Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. V. Mikhalev, M. A. Shatalova, Prime radical of Ω-groups and Ω-l-groups, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1998, Volume 4, Issue 4, 1405–1413

https://www.mathnet.ru/eng/fpm361

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.168
April 21, 2025, 20:18:10

Первичный радикал Ω-групп и Ω-l-групп

А. В. МИХАЛЁВ*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

М. А. ШАТАЛОВА

Московская государственная академия приборостроения и информатики

УДК 512.577+512.552.12+512.555+512.544.37+512.545.4

Ключевые слова: первичный радикал, кольцо, l-кольцо, группа, l-группа, Ω-группа, Ω-l-группа.

Аннотация

Предложено единое описание первичных радикалов колец, групп, l-групп и l-колец в рамках Ω-групп.

Abstract

A. V. Mikhalev, M. A. Shatalova, Prime radical of Ω-groups and Ω-l-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1405–1413.

Unification of the prime radicals in rings, groups, l-rings and l-groups in the frame of Ω-groups is under consideration.

Первичный радикал колец (см., например, [4]) и групп (см. К. К. Щукин [12]) был распространен авторами на l-кольца (см. [5]) и на l-группы (см. [6]). Отметим, что истоки рассмотрения первичного радикала в l-кольцах восходят к статье Биркгофа и Пирса [13] (см. также [2]). Во всех этих случаях можно обнаружить некоторое единство методов при имеющихся отличиях полученных поэлементных описаний первичного радикала. Цель данной статьи — дать единое описание всех этих четырех радикалов в рамках Ω-групп, а также включить в эту схему первичный радикал модулей и l-модулей. В этой связи отметим цикл работ Ю. М. Рябухина [7–9] по радикалам Ω-групп, а также статьи [14–17], в которых Байес и Гербер привели ряд характеризаций Ω-первичного радикала Ω-групп.

§ 1. Ω-l-группы

Пусть G — Ω-группа (см. [3]), т. е. (возможно, некоммутативная) аддитивная группа G с системой мультиоператоров Ω. Если к тому же G является

*Исследования первого автора были частично поддержаны грантом Австралийского совета по науке (ARC-grant, 1996) и грантом РФФИ.

© 1998 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом "Открытые системы"*

l-группой (см. [2, 10]), то Ω-группу G назовем Ω-l-группой. Под Ω-идеалом (Ω-l-идеалом) в G понимается (см. [3, 18]) подмножество I группы G, такое что

1) I — нормальная подгруппа группы G (I — l-идеал l-группы G соответственно);

2) $x_1 \dots x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1} \dots x_n\omega - x_1 \dots x_n\omega \in I$ для всех $x_1, \dots, x_n \in G$, $a \in I$, $\omega \in \Omega$.

При этом (см. [14–16]) Ω-идеал (Ω-l-идеал) P в G называется Ω-первичным (Ω-l-первичным), если для всех $\omega \in \Omega$ и Ω-идеалов (Ω-l-идеалов) $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq$ $\subseteq G$ из включения $I_1 I_2 \dots I_n\omega \subseteq P$ следует, что $I_i \subseteq P$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. Для подмножества $M \subseteq G$ через M^G (M_l^G) обозначается идеал (l-идеал), порожденный подмножеством M.

Лемма 1.1 ([14, теорема 23]). *Для идеала P Ω-группы G эквивалентны следующие условия:*

(a) *P — Ω-первичный идеал;*

(b) *для всех $\omega \in \Omega$ и Ω-идеалов $I_1, \dots, I_n \subseteq G$, таких что $I_1 I_2 \dots I_n\omega \subseteq P$, следует, что $I_i \subseteq P$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$;*

(c) *для всех $\omega \in \Omega$ и $a_1, \dots, a_n \in G$, таких что $\{a_1\}^G \dots \{a_n\}^G\omega^G \subseteq P$, следует, что $a_i \in P$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$;*

(d) *для всех $\omega \in \Omega$ и $a_1, \dots, a_n \in G$, таких что $\{a_1\}^G \dots \{a_n\}^G\omega \subseteq P$, следует, что $a_i \in P$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$;*

(e) *для всех $\omega \in \Omega$ и $I_1, I_2, \dots, I_n \triangleleft G$, таких что $I_i \supsetneq P$, $1 \leqslant i \leqslant n$, следует, что $I_1 I_2 \dots I_n\omega \nsubseteq P$.*

Аналогичное утверждение справедливо для l-идеала P Ω-l-группы G.

Лемма 1.2. *Для l-идеала P Ω-l-группы G эквивалентны следующие условия:*

(a) *P — Ω-l-первичный идеал;*

(b) *для всех $\omega \in \Omega$ и l-идеалов $I_1, I_2, \dots, I_n$ из G, таких что $I_1 I_2 \dots I_n\omega_l^G \subseteq P$, следует, что $I_i \subseteq P$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$;*

(c) *для всех $\omega \in \Omega$ и $a_1, \dots, a_n \in G$, таких что $\{a_1\}_l^G \dots \{a_n\}_l^G\omega^G \subseteq P$, следует, что $a_i \in P$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$;*

(d) *для всех $\omega \in \Omega$ и $a_1, \dots, a_n \in G$, таких что $\{a_1\}_l^G \dots \{a_n\}_l^G\omega \subseteq P$, следует, что $a_i \in P$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$;*

(e) *для всех $\omega \in \Omega$ и l-идеалов $I_1, I_2, \dots, I_n$, таких что $I_i \supsetneq P$, $1 \leqslant i \leqslant n$, следует, что $I_1 I_2 \dots I_n\omega \nsubseteq P$.*

Определение 1.3. (a) Положим $\Omega\text{-rad}(G) = \bigcap P_\alpha$ ($\Omega\text{-}l\text{-rad}(G) = \bigcap P_\alpha$), где P_α пробегает все Ω-первичные (Ω-l-первичные) идеалы в G;

(b) в Ω-группе (в Ω-l-группе) G подмножество $M \subseteq G$ называется *Ω-m-системой* (Ω-l-m-системой), если для любой операции $\omega \in \Omega$ и любых элементов $a_1, \dots, a_n \in M$ существуют $a'_i \in \{a_i\}^G$ ($a'_i \in \{a_i\}_l^G$), такие что $a'_1 \dots a'_n\omega \in M$.

Замечание 1.4. Идеал P (l-идеал P) Ω-группы G (Ω-l-группы G) является первичным (l-первичным) в том и только в том случае, когда $G \setminus P$ является Ω-m-системой (Ω-l-m-системой).

Теорема 1.5. *Пусть G — Ω-группа (Ω-l-группа), I — Ω-идеал (Ω-l-идеал) в G, M — Ω-m-система (Ω-l-m-система), такая что $I \cap M = \varnothing$.*

Тогда

1) множество $\mathcal{P}$ Ω-идеалов (Ω-l-идеалов) J, таких что $I \subseteq J$ и $J \cap M = \varnothing$, индуктивно (при этом максимальные элементы в $\mathcal{P}$ — это Ω-первичные (Ω-l-первичные) идеалы, содержащие I);

2) множество $\mathcal{M}$ таких Ω-m-систем (Ω-l-m-систем) M', что $M \subseteq M'$ и $M' \cap I = \varnothing$, индуктивно (при этом максимальные элементы в $\mathcal{M}$ — это дополнения в G к минимальным Ω-первичным (Ω-l-первичным) идеалам).

Доказательство проводится по стандартной схеме (см. [1, гл. I], [4, § 2], [14, 2.18]).

Следствие 1.6. *Каждый Ω-первичный (Ω-l-первичный) идеал в G содержит минимальный Ω-первичный (Ω-l-первичный) идеал; радикал Ω-$\mathrm{rad}(G)$ (Ω-l-$\mathrm{rad}(G)$) совпадает с пересечением всех минимальных Ω-первичных (минимальных Ω-l-первичных) идеалов в G.*

Каждому элементу $a \in G$, где G — Ω-группа (Ω-l-группа), $\Omega = \{\omega_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$, поставим в соответствие подмножество $M_a \subseteq G$ ($M_a^l \subseteq G$), получаемое следующим образом: $M_a = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$, где $A_0 = a$, $A_i = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_{i,\lambda}$, $A_{i,\lambda} = \{a_{i,j_1\dots j_n} = a'_{i-1,j_1}\dots a'_{i-1,j_n}\omega_\lambda\}$ при $i \geqslant 1$, где ω_λ — n-арная операция, $a'_{i,j_k} \in \{a_{i,j_k}\}^G$ ($a'_{i,j_k} \in \{a_{i,j_k}\}_l^G$), $a_{i,j_1},\dots,a_{i,j_n}$ — всевозможные наборы по n элементов из A_i.

Лемма 1.7. *Для всякого элемента $a \in G$ множество M_a является Ω-m-системой (Ω-l-m-системой).*

Доказательство. Пусть $\omega_\lambda \in \Omega$ — n-арная операция и $a_{i_1},\dots,a_{i_n} \in M_a$ (соответственно $a_{i_1},\dots,a_{i_n} \in M_a^l$), где $a_{i_k} \in A_{i_k}$. Будем считать, что $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n$. Покажем, что для каждого a_{i_k} найдется элемент в A_{i_n}, принадлежащий $\{a_{i_k}\}^G$ (соответственно принадлежащий $\{a_{i_k}\}_l^G$), $k = 1,\dots,n$. Действительно, если $a_i \in A_i$, то по построению подмножества M_a существует элемент $a_{i+1} \in A_{i_1}$, такой что $a_{i+1} = a'_{i,j_1}\dots a'_{i,j_n}\omega_\lambda$, где $a'_{i,j_k} \in \{a_i\}^G$ ($a'_{i,j_k} \in \{a_i\}_l^G$), и следовательно, $a_{i+1} \in \{a_i\}^G$ ($a_{i+1} \in \{a_i\}_l^G$), $a_{i+1} \in A_{i+1}$. Рассуждая аналогично, получаем, что существуют элементы $b_{i_n}^{(1)}, b_{i_n}^{(2)},\dots,b_{i_n}^{(n)}$, где $b_{i_n}^{(k)} \in A_{i_n}$ и $b_{i_n}^{(k)} \in \{a_{i_k}\}^G$ ($b_{i_n}^{(k)} \in \{a_{i_k}\}_l^G$), $k = 1,\dots,n$. Но тогда найдется элемент $c = b'_1\dots b'_n\omega_\lambda$, где $b'_k \in \{b_{i_n}^{(k)}\}^G \subseteq \{a_{i_k}\}^G$ ($b'_k \in \{b_{i_n}^{(k)}\}_l^G \subseteq \{a_{i_k}\}_l^G$), такой что $c \in A_{i_n+1}$. Отсюда вытекает, что M_a — Ω-m-система (M_a — Ω-l-m-система).

Определение 1.8. Множество M_a (соответственно M_a^l) назовем *стандартной* Ω-*m-системой* (Ω-l-m-системой), соответствующей элементу a.

Теорема 1.9. *Пусть $a \in G$, где G — Ω-группа (Ω-l-группа). Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) $a \in \Omega\text{-rad}(G)$ $(a \in \Omega\text{-}l\text{-rad}(G))$;

2) *всякая Ω-m-система (Ω-m-l-система), содержащая a, содержит 0;*

3) *любая стандартная Ω-m-система (Ω-m-l-система) M_a, соответствующая элементу a, содержит 0.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из [14, 3.2, 3.3]. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) тривиальна.

3) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что $a \notin \Omega\text{-rad}(G)$ $(a \notin \Omega\text{-}l\text{-rad}(G))$, т. е. существует первичный идеал P (l-первичный идеал P), такой что $a \notin P$. Тогда для любой операции $\omega \in \Omega$ найдутся элементы $a'_1, \dots, a'_n \in \{a\}^G$ $(a'_1, \dots, a'_n \in \{a\}^G_l)$, такие что $a'_1 \dots a'_n\omega \in A_1$ и $a'_1 \dots a'_n\omega \notin P$. Таким образом, A_1 состоит из элементов, принадлежащих P. Аналогично строится A_k для любого натурального числа k. Таким образом, $M_a = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ не содержит 0, так как имеет пустое пересечение с P.

Определение 1.10. Элемент a Ω-группы G (Ω-l-группы G), удовлетворяющий одному из эквивалентных условий теоремы 1.8, назовем Ω-*строго нильпотентным* или Ω-*строго энгелевым* (Ω-l-*строго нильпотентным* или Ω-l-*строго энгелевым*).

§ 2. Приложения

2.1. Ассоциативные кольца. Пусть R — ассоциативное кольцо, $\Omega = \{\omega\}$ состоит из одного близкого кольцевого умножения $a_1a_2\omega = a_1a_2$, $\text{rad}(R)$ — первичный радикал кольца R (т. е. пересечение всех первичных идеалов). Для элемента $a \in R$ эквивалентны следующие условия:

1) $a \in \text{rad}(R)$;

1$'$) a принадлежит пересечению всех минимальных первичных идеалов;

2) элемент $a \in R$ строго нильпотентен (т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \dots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} \in a_iRa_i$, содержит нулевой элемент);

3) элемент $a \in R$ — ω-строго нильпотентен (т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \dots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} = a'_{i_1}a'_{i_2}$, a'_{i_1}, a'_{i_2} принадлежат главному идеалу (a_i), содержит нулевой элемент).

В дополнение к классической поэлементной характеризации первичного радикала $\text{rad}(R)$ (1) $\Leftrightarrow$ 2): см., например, [4]) мы привели условие 3) из теоремы 1.8, поскольку именно оно позволяет дать единообразную поэлементную характеризацию Ω-радикала в различных алгебраических структурах.

2.2. *l*-кольца. Пусть R — l-кольцо (см. [2,10]), l-rad(R) — его l-первичный радикал (т. е. пересечение всех l-первичных идеалов (см. [5, 11])). Тогда для $a \in R$ эквивалентны следующие условия:

1) $a \in l$-rad(R);

1$'$) a принадлежит пересечению всех минимальных l-первичных идеалов;

2) $|a| \in \mathrm{rad}(R)$, т. е. $|a|$ — строго нильпотентный элемент (см., например, [4]);

3) a — ω-l-строго нильпотентный элемент (т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} = a'_{i_1} a'_{i_2}$, a'_{i_1}, a'_{i_2} принадлежат l-идеалу $\{a_i\}_l^R$, порожденному элементом a_i, содержит 0);

4) a — l-строго нильпотентный элемент (т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = |a|$, $a_{i+1} = x_i y_i$ или $a_{i+1} = x_i r y_i$, где $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$, $0 \leqslant y_i \leqslant a_i$, $r \in R^+ = \{r \in R,\ r \geqslant 0\}$, содержит нулевой элемент).

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 1$'$) $\Leftrightarrow$ 3) следует из теоремы 1.8 и следствия 1.7. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) была доказана в [5]. Покажем, что 3) $\Leftrightarrow$ 4). Действительно, для последовательности из 4) следует, что $x_i, y_i \in \{a_i\}_l^R$. Таким образом, 3) $\Rightarrow$ 4). Покажем теперь, что 4) $\Rightarrow$ 3). Для последовательности из 3) получаем, что

а) $|a'_{i_j}| \leqslant n_{k_j} + r_{k_j}|a_i| + |a_i|s_{k_j} + v_{k_j}|a_i|t_{k_j}$, где $n_{k_j} \in N$, $r_{k_j}, s_{k_j}, t_{k_j}, v_{k_j} \in R^+$, $j = 1, 2$,

б) $a_{i+1} = a'_{i_1} a'_{i_2}$.

Из а) и б) вытекает, что последовательность 3) в силу 4) исчезает.

Замечание 2.3. Отметим, что кольцо, являющееся l-группой с одной Ω-операцией (кольцевым умножением) не обязательно будет l-кольцом, хотя является Ω-l-группой.

Пример. Пусть $R = \{(a, b)\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Операции и порядок определяются следующим образом:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2);$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = ((a_1 + b_1)(a_2 + b_2), (a_1 + b_1)(a_2 + b_2));$$
$$(a_1, b_1) \geqslant 0 \Leftrightarrow a_1 > 0 \ \text{ или } \ a_1 = 0,\ b_1 \geqslant 0.$$

Тогда R — линейно упорядоченная аддитивная группа, ассоциативно-коммутативное кольцо, не являющееся l-кольцом, так как $(0,1)(2,-5) = (-3,-3) < 0$, при этом R не имеет нетривиальных l-идеалов, так как любой l-идеал содержит наименьший положительный элемент $(0, 1)$ и, значит, содержит любой элемент. Таким образом, Ω-l-rad$(R) = \{0\}$, Ω-rad$(R) = \{a, -a\}$.

Замечание 2.4. Отметим, что l-кольцо — это кольцо, являющееся l-группой и такое, что для всех $a, b \in R$ справедливо соотношение $(a \cup 0)(b \cup 0) \cup 0 = (a \cup 0)(b \cup 0)$.

2.5. Группы. Пусть G — группа, $\Omega = \{\omega\}$, где ω — операция коммутирования, т. е. $ab\omega = [a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Тогда rad$(G)$ — первичный радикал группы G (см. [12]), т. е. пересечение всех первичных нормальных подгрупп группы G. Тогда для $a \in G$ эквивалентны следующие условия:

1) $a \in \mathrm{rad}(G)$;

1′) a принадлежит пересечению всех минимальных первичных нормальных подгрупп;

2) элемент $a \in G$ строго энгелев (т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} = [[b_i, a_i], a_i]$, $b_i \in G$, содержит единичный элемент);

3) элемент $a \in G$ — ω-строго энгелев (т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} = [a'_{i_1}, a'_{i_2}]$, a'_{i_1}, a'_{i_2} принадлежат нормальной подгруппе $\{a_i\}^G$, порожденной элементом a_i, содержит единичный элемент).

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) доказана в [12], эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 1′) $\Leftrightarrow$ 3) следуют из теоремы 1.8 и следствия 1.7.

2.6. *l*-группы. Пусть G — l-группа, l-$\mathrm{rad}(G)$ — ее l-первичный радикал (см. [6]), т. е. пересечение всех l-первичных идеалов. Тогда для $a \in G$ эквивалентны следующие условия:

1) $a \in l$-$\mathrm{rad}(G)$;

1′) a принадлежит пересечению всех минимальных l-первичных l-идеалов;

2) a — l-строго энгелев элемент (см. [6]), т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} = [b_i x_i b_i^{-1}, y_i]$, $b_i \in G$, $e \leqslant x_i \leqslant |a_i|$, $e \leqslant y_i \leqslant |a_i|$, содержит единичный элемент;

3) a — l-ω-строго энгелев элемент (т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = a$, $a_{i+1} = [a'_{i_1}, a'_{i_2}]$, a'_{i_1}, a'_{i_2} принадлежат l-идеалу $\{a_i\}^G_\omega$, порожденному элементом a_i, содержит единичный элемент);

4) a — l-строго нильпотентный элемент (т. е. любая последовательность $a_0, a_1, \ldots$, где $a_0 = |a|$, $a_{i+1} = [x_i, y_i]$ или $a_{i+1} = [x_i, [b_i, y_i]]$, $e \leqslant x_i \leqslant |a_i|$, $e \leqslant y_i \leqslant |a_i|$, $b_i \in G_+$, содержит единичный элемент).

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) доказана в [6]. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 1′) $\Leftrightarrow$ 3) следует из теоремы 1.8 и следствия 1.7. Покажем, что 1) $\Leftrightarrow$ 4). Сначала докажем, что 4) $\Rightarrow$ 1). Допустим противное, пусть a удовлетворяет условию 4), но $a \notin l$-$\mathrm{rad}(G)$. Следовательно, существует l-первичный l-идеал P, такой что $a \notin P$.

Как и в доказательстве теоремы 5 из [6], существуют $e \leqslant c \leqslant v|a|v^{-1}$, $e \leqslant d \leqslant t|a|t^{-1}$, $v, t \in G$, такие что $[c, d] \notin P$.

Пусть $e \leqslant x \leqslant v^{-1}cv$, $e \leqslant y \leqslant t^{-1}dt$. Тогда $c = vxv^{-1}$, $d = tyt^{-1}$ и $vxv^{-1}tyt^{-1} = [c, d] \notin P$. Если $[x, y] \notin P$, то положим $a_1 = [x, y] \notin P$. Если же $[x, y] = p \in P$, то для $b = v^{-1}t$ имеем $vxbyb^{-1}x^{-1}y^{-1}t^{-1} = [c, d] \notin P$. Тогда $[x, [b, y]] = xbyb^{-1}y^{-1}x^{-1}yby^{-1}b^{-1} = xbyb^{-1}x^{-1}pby^{-1}b^{-1} = v^{-1}[c, d]v \notin P$, и мы положим $a_1 = [x, [b, y]] \notin P$.

Повторяя эту процедуру, мы получаем противоречие с 4).

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 4) доказывается стандартным образом с использованием леммы Цорна.

2.7. *R*-модули. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, N — унитарный левый R-модуль. Тогда N может быть рассмотрен как Ω-группа, где $\Omega = \{\omega_r,\ r \in R \mid a\omega_r = ra\,\forall a \in N\}$. В этом случае I — Ω-идеал тогда и только тогда, когда I — подмодуль в N. Поэтому $\{a\}^N_\Omega = Ra$.

Теорема 2.8. *Для Ω-идеала P R-модуля N эквивалентны следующие условия:*

1) из $rI \subseteq P$, где $r \in R$, I — идеал в N, следует, что $I \subseteq P$ (т. е. подмодуль N Ω-первичен);

2) из $sRa \subseteq P$, где $s \in R$, $a \in N$, следует, что $a \in P$;

3) из $a \notin P$ следует, что найдется элемент $s \in R$, такой что $sRa \nsubseteq P$.

Доказательство. Эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 3) очевидна. Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $sRa \subseteq P$ для некоторого $s \in R$. Так как Ra — Ω-идеал в N, то из 1) следует, что $Ra \subseteq P$, и следовательно, $a \in P$, так как N — унитарный модуль. Обратно, пусть справедливо 2), $rI \subseteq P$, $a \in I$. Тогда $Ra \subseteq I$, и поэтому $rRa \subseteq P$. В силу 2) $a \in P$, т. е. $I \subseteq P$.

Для R-модуля N и $a \in N$ стандартная Ω-m-система M_a, как вытекает из ее конструкции, имеет следующий вид: $M_a = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}$, $A_0 = a$, $A_i = \bigcup\limits_{r \in R} A_{i,r}$ при $i \geqslant 1$, где $A_{i,r} = \{rs_{i-1}a_{i-1} \mid s_i$ — некоторый элемент из R, $a_{i-1} \in A_{i-1}\}$.

Для $a \in N$ эквивалентны следующие условия:

1) $a \in \Omega\text{-rad}(N)$;

1$'$) a принадлежит пересечению всех минимальных Ω-первичных идеалов R-модуля N;

2) a — Ω-строго нильпотентный элемент, т. е. любое множество $M_a = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$, где $A_0 = a$, $A_i = \bigcup\limits_{r \in R} A_{i,r}$ при $i \geqslant 1$, $A_{i,r} = ra'_{i-1}$, $a'_{i-1} \in \{a_{i-1}\}^N$, содержит нулевой элемент;

3) для любой последовательности $\{s_n\} \subseteq R$ найдется такая последовательность $\{r_n\} \subseteq R$, что $\{a_i\}$, где $a_0 = a$, $a_i = r_{i-1}s_{i-1}a_{i-1}$ при $i \geqslant 1$, содержит нулевой элемент.

Эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 1$'$) $\Leftrightarrow$ 2) вытекают из теоремы 1.8 и следствия 1.7. Эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 3) — следствие конструкции M_a для R-модуля.

2.9. *R-l*-модули. Пусть N — унитарный левый R-модуль и, кроме того, R — l-кольцо с $1 \in R^+$, N — l-группа, при этом $ra \in R^+$ для любых $r \in R^+$, $a \in N^+$. Пусть $\Omega = \{\omega_r \mid r \in R^+\}$, где $a\omega_r = ra$ для $a \in N^+$. Ω-l-идеалы в N — это в точности подмодули модуля N, являющиеся одновременно l-идеалами l-группы N. Ясно, что $\{a\}_l^N = \{x \in N \mid |x| \leqslant r|a|,\ r \in R^+\}$.

Теорема 2.10. *Для Ω-l-идеала P R-l-модуля N эквивалентны следующие условия:*

1) P — Ω-l-первичный, т. е. из $rI \subseteq P$, где $r \in R^+$, I — l-идеал в N, следует, что $I \subseteq P$;

2) из $rR^+|a| \subseteq P$, где $r \in R^+$, $a \in N$, следует, что $a \in P$;

3) из $a \notin P$ следует, что найдется такой элемент $r \in R^+$, что $rR^+|a| \nsubseteq P$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $rR^+|a| \subseteq P$ для некоторого $r \in R^+$. Если $x \in \{a\}_l^N$, то $|x| \leqslant s|a|$ для некоторого $s \in R^+$. Поэтому $|rx| \leqslant r|x| \leqslant rs|a| \in P$. Таким образом, $r\{a\}_l^N \subseteq P$, и в силу 1) $a \in P$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $rI \subseteq P$, где $r \in R^+$, $a \in I$. Тогда $r\{a\}_l^N \subseteq P$, т. е. $rx \in P$ для любого элемента $x \in \{a\}_l^N$. Так как все элементы вида $s|a| \in \{a\}_l^N$ при $s \in R^+$, то $rR^+|a| \subseteq P$ и по 2) $a \in P$. Таким образом, $I \subseteq P$. Очевидно, что 2) $\Leftrightarrow$ 3).

Для элемента $a \in N$, где N — R-l-модуль, эквивалентны следующие условия:

1) $a \in \Omega$-l-$\mathrm{rad}(N)$;

1$'$) a принадлежит пересечению всех минимальных Ω-l-первичных l-идеалов R-l-модуля N;

2) a — Ω-l-строго нильпотентный элемент, т. е. любая стандартная Ω-l-m-система M_a содержит нулевой элемент;

3) для любой последовательности $\{s_n\} \subseteq R^+$ найдется последовательность $\{r_n\} \subseteq R^+$, такая что $\{a_i\}$, где $a_0 = |a|$, $a_i = r_{i-1}s_{i-1}a_{i-1}$ для $i \geqslant 1$, содержит нулевой элемент.

Эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 1$'$) $\Leftrightarrow$ 2) вытекают из теоремы 1.8 и следствия 1.7. Покажем 2) $\Leftrightarrow$ 3). Так как $M_a = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}$, $A_0 = a$ и $A_i = \bigcup\limits_{r \in R^+} A_{i,r}$, где $A_{i,r} = \{ra'_{i-1} \mid r \in R^+,\ a'_{i-1} \in \{a_{i-1}\}_l^N\}$, то для последовательности $\{a_i\}$ из 3) r_i можно всегда подобрать так, чтобы $0 \in \{a_i\}$. Обратно, если выполнено 3), то так как $|a'_{i-1}| \leqslant s_{i-1}|a_{i-1}|$ для любого a'_{i-1}, где $s_{i-1} \in R^+$, $a_{i-1} \in A_{i-1}$, то $|r_i a'_{i-1}| \leqslant r_i s_i |a_{i-1}|$, откуда и вытекает, что множество M_a содержит нулевой элемент.

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: 1984.

[3] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: ФМ, 1962.

[4] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1978.

[5] Михалев А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно-упорядоченных колец // Сборник работ по алгебре. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178–184.

[6] Михалев А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно-упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1990. — № 2. — С. 84–86.

[7] Рябухин Ю. М. Радикалы Ω-групп. Общая теория // Матем. исслед. — 1968. — Т. 3, вып. 2. — С. 123–160.

[8] Рябухин Ю. М. Идеально наследственные радикалы // Матем. исслед. — 1968. — Т. 3, вып. 4. — С. 108–135.

[9] Рябухин Ю. М. Специальные и квазиспециальные радикалы // Матем. исслед. — 1969. — Т. 4, вып. 1. — С. 110–131.

[10] Фукс Л. Частично-упорядоченные алгебраические системы // М.: Мир, 1968.

[11] Шаталова М. А. К теории радикалов в структурно-упорядоченных кольцах // Матем. заметки. — 1968. — Т. 4, № 6. — С. 639–648.

[12] Щукин К. К. PI-разрешимый радикал группы // Матем. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021–1031.

[13] Birkhoff G., Pierce R. S. Lattice-ordered rings // An. Acad. Brasil. Ci. — 1956. — V. 28. — P. 41–69.

[14] Buys A., Gerber G. K. The prime radical for Ω-groups // Commun. Algebra. — 1982. — V. 10. — P. 1089–1099.

[15] Buys A., Gerber G. K. Prime and k-prime ideals in Ω-groups // Questions Math. — 1985. — V. 8, No. 1. — P. 15–32.

[16] Buys A., Gerber G. K. Nil and s-prime Ω-groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1985. — V. 38. — P. 222–229.

[17] Buys A. Radicals of Ω-groups // Contr. to General Algebra, 4. Radical theory and applications. — Wien, 1987. — P. 23–36.

[18] Higgins C. J. Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. — 1956. — V. 6. — P. 366–416.

Статья поступила в редакцию в декабре 1996 г.