Е. В. Воскресенский, Асимптотика решений по малому параметру и управляемые системы,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 25–33

11. Reddy A. R. A contribution to best approximation in the L^2 norm // J. Approxim. Theory.— 1974.— V. 11.— № 2.— P. 110—117.

12. Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И. О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // ДАН СССР.— 1976.— Т. 227.— № 2.— С. 280—283.

13. Zygmund A. On the boundary values of functions of several complex variables // Fundam. Math.— 1949.— V. 36.— P. 207—235.

14. Еремин С. А. Некоторые вопросы приближения функций многих комплексных переменных.— Киев, 1958.— 144 с.

15. Темляков А. А. Целые функции двух комплексных переменных // М., Учен. зап. Обл. пед. ин-та.— 1954.— Т. 20.— С. 7—16.

16. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного 3переменного.— М.— Л.: Наука, 1964.— 438 с.

17. Yamashita S. Hardy norm Bergman norm and univalency // Ann. Pol. math.— 1983.— V. 43.— № 1.— P. 23—33.

18. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 511 с.

19. Тиман М. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.— 624 с.

20. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 20 с.

г Днепропетровск

Поступила 29.03.1990

Е. В. Воскресенский

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ И УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Введение

Рассмотрим множество Ξ уравнений вида

$$dy/dt = \varphi(t, y, \varepsilon), \tag{1}$$

где $T_0 \leqslant t < +\infty$, $y \in R^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varphi \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times (0, \varepsilon_0], R^n)$, $y(t : t_0, y_0, \varepsilon)$, $y(t_0 : t_0, y_0, \varepsilon) = y_0$ — решение уравнения (1), определенное при любом $t_0 \geqslant T_0$ и любых $y_0 \in R^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Это множество содержит сингулярно возмущенные уравнения. Приближенное интегрирование здесь происходит следующим образом: решения $y(t : t_0, y_0, \varepsilon)$ заменяются решениями уравнения сравнения [1], также принадлежащего множеству Ξ. Чаще всего в качестве такого уравнения берется усредненное уравнение [1]. Однако в некоторых случаях оно наследует от первоначальной задачи те же трудности, и тогда необходимо перейти к новому уравнению сравнения. В общем случае здесь ситуация такая: на множестве Ξ рассматривается полугруппа преобразований (PG, Ξ) с единицей, которая индуцирует отношение эквивалентности ρ; в классе эквивалентности, где находится уравнение (1), ищется простейшее, которое берется в качестве уравнения сравнения. Подбор подходящей полугруппы (PG, Ξ) и уравнения сравнения — основная задача интегрирования.

Эту задачу будем решать следующим образом. Предположим, что уравнение (1) допускает представление

$$dy/dt = f(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon), \tag{2}$$

где $f, g \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times S_c \times (0, \varepsilon_0], R^n)$, $\psi \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times (0, \varepsilon_0], S_c)$, $S_c = \{z : \|z\| \leqslant c,\ 0 \leqslant c \leqslant +\infty,\ z \in R^m\}$, $m \leqslant n$, для некоторой последовательности $\{t_k\}$, $t_k \to T_1$ при $k \to +\infty$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \psi(t_k, \gamma, \varepsilon) = \lambda^*(\gamma, \varepsilon)$ для всех $\gamma \in R^n$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $T_0 < T_1 \leqslant +\infty$.

При $c = +\infty$ и $\lambda^*(\gamma, \varepsilon) = \infty$ будем считать, что

$$\lim_{k \to +\infty} f(t, x, \psi(t_k, \gamma, \varepsilon), \varepsilon) = f_1(t, x, \varepsilon),$$

$$f_1 \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times (0, \varepsilon_0], R^n), \quad f(t, x, \lambda^*(\gamma, \varepsilon), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(t, x, \varepsilon)$$

при всех $T_0 \leqslant t < +\infty$, $x \in R^n$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\gamma \in R^n$.

Требуется на множестве $T_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_1$ с точностью ε_1 найти решение $y(t:\tau, \gamma, \varepsilon)$ при всех достаточно малых ε.

Считая функции g и ψ известными, будем рассматривать уравнение

$$dx/dt = f(t, x, \lambda^*(\gamma, \varepsilon), \varepsilon) \tag{3}$$

в качестве уравнения сравнения. В эту схему укладывается классический метод усреднения [1]. Более того, рассматривая различные представления вида (2), можно получать различные уравнения сравнения. Поэтому здесь появляется возможность выбора простейшего из них. И еще. Возможность представления уравнения движения в виде (2) позволяет решать некоторые задачи об управляемости.

§ 1. Асимптотика решений по малому параметру

Рассмотрим уравнения [2], [3]:

$$dx/dt = f(t, x, \psi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon), \tag{4}$$

$$dx/dt = f(t, x, \lambda^*(\gamma, \varepsilon), \varepsilon), \tag{5}$$

$$dy/dt = f(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon), \tag{6}$$

где $f, g \in C([T_0, +\infty) \times R^n \times S_c \times (0, \varepsilon_0], R^n)$, $\tau \geqslant T_0 \geqslant 0$, $T_1 = +\infty$,

$$S_c = \{z : z \in R^m, \ \|z\| \leqslant c, \ 0 < c \leqslant +\infty\};$$

$$\psi \in C^{(1,0,0)}([T_0, +\infty) \times (0, \varepsilon), S_c); \ \lambda^*(\gamma, \varepsilon) = \lim_{k \to +\infty} \psi(t_k, \gamma, \varepsilon)$$

для некоторой последовательности $\{t_k\}$, $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и всех $\gamma \in R^n$; при всех $T_0 \leqslant t < +\infty$, $x \in R^n$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ существуют непрерывные частные производные f_x и $f_\lambda (\lambda = \psi(t, x, \varepsilon))$.

Еще раз заметим, что уравнение (6) является представлением уравнения (1), уравнение (5) — уравнение сравнения.

Введем обозначения: $x(t) = x(t:\tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon)$ — решение уравнения (5), $x(\tau:\tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon) = \gamma$, $y(t) = y(t:\tau, \gamma_0, \varepsilon)$ — решение уравнения (6), $y(\tau:\tau, \gamma_0, \varepsilon) = \gamma_0$, $x(t:T, y_T(T), \psi(T, y_T(T), \varepsilon), \varepsilon)$ — решение уравнения (4), $y_T(T) = x(T:\tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} x(T, \lambda^*)$, $T \geqslant \tau \geqslant T_0$, $x(t:\tau, \gamma, \psi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon)$ — решение уравнения (4).

Так как на общем множестве существования решений имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} x(t:s, y(s), \psi(s, y(s), \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial \gamma} y'(s) + \\ &+ \frac{\partial x}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} y'(s)\right) = \frac{\partial x}{\partial s} + \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right) y'(s) + \\ &+ \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \gamma} g + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} f + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} g + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial s}, \ \beta = y(s),\end{aligned}$$

то отсюда интегрированием на компакте $[\tau, t]$ получим

$$\int_\tau^t \frac{d}{ds} x(t:s, y(s), \psi(s, y(s), \varepsilon), \varepsilon) ds = \int_\tau^t H_1 ds,$$

где $H_1 = \frac{\partial x}{\partial \gamma} g + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} f + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} g + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial s}$. Поэтому

$$y(t) = x(t:\tau, \gamma, \psi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon) + \int_\tau^t H_1 ds, \quad \tau \leqslant t < \tau + \delta, \tag{7}$$

где δ — некоторое положительное число. Формула (7) является обобщением формулы Алексеева [3].

Теорема 1. *Пусть решение* $x(t:\tau,\gamma,\lambda^*,\varepsilon)$ *ограничено при* $\tau\leqslant t<+\infty$ *и* $\|x(t:\tau,\gamma,\lambda^*,\varepsilon)\|\leqslant K(\tau,\gamma)$, $\tau\leqslant t<+\infty$. *Тогда если*:

1) $$\left\|\frac{\partial x}{\partial\gamma}(t:s,\ y_0(s),\ \psi(s,\ y_0(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\,g(s,\ y_0(s),\ \psi(s,\ y_0(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant W_1(t,\ s,\ \|y_0(s)\|,\ \varepsilon)\ \forall y_0\in C([\tau,\ +\infty),\ R^n);$$

2) $$\left\|\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t:s,\ y_0(s),\ \psi(s,\ y_0(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\frac{\partial\psi}{\partial\beta}(s,\ y_0(s),\ \varepsilon)\,f(s,\ y_0(s),\right.$$
$$\lambda^*(y_0(s),\ \varepsilon)+\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t:s,\ y_0(s),\ \psi(s,\ y_0(s),\varepsilon),\ \varepsilon)\frac{\partial\psi}{\partial\beta}(s,\ y_0(s),\varepsilon)\,g(s,\ y_0(s),$$
$$\left.\psi(s,\ y_0(s),\varepsilon),\varepsilon)+\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t:s,\ y_0(s),\ \psi(s,\ y_0(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,\ y_0(s),\varepsilon)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant W_2(t,\ s,\ \|y_0(s)\|,\ \varepsilon)\ \forall y_0\in C([\tau,\ +\infty),\ R^n);$$

3) $J_i(t,r,\varepsilon)=\int\limits_t^{+\infty}W_i(t,\ s,\ r,\ \varepsilon)ds$, $i=1,\ 2$, *существуют при всех* $\tau\leqslant t<+\infty$, $r\geqslant 0$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$; $J_i(t,\ r,\ \varepsilon)\leqslant K(r,\ \varepsilon_0)<+\infty$ *при* $t\geqslant\tau$ *и каждом* r *и* ε; $J_i(t,\ r,\ \varepsilon)\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$ *равномерно по* t, $W_i\in C([T_0,\ +\infty)\times[T_0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty)\times(0,\ \varepsilon_0],\ [0,\ +\infty))$, $W_i(t,\ s,\ r_1,\ \varepsilon)\leqslant W_i(t,\ s,\ r_2,\ \varepsilon)$ *при* $r_1\leqslant r_2$ *и*

$$\forall\ (t,\ s,\ \varepsilon)\in[T_0,\ +\infty)\times[T_0,\ +\infty)\times(0,\ \varepsilon_0],\quad i=1,\ 2;$$

4) $\sup\limits_{\tau\leqslant t\leqslant t_k}\|x(t:t_k,\ x(t_k,\ \lambda^*),\ \psi(t_k,\ x(t_k,\ \lambda^*),\ \varepsilon),\ \varepsilon)-x(t,\ \lambda^*)\|\to 0$ *при* $t_k\to+\infty$ $\forall\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$,

то при достаточно малом ε_0 *и* $\forall\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ ***найдется такое решение*** $y(t:\tau,\ \gamma_0,\ \varepsilon)$ ***уравнения*** (6), ***что***

$$y(t:\tau,\ \gamma_0,\ \varepsilon)=x(t:\tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon)-\int\limits_t^{+\infty}H_1ds,\tag{8}$$

$\int\limits_t^{+\infty}H_1ds=O(1)$ *при* $t\to+\infty$, $\int\limits_t^{+\infty}H_1ds=o(1)$ *при* $\varepsilon\to 0$ *равномерно по* t, *и наоборот, для каждого решения уравнения* (6) $y(t:\tau,\ \gamma_0,\ \varepsilon)$, $\|y(t:\tau,\ \gamma_0,\ \varepsilon)\|\leqslant K_1(\tau,\ \gamma_0)$, $\tau\leqslant t<+\infty$, *при достаточно малом* $\varepsilon_0>0$ *существует решение* $x(t:\tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon)$ *уравнения* (5) *такое, что справедливо равенство* (8) $\forall\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$.

Доказательство. Рассмотрим множество функций

$$B_{\rho_0}=\{y:y\in c([\tau,\ +\infty),\ R^n),\ \|y\|\leqslant\rho_0\},\tag{9}$$

где $K(\tau,\ \gamma)\leqslant\rho_0/2$.

Ясно, что B_{ρ_0} — замкнутый шар банахова пространства всех непрерывных и ограниченных функций, определенных на множестве $[\tau,\ +\infty)$ со значениями в R^n.

Введем оператор

$$(Пy)(t)=x(t)-\int\limits_t^{+\infty}H_1(t,\ s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)ds,\tag{10}$$

$y\in B_{\rho_0}$. Тогда при достаточно малом ε_0 $\|(Пy)(t)\|\leqslant\rho_0$, т. е. $П:B_{\rho_0}\to B_{\rho_0}$. Так как

$$x(t:s,\ y_n(s),\ \lambda^*,\ \varepsilon)\to x(t:s,\ y(s),\ \lambda^*,\ \varepsilon),$$
$$\frac{\partial x}{\partial\gamma}(t:s,\ y_n(s),\ \psi(s,\ y_n(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\to\frac{\partial x}{\partial\gamma}(t:s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon),$$

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t:s,\ y_n(s),\ \psi(s,\ y_n(s),\varepsilon),\ \varepsilon)\to\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t:s,\ y(s),\ \psi(s,y(s),\varepsilon),\varepsilon),$$

$$g(s,\ y_n(s),\ \psi(s,\ y_n(s),\varepsilon),\varepsilon)\to g(s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\varepsilon),\varepsilon)$$

при $y_n\to y$, $n\to+\infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве из $[\tau,\ +\infty)$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\Pi y_n=\Pi y$ в топологии пространства B. Следовательно, оператор Π непрерывен на B_{ρ_0}.

Докажем равностепенную непрерывность семейства ΠB_{ρ_0} на каждом компактном множестве $[a,\ b]\subset[\tau,\ +\infty)$. Пусть $a\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b$. Обозначим левые части неравенств 1) и 2) соответственно через $\|H_2(t,\ s,\ y_0(s),\ \psi(s,\ y_0(s),\varepsilon),\varepsilon)\|$ и $\|H_3(t,s,y_0(s),\ \psi(s,\ y_0(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon\|$. Тогда если $\|x(t_1)-x(t_2)\|<\varepsilon_1/2$ и $y_0\in B_{\rho_0}$, то

$$\|(\Pi y)(t_1)-(\Pi y)(t_2)\|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}+\int\limits_{t_1}^{t_2}\|H_2(t_2,\ s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\varepsilon)\|ds+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\|H_3(t_2,\ s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\varepsilon)\|ds+\int\limits_{t_1}^{+\infty}\left\|\left[\frac{\partial x}{\partial\gamma}(t_2,\ s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\varepsilon),\varepsilon)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial x}{\partial\gamma}(t_1,\ s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\right]g(s,\ y(s),\varepsilon),\varepsilon\right\|ds+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{+\infty}\left\|\left[\frac{\partial x}{\partial\lambda}\ (t_2,\ s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\varepsilon),\ \varepsilon)-\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t_1,s,\ y(s),\ \psi(s,\ y(s),\varepsilon),\varepsilon)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}f+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}g+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\right\|ds.$$

Применяя теорему о среднем и известные соотношения для матрицы f_x, получим

$$\|(\Pi y)(t_1)-(\Pi y)(t_2)\|\leqslant\varepsilon_1/2+|t_1-t_2|\,\{W_1(t_2,\ \zeta,\ \rho_0,\ \varepsilon)+W_2(t_2,\ \zeta,\ \rho_0,\ \varepsilon)\}+$$

$$+|t_1-t_2|\int\limits_{t_1}^{+\infty}\Big\|f_x(\sigma_1(s),\ \ x(\sigma_1(s):s,\ \ y(s),$$

$$\psi(s,\ y(s),\varepsilon),\varepsilon),\ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\frac{\partial x}{\partial\gamma}(\sigma_1(s):s,\ y(s),\ \ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\varepsilon)g\Big\|ds+$$

$$+|t_1-t_2|\int\limits_{t_1}^{+\infty}\Big\|f_x(\sigma_2(s),\ \ x(\sigma_2(s):s,\ \ y(s),\ \ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon),$$

$$\psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\frac{\partial x}{\partial\lambda}(\sigma_2(s):s,\ y(s),\ \ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon),\ \ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\times$$

$$\times\frac{\partial x}{\partial\lambda}(\sigma_2(s):s,\ \ y(s),\ \ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)+f_x(\sigma_2(s),\ \ x(\sigma_2(s):s,\ \ y(s),$$

$$\psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon),\ \ \psi(s,\ y(s),\ \varepsilon),\ \varepsilon)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}f+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}g+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\Big\|ds,$$

где $\zeta,\ \sigma_1(s),\ \ \sigma_2(s)\in[t_1,\ t_2]$. Отсюда следует, что при $|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon_1)$

$$\|(\Pi y)(t_1)-(\Pi y)(t_2)\|<\varepsilon_1,\ \varepsilon_1>0.$$

Для оператора Π в B_{ρ_0} выполняются все условия принципа Шаудера. Поэтому он имеет неподвижную точку, $\Pi y=y$, $y\in B_{\rho_0}$. Это означает, что интегральное уравнение

$$y(t)=x(t)-\int_t^{+\infty} H_1\,ds \tag{11}$$

имеет решение, принадлежащее B_{ρ_0}.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y^*_{t_k}(t)=x(t:t_k,\ y_{t_k}(t_k),\ \psi(t_k,\ y_{t_k}(t_k),\ \varepsilon),\ \varepsilon)-$$

$$-\int_t^{t_k} H_1\ (t_k,\ s,\ y^*_{t_k}(s),\ \ \psi(s,\ y^*_{t_k}(s),\ \varepsilon),\varepsilon)ds,\quad \tau\leqslant t\leqslant t_k.$$

Применением принципа Шаудера точно так же, как и для уравнения (11), доказывается существование решения этого уравнения. Непосредственным дифференцированием $y^*_{t_k}(t)$ доказывается, что эта вектор-функция является решением уравнения (6).

Рассмотрим семейство $Q=\{\bar y_{t_k}(t),\ t_k\geqslant\tau\}$, где $\bar y_{t_k}(t)=\begin{cases} y^*_{t_k}(t), & \tau\leqslant t\leqslant t_k; \\ y^*_{t_k}(t_k), & t_k\leqslant t<+\infty. \end{cases}$

Это семейство компактно на каждом сегменте множества $[\tau,\ +\infty)$. Поэтому на каждом компакте существует расходящаяся последовательность $T_n\to+\infty$ такая, что $\bar y_{T_n}(t)\to y(t)$ при $n\to+\infty$ равномерно по переменной t. Так как $y^*_{T_n}(t)$ — решение уравнения (6), то предельная функция $y(t)$ — также решение этого уравнения на рассматриваемом компакте. Рассматривая всевозможные пересекающиеся компакты, дающие в объединении множество $[\tau,\ +\infty)$, получим, что функция $y(t)$ определена при $t\geqslant\tau$ и является решением уравнения (6).

Так как

$$\|y^*_{t_k}(t)-x(t:\tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon)\|\leqslant\Big\|x(t:t_k,\ y_{t_k}(t_k),\ \ \psi(t_k,\ \ y_{t_k}(t_k),\ \varepsilon),\ \varepsilon)-$$

$$-x(t:\tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon)\Big\|+\int_t^{t_k}\|H_1\|ds,$$

то на основании условий теоремы получим

$$y(t)=x(t:\tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon)-\int_t^{+\infty}H_1ds.$$

Пусть $y(t:\tau,\ \gamma_0,\ \varepsilon)=y(t)$ — решение уравнения (6) и $\|y(t:\tau,\ \gamma_0,\ \varepsilon)\|\leqslant$ $\leqslant K_2(\tau,\ \gamma_2)$, $t\geqslant\tau$. Непосредственным дифференцированием доказывается, что функция

$$x_{t_k}(t)=y^{t_k}(t)+\int_t^{t_k}H_1ds,$$

где $y^{t_k}(t)=y(t:t_k,\ y(t_k),\ \varepsilon)$, при $\tau\leqslant t\leqslant t_k$ удовлетворяет уравнению (4). Тогда при $t_k\to+\infty$ получим

$$x(t:\tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon)=y(t:\tau,\ \gamma_0,\ \varepsilon)+\int_t^{+\infty}H_1ds,$$

и тем самым завершаем доказательство.

В теореме 1 речь идет о близости ограниченных решений уравнений (5) и (6). Однако эти теоремы не гарантируют близости всех решений (5) и (6) с достаточно близкими начальными данными. Такая ситуация возможна при дополнительных условиях.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1, $T:(0, \varepsilon_0] \to R^1_+$, $R^1_+ = [0, +\infty)$ *и для любой непрерывной вектор-функции* $y \in C([\tau, T(\varepsilon)], R^n)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$,

$$\sup_{\tau \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)} \left\| \int_t^{T(\varepsilon)} H_1(t, s, y(s), \psi(s, y(s), \varepsilon), \varepsilon) ds \right\| = \Phi(\varepsilon) \to 0 \tag{12}$$

при $\varepsilon \to 0$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (y(t: T(\varepsilon), y_T(T), \varepsilon) - x(t: T(\varepsilon), y_T(T), \psi(T, y_T(T), \varepsilon), \varepsilon)) = 0 \tag{13}$$

равномерно по $t \in [\tau, T(\varepsilon)]$.

Доказательство. Непосредственным дифференцированием устанавливается равенство

$$y(t: T(\varepsilon), y_T(T), \varepsilon) = x(t: T(\varepsilon), y_T(T), \psi(T, y_T(T), \varepsilon), \varepsilon) - \int_t^{T(\varepsilon)} H_1 ds, \tau \leqslant t \leqslant T(\varepsilon). \tag{14}$$

Тогда с учетом условия (12) получим предельный переход (13).

Теорема 3. *Пусть* $T:(0, \varepsilon_0] \to R^1$, *выполняются условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1, $\|x(t: T, y_T(T), \psi(T, y_T(T), \varepsilon), \varepsilon)\| \leqslant K_1$ *при всех* $\tau \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $W_i \in C([T_0, +\infty) \times [T_0, +\infty) \times [0, +\infty) \times (0, \varepsilon_0], [0, +\infty))$, $i = 1, 2$, $W_i(t, s, r_1, \varepsilon) \leqslant W_i(t, s, r_2, \varepsilon)$ *при* $r_1 \leqslant r_2$ *и всех* $t, s \geqslant T_0$, $r_1 \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. *Тогда если*

$$\sup_{\tau \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)} \int_t^{T(\varepsilon)} (W_1(t, s, k_1, \varepsilon) + W_2(t, s, k_1, \varepsilon)) ds = \Phi(\varepsilon) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (y(t: T(\varepsilon), y_T(T), \varepsilon) - x(t: T(\varepsilon), y_T(T), \psi(T, y_T(T), \varepsilon), \varepsilon)) = 0$$

равномерно по $t \in [\tau, T(\varepsilon)]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(r) = \begin{cases} \min(1, 2k_1/r), & r \neq 0; \\ 1 & , r = 0, \end{cases}$$

и уравнение

$$y(t) = x(t: T, y_T(T), \psi(T, y_T(T), \varepsilon), \varepsilon) - \int_t^{T(\varepsilon)} H_1(t, s, \varphi(\|y(s)\|) y(s),$$

$$\psi(s, y(s), \varepsilon), \varepsilon) ds. \tag{15}$$

Тогда при достаточно малом ε_0 решения уравнения (14) и (15) совпадают при $\tau_0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$. Поэтому $\|y(t)\| \leqslant K_1$ при $\tau \leqslant t \leqslant T(\varepsilon)$. Отсюда и из равенства (14) вытекает доказательство теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1 *и решение* $y(t: \tau, \gamma, \varepsilon)$ *равномерно по* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *устойчиво при* $t \geqslant \tau$. *Тогда при любом* $\varepsilon_1 > 0$ *существуют такие числа* $\delta > 0$, ε_0, *что при любом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и при* $\|\gamma - y_0\| < \delta$ *справедливо неравенство*

$$\|y(t: \tau, y_0, \varepsilon) - x(t: \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon)\| < \varepsilon_1, \quad t \geqslant \tau.$$

Доказательство. Так как справедливо равенство

$$y(t: \tau, \gamma_0, \varepsilon) = x(t: \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon) - \int_t^{+\infty} H_1 ds,$$

то при достаточно малом ε_0 величина $\|\gamma_0 - \gamma\|$ меньше малого наперед заданного числа. Отсюда и из устойчивости решения $y(t: \tau, \gamma, \varepsilon)$ вытекает утверждение теоремы.

Пусть выполняются условия теоремы 1. Рассмотрим при $y \in C([T_0, +\infty), R^n)$, $\|y\| \leqslant \rho$ уравнение

$$\frac{dz}{dt} = f\Big(t, z + x(t) - \int_t^{+\infty} H_1 ds, \ \psi\big(t, z + x(t) - \int_t^{+\infty} H_1 ds, \varepsilon\big), \varepsilon\Big) +$$

$$+ g\Big(t, z + x(t) - \int_t^{+\infty} H_1 ds, \ \psi\big(t, z + x(t) - \int_t^{+\infty} H_1 ds, \varepsilon\big), \varepsilon\Big) -$$

$$- f(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) - g(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} F(t, z, x, y, \varepsilon). \tag{16}$$

Предположим, что $g \in C([T_0, +\infty) \times [T_0, +\infty) \times [T_0, +\infty), R^1)$, $W \in C([T_0, +\infty) \times R^n, R^n_+)$, $W(t, \cdot)$ — локально липшицева по второй переменной при любом $t \in [T_0, +\infty)$. Кроме того, для любой функции $y \in C([T_0, +\infty), R^n)$, $\|y\| \leqslant \rho$:

1) $W(t+h, z + hF(t, z, x, y, \varepsilon)) \leqslant W(t, z) + hg(t, W(t, z)) + o(h)$ при $h \to 0$;

2) $\|z\| \leqslant W_2(t, z) \ \forall t \in R^1_+$.

Теорема 5. *Пусть для уравнения* (6) *выполняются условия* (16) *с пп.* 1) *и* 2). *Тогда если уравнение*

$$dr/dt = q(t, r, \varepsilon_0) \tag{17}$$

имеет устойчивое решение $r = 0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (y(t : \tau, \gamma, \varepsilon) - x(t : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon)) = 0 \tag{18}$$

равномерно по $t \in [\tau, +\infty)$.

Доказательство. При достаточно малом ε_0 и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует функция $y(t)$, которая является решением уравнения (6) при $t \geqslant \tau$. Кроме того, решение $z = 0$ уравнения (16) при фиксированной функции $y(t)$, являющейся решением уравнения (6), на основании принципа сравнения [4] является устойчивым. Поэтому решение $y(t)$ устойчиво. Отсюда и из теоремы 1 вытекает равенство (18).

Предположим, что исследуемое уравнение имеет вид (1) и $T_0 > 0$. Пусть

$$f_0(t, y, \varepsilon) = \frac{1}{t} \int_{T_0}^{t} \varphi(s, y, \varepsilon) ds \quad \forall y \in R^n \text{ и } \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Тогда

$$\varphi(t, y, \varepsilon) = \frac{1}{t} \int_{T_0}^{t} \varphi(s, y, \varepsilon) ds + t f'_{0_t}(t, y, \varepsilon),$$

и уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \int_{T_0}^{t} \varphi(s, y, \varepsilon) ds + t f'_{0_t}(t, y, \varepsilon).$$

Пусть уравнение (5) имеет вид

$$dx/dt = R(x, \varepsilon), \tag{19}$$

а уравнение (4) —

$$\frac{\partial x}{dt} = \frac{1}{\tau} \int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, y, \varepsilon) ds,$$

$$g(t, y, \psi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) = t f'_{0_t}(t, y, \varepsilon), \quad \psi(t, y, \varepsilon) = t.$$

Так как уравнение (19) является усредненным [1], то отсюда вытекает, что оно входит в множество уравнений сравнения вида (5). Поэтому в рассмотренном методе асимптотического интегрирования уравнения (6) метод усреднения содержится как частный случай.

Если уравнение (6) запишем в виде

$$dy/dt = P(t,\ y,\ \varepsilon)\psi_1(t,\ y,\ \varepsilon) + p(t,\ y,\ \varepsilon)\psi_1(t,\ y,\ \varepsilon), \tag{20}$$

где $P(t,\ y,\ \varepsilon) = f(t,\ y,\ \psi(t,\ y,\ \varepsilon),\ \varepsilon)$, $p(t, y,\ \varepsilon) = g(t,\ y,\ \psi(t,\ y,\ \varepsilon),\ \varepsilon)$, $\psi_1(t,\ y,\ \varepsilon) \equiv 1$, и для уравнения (20) запишем уравнения (5) и (4), то эти уравнения имеют вид

$$dx/dt = P(t,\ x,\ \varepsilon). \tag{21}$$

Отсюда следует, что рассмотренный асимптотический метод содержит и теорию асимптотического интегрирования по первому приближению [3].

§ 2. Управляемые системы

Пусть движение описывается дифференциальным уравнением

$$dy/dt = f(t,\ y,\ u,\ \varepsilon) + g(t,\ y,\ u,\ \varepsilon), \tag{22}$$

где $f \in C(R^1_+ \times R^n \times S_c \times (0,\ \varepsilon_0],\ R^n)$, $S_c = \{z : z \in R^m,\ \|z\| \leqslant c\}$, $g \in C(R^1_+ \times R^n \times S_c \times (0,\ \varepsilon_0],\ R^n)$; управление $u \in C^{(1,0)}(R^1_+ \times (0,\ \varepsilon_0],\ S_c)$. Необходимо допустимое управление [5] $u(t,\ \varepsilon)$ подобрать так, чтобы точка γ перешла в точку γ_0 при $t \to +\infty$, начальный момент движения $t = \tau$.

Предположим в теореме 1, что $J_i(t,\ r,\ c) = o(1)$ при $t \to +\infty$ и всех $i = 1,\ 2$, остальные условия те же, решение $x(t : \tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon)$ определено при $t \geqslant \tau$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t : \tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon) = \gamma_0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t,\ \varepsilon) = \lambda^*(\varepsilon)$. Тогда если функция $u(t,\ \varepsilon)$ такая, что выполняются условия теоремы 5, и решение $r = 0$ уравнения (17) асимптотически устойчиво, то при достаточно малом ε_0 при всех $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$ решение $y(t : \tau,\ \gamma,\ u,\ \varepsilon)$ при $t \to +\infty$ стремится к вектору γ_0. Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(y(t : \tau,\ \gamma,\ u,\ \varepsilon) - x(t : \tau,\ \gamma,\ \lambda^*,\ \varepsilon)) = 0$$

равномерно по $t \in [\tau,\ +\infty)$. Этот предельный переход можно использовать для приближенного вычисления решений. Заметим, что из этой же теоремы 5 вытекает устойчивость решения $y(t : \tau,\ \gamma,\ u,\ \varepsilon)$ при $t \geqslant \tau$.

Пусть движение задано уравнением

$$dy/dt = \varepsilon[P(t)y + Q(t)u + f(t)] + \varepsilon^2 G(t,\ y,\ u,\ \varepsilon), \tag{23}$$

где $P(\cdot) : [0,\ +\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n,\ R^n)$, $Q(\cdot) : [0,\ +\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n,\ R^m)$ — непрерывные отображения, $f \in C([0,\ +\infty),\ R^n)$, $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$, $G \in C([0,\ +\infty) \times R^n \times S_c \times [0,\ \varepsilon_0],\ R^n)$ и непрерывно дифференцируема по компонентам вектора y, $S_c = \{z : z \in R^m,\ \|z\| \leqslant c\}$.

Допустим, что K — класс кусочно-непрерывных управлений, определенных на множестве $[0,\ +\infty) \times (0,\ \varepsilon_0]$ и $u(t,\ \varepsilon) \in S_c$ при любом $u \in K$ и $t \geqslant 0$. Предположим еще, что $Y(t)$, $Y(0) = E$ — фундаментальная матрица уравнения $dy/dt = P(t)y$, $\|G(t,\ y,\ u,\ \varepsilon)\| \leqslant W(t,\ \|y\|,\ \|u\|,\ \varepsilon)$, где $W \in C([0,\ +\infty) \times (0,\ +\infty) \times S_c \times (0,\ \varepsilon_0],\ [0,\ +\infty))$, $W(t,\ r_1,\ \|u\|,\ \varepsilon) \leqslant W(t,\ r_2,\ \|u\|,\ \varepsilon)$ при $r_1 < r_2$ и любых $t \in [0,\ +\infty)$, $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$, $u \in K$.

Теорема 6. *Если* $\int\limits_0^{+\infty} \|P(s)\| ds < +\infty$, $\int\limits_0^{+\infty} \|Q(s)\| ds < +\infty$,

$$\int\limits_0^{+\infty} W(s,\ r,\ \|\psi\|,\ \varepsilon) ds < +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{+\infty} W(s,\ r,\ \|\psi\|,\ \varepsilon) ds = 0$$

при любых $r\in[0, +\infty)$, $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ *и некоторой* $\psi\in C^{(1,0)}([0, +\infty)\times(0, \varepsilon_0], S_c)$, $\lim_{t\to+\infty}\psi(t, \varepsilon)=\lambda^*(\varepsilon)$, *то если существует число* $\tau>0$ *такое, что* $\int_0^\tau B(s)B^T(s)ds$ — *невырожденная матрица,* $B(s)=Y^{-1}(s)Q(s)$, *то для любых* x_0, $y_0\in R^n$ *при достаточно малом* ε_0 *и всех* $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ *существует* $u\in K$, *переводящее при* $t\to+\infty$ *точку* εx_0 *в точку* εy_0.

Доказательство. В уравнении (23) сделаем замену: $y=\varepsilon Y(t)z$, где $Y^{-1}(t)\to E$ при $t\to+\infty$ [3] (с. 41). Тогда это уравнение перейдет в уравнение

$$\frac{dz}{dt}=Y^{-1}(t)Q(t)u+Y^{-1}(t)f(t)+\varepsilon Y^{-1}(t)G(t, \varepsilon Y(t)z, u, \varepsilon). \quad (24)$$

Пусть уравнение (6) имеет вид

$$\frac{dy}{dt}=Y^{-1}(t)Q(t)\psi(t, \varepsilon)+Y^{-1}(t)f(t)+\varepsilon Y^{-1}(t)G(t, \varepsilon Y(t)z, \psi(t, \varepsilon), \varepsilon). \quad (25)$$

Уравнения (4) и (5) имеют вид $dx/dt=0$. Предположим, что $x(t:\tau, y_0, \lambda^*, \varepsilon)\equiv y_0$. Так как $\frac{\partial x}{\partial\gamma}(t:\tau, y_0, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)=E$, $\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t:\tau, y_0, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)=0$, то выполняются все условия теоремы 1 для этого уравнения. Отсюда и из условий теоремы вытекает, что при достаточно малом ε_0 и всех $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ существует решение $y(t:\tau, \bar{x}_0, \varepsilon)$ такое, что $\lim_{t\to+\infty} y(t:\tau, \bar{x}_0, \varepsilon)=y_0$.

Так как для уравнения (25) выполняются все условия теоремы из работы [5] (с. 45), то при достаточно малом ε_0 и всех $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ существует непрерывное управление u_0, переводящее точку x_0 в точку $\bar{x}_0$ за время τ. Тогда управление

$$u(t, \varepsilon)=\begin{cases}u_0(t, \varepsilon), & 0\leqslant t<\tau;\\ \psi(t, \varepsilon), & \tau\leqslant t<+\infty,\end{cases}$$

переводит точку x_0 в точку y_0 при $t\to+\infty$. Это же управление при помощи уравнения движения (23) переводит точку εx_0 в точку εy_0 при $t\to+\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гребеников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах.— М.: Наука, 1986.— 255 с.
2. Воскресенский Е. В. Асимптотическая эквивалентность нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 12.— С. 72—74.
3. Воскресенский Е. В., Артемьева Е. Н., Белоглазов В. А., Мурюмин С. М. Качественные и асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений.— Саратов, 1987.— 188 с.
4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.— 300 с.
5. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.— 495 с.

г. Саранск

Поступили
первый вариант 08.08.1988
окончательный вариант 16.05.1990

А. И. Зейфман

УДК 519.217+517.937

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. *Введение.* Пусть $X(t)$, $\bar{X}(t)$ — невозмущенная и возмущенная марковские цепи (м. ц.) с матрицами перехода $U(t)$, $\bar{U}(t)$ соответственно. Если $X(t)$, $\bar{X}(t)$ однородны, а Q, $\bar{Q}$ — их стационарные распределения, то обычно понятие устойчивости означает, что из малости $U(1)-\bar{U}(1)$ следует малость