<b$ и $f_1(u)$ — неубывающая функция, то для устойчивости в целом нулевого решения системы (2) достаточны условия (3).*

Теорема 4 доказывается с помощью функции

$$2V(x, y, z) = u^2 + A\left[(b-c)x + b(a+c)y - c(a+b)z\right]^2 +$$

$$+ k^2A\left[(a+c)y-(a+b)z\right]^2 + 2\frac{a+b}{c}(k^2+cN)\int_0^y \varphi_1(u)\,du +$$

$$+ 2\frac{a+b}{c}(k^2+cN)\int_0^z f_1(u)\,du + 2\frac{(b-c)(a+b)}{cb^2}(ak^2-bcN)\int_0^\theta f_1(u)\,du,$$

где

$$A = -\frac{a+b}{c(b-c)^2}(k^2+c^2), \quad \theta = \frac{b}{c-b}(y-z).$$

§ 2

Пусть $b<0$, $c>0$, $a+c>0$, $a+b<0$. Введем обозначения

$$m_1 = \inf\frac{\varphi(y)}{y}, \quad m_2 = \inf\frac{f(z)}{z}, \quad k^2 = \frac{b-c}{a+b}m_2 - c^2, \quad f_1(z) = f(z) - m_2z,$$

$$\varphi_1(y) = -\frac{a+c}{b-c}(k^2+b^2)y - \varphi(y), \quad u = (a+b)x - \frac{a+b}{b-c}(k^2+b^2)y + m_2z,$$

$$T = cm_1 + bm_2 + abc, \quad N = a+b+c,$$

$$L = (a+b)m_1 + (a+c)m_2 + (a+b)(b+c)(a+c).$$

В силу условий (3) функции $\varphi_1(y)$ и $f_1(z)$ подчинены условиям

$$0 \leqslant \frac{\varphi_1(y)}{y} \leqslant -\frac{L}{a+b}, \quad 0 \leqslant \frac{f_1(z)}{z} \leqslant -\frac{T}{b}.$$

Имеют место следующие предложения.

Теорема 5. *Если выполнены условия (3), а также*

$$\frac{\varphi_1(y)}{y} \leqslant \frac{-4cNk^2L}{4c(a+b)Nk^2 + \dfrac{(c-b)^2(ak^2-bcN)^2}{(a+c)(k^2+b^2)(k^2+c^2)}\,\dfrac{T}{b}}, \quad |y| > M,$$

то система (2) *предельно ограничена.*

Следствие. *Если в условиях теоремы 5 имеем* $M = 0$, *то нулевое решение системы* (2) *устойчиво в целом.*

Теорема 6. *Если выполнены условия* (3), *а также*

$$\frac{f_1(z)}{z} \leqslant \frac{4(a+b)^2Nk^2T}{-4b(a+b)^2Nk^2 + \dfrac{(c-b)^2(ak^2-bcN)^2L}{(a+c)(k^2+c^2)(k^2+b^2)}}, \quad |z| > M,$$

то система (2) *предельно ограничена.*

Следствие. *Если в условиях теоремы 6 имеем* $M = 0$, *то нулевое решение системы* (2) *устойчиво в целом.*

Теорема 7. *Пусть 1) выполнены условия* (3); 2) $ak^2 - bcN \geqslant 0$; 3) $f_1(u)$ — *неубывающая функция. Тогда нулевое решение системы* (2) *устойчиво в целом.*

Теорема 8. *Пусть 1) выполнены условия* (3); 2) $ak^2 - bcN \leqslant 0$; 3) $\varphi_1(u)$ — *неубывающая функция. Тогда нулевое решение системы* (2) *устойчиво в целом.*

Теоремы параграфа 2 доказываются такими же методами, что и теоремы параграфа 1 соответственно с помощью следующих функций:

$$2V(x, y, z) = u^2 + A\left[(b-c)x + b(a+c)y - c(a+b)z\right]^2 +$$

$$+ k^2A\left[(a+c)y - (a+b)z\right]^2 + 2(c-b)^2\frac{k^2+bN}{k^2+b^2}A\int_0^z f_1(u)\,du -$$

$$-2(c-b)^2\frac{k^2+cN}{k^2+c^2}A\int_0^y \varphi_1(u)\,du,$$

$$A = \frac{(a+b)^2\left[2(k^2+c^2)Nk^2 - \dfrac{(b-c)(ak^2-bcN)}{b(a+c)}T\right]}{-(c-b)^2\left[2c(a+b)Nk^2 + (b-c)\dfrac{ak^2-bcN}{k^2+b^2}T\right]};$$

$$2V(x, y, z) = u^2 + A\left[(b-c)x + b(a+c)y - c(a+b)z\right]^2 +$$

$$+ k^2A\left[(a+c)y - (a+b)z\right]^2 + 2(c-b)^2\frac{k^2+bN}{k^2+b^2}A\int_0^z f_1(u)\,du -$$

$$-2(c-b)^2\frac{k^2+cN}{k^2+c^2}A\int_0^y \varphi_1(u)\,du,$$

$$A = \frac{-(a+b)\left[2(a+b)^2(k^2+b^2)Nk^2 - (b-c)(ak^2-bcN)L\right]}{(a+c)(c-b)^2\left[2b(a+b)Nk^2 + \dfrac{(b-c)(ak^2-bcN)}{(a+c)(k^2+c^2)}cL\right]};$$

$$2V(x, y, z) = u^2 + A\left[(b-c)x + b(a+c)y - c\,(a+b)z\right]^2 +$$

$$+ k^2 A\left[(a+c)y - (a+b)z\right]^2 + 2\,\frac{a+b}{c}\,(k^2 + cN)\int\limits_0^y \varphi_1(u)\,du -$$

$$-2\,\frac{a+b}{c}\,(k^2 + cN)\int\limits_0^z f_1(u)\,du - 2\,\frac{(a+b)(b-c)}{cb^2}\,(ak^2 - bcN)\int\limits_0^\theta f_1(u)\,du,$$

$$A = -\frac{(a+b)(k^2+c^2)}{c(c-b)^2}, \quad \theta = \frac{b}{c-b}\,(y-z);$$

$$2V(x, y, z) = u^2 + A\left[(b-c)x + b(a+c)y - c(a+b)z\right]^2 +$$

$$+ k^2 A\left[(a+c)y - (a+b)z\right]^2 - 2\,\frac{(a+b)^2}{b(a+c)}\,(k^2 + bN)\int\limits_0^z f_1(u)\,du +$$

$$+ 2\,\frac{(a+b)^2}{b(a+c)}\,(k^2 + bN)\int\limits_0^y \varphi_1(u)\,du -$$

$$-2\,\frac{(a+b)^2(b-c)}{bc^2(a+c)}\,(ak^2 - bcN)\int\limits_0^\theta \varphi_1(u)\,du,$$

$$A = -\frac{(a+b)^2(k^2+b^2)}{b(a+c)(c-b)^2}, \quad \theta = \frac{c}{c-b}\,(y-z).$$

При доказательстве теоремы 7 нужно будет дополнительно воспользоваться следующей леммой:

Лемма 4. *Пусть*

$$W(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\mu_1\int\limits_0^x \varphi(u)\,du - 2\mu_2\int\limits_0^y \varphi(u)\,du$$

и выполнены условия

1) $\mu_1 > \mu_2 > 0;\quad \alpha > 0;$

2) $(\alpha + \mu_1\lambda)(\gamma - \mu_2\lambda) - \beta^2 > 0$ *при* $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0;$

3) $0 \leqslant \dfrac{\varphi(u)}{u} \leqslant \lambda_0$ *при* $u \neq 0.$

Тогда для того чтобы функция $W(x, y)$ *была определенно положительной и бесконечно большой для любой непрерывной неубывающей функции* $\varphi(u)$, *необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$-\mu_2^2\lambda_0^2 + \mu_2(\gamma - \alpha)\lambda_0 + \alpha\gamma - \beta^2 \geqslant 0.$$

Литература

1. Балитинов М. А., Эфендиев А. Р. Уч. зап. ДГПИ, 5, 1966, стр. 144—148.
2. Балитинов М. А. Сборник научных работ матем. кафедр ДГУ, 1967.
3. Алимов Ю. И. СМЖ, 2, № 1, 1961.

Поступила в редакцию
21 марта 1968 г.

Дагестанский
государственный университет