Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

Z. A. Yanson, Propagation of Rayleigh waves of SV type in transversely isotropic elastic media, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 230, 278–292

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.81
January 18, 2025, 16:57:42

З. А. Янсон

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН РЭЛЕЯ ТИПА SV В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

В настоящей работе на частном примере анизотропной упругой среды, а именно, трансверсально-изотропной (называемой также гексагональной системой), строятся асимптотические разложения поверхностных волн Лява, изученных ранее для изотропного случая в ряде работ [1, 2, 3, 4]. При постановке и решении краевой задачи для волн Лява мы непосредственно опираемся на результаты, полученные в [5, 6] с помощью аппарата пространственно-временных (ПВ) лучевых разложений, широко применяемого для построения асимптотики волновых полей. Однако, при нахождении коэффициентов упомянутых лучевых разложений мы следуем построениям, содержащимся в [1], так что оказывается легко прослеживаемым переход от анизотропной (в нашем случае трансверсально-изотропной) к изотропной среде, когда упругие параметры, характеризующие анизотропию, стремятся к нулю.

С физической точки зрения мы ставим целью построить асимптотику поверхностных волн вблизи поверхности Σ, когда главный член асимптотики $\vec{u}^0$, являясь на поверхности поперечной волной SV, в отличие от волн Лява SH, имеет на Σ отличную от нуля компоненту $\vec{u}^0|_{\vec{n}}$, где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности. Будем называть эти волны волнами Рэлея типа SV.

В данной работе построен главный член асимптотики волн Рэлея (разыскиваемой в виде ПВ лучевого ряда, содержащего функции Эйри) и проведены вычисления, связанные с необходимостью добавления двух более быстрых волн с комплексными эйконалами. Эти вычисления доказывают возможность построения высших членов асимптотики поверхностных волн в результате рекуррентного процесса, при этом последовательно определяются коэффициенты ПВ лучевых разложений для более быстрых затухающих с глубиной волн. Кроме того, в процессе построений получены соотношения между элементами матрицы упругих постоянных, при которых существование изучаемых поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде в принципе возможно.

Автор выражает благодарность В. М. Бабичу за обсуждение

результатов и ценные замечания.

0. Искомое решение $\vec{u}$ есть вектор смещений, удовлетворяющий уравнениям движения упругой среды, имеющим в тензорной записи вид

$$\left(\vec{L}\vec{u}\right)_j = \nabla_i\left(G^{i\alpha}\sigma_{\alpha j}\right) - \rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0, \quad i, j, \alpha = 1, 2, 3, \tag{I}$$

где $\rho(q^1, q^2, q^3)$ – плотность среды, t – время; q^1, q^2, q^3 – криволинейная координатная система,*) $G^{i\alpha}$ – метрический тензор, ∇_i – символ ковариантного дифференциарования. Тензор напряжений σ_{ij} и тензор деформаций ε_{rs} связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= a_{ij\alpha\beta}G^{\alpha r}G^{\beta s}\varepsilon_{rs}, \\ \varepsilon_{rs} &= \frac{1}{2}\left(\nabla_r u_s + \nabla_s u_r\right), \quad r, s, \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{II}$$

В формуле (II) $a_{ij\alpha\beta}$ – тензор упругих постоянных среды с известными свойствами симметрии, вследствие которых данный тензор может быть представлен в виде симметричной матрицы 6×6 с элементами c_{rs}, см. [7, 8].

Краевые условия – отсутствие напряжений на поверхности Σ запишем в виде

$$\sigma_{3j}\big|_\Sigma = a_{3j\alpha\beta}G^{\alpha h}\nabla_h u^\beta\big|_\Sigma = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{III}$$

Волновое поле $\vec{u}$ поверхностной волны ищем в виде асимптотического разложения

$$\vec{u}(\vec{q}, t) = \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{A}^k}{(ip)^k}v(-p^{2/3}m) + ip^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{B}^k}{(ip)^k}v'(-p^{2/3}m)\right\}e^{ipl}, \tag{IV}$$

где $v(\tau)$, $v'(\tau)$ – соответственно функция Эйри и ее производная, экспоненциально убывающие при $\tau \to +\infty$, p - большой параметр. По аналогии с [1, 5, 6] потребуем

$$m\big|_\Sigma = \gamma, \quad \gamma = \text{const} > 0. \tag{V}$$

Подставляя (IV) в краевые условия (III) и полагая (см. [5]) в полученных выражениях

$$v(-p^{2/3}\gamma) = 0, \quad \gamma = \gamma_\nu = q_\nu/p^{2/3}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

---

*) В дальнейшем систему координат мы связываем с поверхностью Σ упругого тела, полагая $q^3 = n$, нормаль $\vec{n}$ к Σ будем считать направленной внутрь тела.

($-q_\nu$ – корни функции Эйри $v(\tau)$), приходим к необходимости равенства нулю на Σ выражений:

$$\sigma_{3j}^{(k)}\Big|_{n=0} = ip^{-1/3}\Big\{\Big[a_{3j\alpha\beta}l^\alpha(B^k)^\beta + a_{3j3\beta}\frac{\partial m}{\partial n}(A^k)^\beta\Big] + \sigma_{3j}(\vec{B}^{k-1})\Big\}_{n=0}\times$$
$$\times v'(-p^{2/3}\gamma_\nu)\exp\big[ipl(q^1,q^2,t)\big],$$
$$j=1,2,3;\quad k=0,1,\dots;\quad \vec{A}^{-k}=\vec{B}^{-k}\equiv 0. \tag{IIIa}$$

В (IIIa) $\sigma_{3j}^{(k)}$ – коэффициенты разложения $\sigma_{3j}\big|_{n=0}$ по степеням $1/ip$; $l^\alpha = G^{\alpha j}\frac{\partial l}{\partial q^j}$. Параметр γ_ν характеризует близость каустики поля лучей собственной волны Рэлея номера ν к поверхности Σ. Индекс ν будем в дальнейшем опускать и будем считать γ малым параметром задачи.

Подстановка разложения (IV) в уравнения движения (I) приводит к рекуррентной системе для $\vec{A}^k$ и $\vec{B}^k$ вида

$$\big(\vec{N}_l + m\vec{N}_m\big)\vec{A}^k + m2\vec{N}_{lm}\vec{B}^k =$$
$$= -\big[\vec{M}_l\vec{A}^{k-1} + \vec{N}_m\vec{B}^{k-1} + m\vec{M}_m\vec{B}^{k-1} + \vec{L}\vec{A}^{k-2}\big],$$
$$m2\vec{N}_{lm}\vec{A}^k + \big(\vec{N}_l + m\vec{N}_m\big)\vec{B}^k = -\big[\vec{M}_m\vec{A}^{k-1} + \vec{N}_l\vec{B}^{k-1} + L\vec{B}^{k-2}\big],$$
$$k=0,1,2,\dots;\quad \vec{A}^{-r}=\vec{B}^{-r}\equiv 0,\qquad r=1,2, \tag{VI}$$

где введены обозначения*)

$$\begin{cases} 2(\vec{N}_{\xi\eta}\vec{C})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}(\xi^i\eta^\alpha + \xi^\alpha\eta^i)C^\beta - 2\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}C_j, \\ (\vec{N}_\xi\vec{C})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}\xi^i\xi^\alpha C^\beta - \rho\big(\frac{\partial\xi}{\partial t}\big)^2C_j, \end{cases} \tag{VIa}$$

$$(\vec{M}_\xi\vec{C})_j \equiv G^{\alpha i}\big(\nabla_\alpha(a_{ij\delta\beta}\xi^\delta)\big)C^\beta +$$
$$+\big[a_{ij\alpha\beta}\xi^iG^{h\delta}\nabla_hC^\beta + a_{ij\delta\beta}\xi^\delta G^{\alpha i}\nabla_\alpha C^\beta\big] - 2\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial C_j}{\partial t} - \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}C_j, \tag{VIб}$$
$$\xi^i = G^{\alpha i}\frac{\partial\xi}{\partial q^\alpha},\qquad \eta^i = G^{\alpha i}\frac{\partial\eta}{\partial q^\alpha},\qquad C^r = G^{r\alpha}C_\alpha.$$

1. Тензор $a_{ij\alpha\beta}$ упругих постоянных (последние, вообще говоря, являются функциями координат) в случае трансверсально-изотропной среды сводится к симметричной матрице (c_{rs}), $r,s = 1,2,\dots,6$, которая которая, в отличие от соответствующей матрицы изотропной среды, определяется не двумя, а пятью независимыми упругими параметрами (нулевые элементы этих матриц совпадают). Эти упругие (материальные) параметры инвариантны

*)В формулах (I)–(VI), (VIa), (VIб) и далее по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование.

относительно вращения вокруг оси симметрии L, существование которой характеризует трансверсально-изотропную среду. В прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3, в которой $0x_3$ – ось симметрии L, отличными от нуля элементами матрицы (c_{rs}) являются следующие:

$$\begin{gathered} c_{11}=c_{22},\;\; c_{33},\;\; c_{12}=c_{21},\;\; c_{13}=c_{23}=c_{31}=c_{32}, \\ c_{44}=c_{55},\;\; c_{66}=(c_{11}-c_{12})/2. \end{gathered} \tag{VII}$$

Из условий положительности квадратичной формы (плотности потенциальной энергии деформации)

$$W=\frac{1}{2}a_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{\alpha\beta}>0,$$

в частности, следует

$$c_{11}>0,\;\; c_{66}>0,\;\; c_{44}>0,\;\; c_{33}>0,\;\; c_{11}>c_{12},\;\; (c_{12}+c_{66})c_{33}>c_{13}^2. \tag{VIIa}$$

Отметим, что соответствие между парами индексов (ij), $(\alpha\beta)$ компонент $a_{ij\alpha\beta}$ и индексами r, s элементов c_{rs} устанавливается следующей схемой, [7]

$$\begin{gathered} (11)\longleftrightarrow 1,\;\; (22)\longleftrightarrow 2,\;\; (33)\longleftrightarrow 3,\;\; (23)=(32)\longleftrightarrow 4, \\ (13)=(31)\longleftrightarrow 5,\;\; (12)=(21)\longleftrightarrow 6. \end{gathered} \tag{VIIб}$$

С целью сопоставления полученных ниже формул с изотропным случаем наряду с (VII) будем использовать также применные в [7] обозначения

$$\begin{gathered} c_{11}=c_{22}=\lambda+2\mu,\;\; c_{33}=\lambda+2\mu-\widetilde{p},\;\; c_{44}=c_{55}=\mu-\widetilde{m}, \\ c_{12}=c_{21}=\lambda,\;\; c_{13}=c_{23}=\lambda-\widetilde{l},\;\; c_{66}=\frac{c_{11}-c_{12}}{2}=\mu. \end{gathered} \tag{VIIв}$$

В заключение настоящего пункта приведем важное для дальнейших вычислений выражение для оператора $\vec{N}_\xi$ из (VIa), полученное в обозначениях (VIIв),

$$\begin{gathered} \vec{N}_\xi\vec{C}\equiv(\lambda+\mu)(\vec{C}\nabla\xi)\nabla\xi+\big(\mu(\nabla\xi)^2-\rho\xi_t^2\big)\vec{C}_s+ \\ +\big((\mu-\widetilde{m})(\nabla\xi)^2-\rho\xi_t^2\big)C_n\vec{n}-\big\{\big[\xi_3(\widetilde{m}+\widetilde{l})C_n\nabla_s\xi+\xi_3^2\widetilde{m}\vec{C}_s\big]+ \\ +\big[\xi_3(\widetilde{m}+\widetilde{l})(\vec{C}_s\nabla\xi)+\xi_3^2(\widetilde{p}-\widetilde{m})C_n\big]\vec{n}\big\}, \end{gathered} \tag{VIII}$$

где $\vec{C}=\vec{C}_s+\vec{C}_n\vec{n}$, $(\vec{C}_s,\vec{n})=0$, $\nabla\xi=\nabla_s\xi+\xi_3\vec{n}$, $\xi_3=\frac{\partial\xi}{\partial n}$, $\nabla_s\xi$ – вектор с компонентами $\frac{\partial\xi}{\partial q^1}$, $\frac{\partial\xi}{\partial q^2}$; система координат q^1, q^2, $q^3=n$ в (VIII) предполагается декартовой, поверхность же Σ в этом случае – плоскость.

§ 1. Условие разрешимости однородной системы для коэффициентов $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$. Уравнение эйконала

1. Положим в (VI) $k = 0$. Мы получим однородную систему для коэффициентов $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$. На поверхности Σ, учитывая (V), из первого уравнения полученной системы имеем

$$\left(\vec{N}_l \vec{A}^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{1.1}$$

При этом для разрешимости второго уравнения этой же однородной системы необходимо потребовать

$$\left(2\vec{N}_{lm}\vec{A}^0, \vec{A}^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0 \tag{1.2a}$$

или ввиду (V) ($\frac{\partial m}{\partial q^1} = \frac{\partial m}{\partial q^2}$ на Σ) получим

$$\left(a_{3j\alpha\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta l^\alpha\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{1.2}$$

Равенство (1.2) является необходимым условием для возникновения волн Лява вблизи поверхности упругого тела в общем случае анизотропии. В нашем же случае (трансверсально-изотропной среды) вследствие (VII) и равенств

$$a_{3j'\alpha'\beta'} = a_{33,3\alpha'} \equiv 0, \quad \alpha', \beta', j' = 1, 2, \tag{1.3a}$$

соотношение (1.2) принимает на Σ вид

$$l_3\left[c_{44}|\vec{A}^0{}_s|^2 + c_{33}|A^0_n|^2\right] = -A^0_n\,(\vec{A}^0\nabla_s l)\left((c_{13} + c_{44}\right), \tag{1.3}$$

где $l_3 = \frac{\partial l}{\partial n}$, $\vec{A}^0 = \vec{A}^0{}_s + A^0_n \cdot \vec{n}$, $(\vec{A}^0{}_s, \vec{n}) = 0$.

Учитывая, что в изотропной упругой среде из (1.1) и (V) на Σ имеем $l_3 = 0$, $(\vec{A}^0\nabla_s l) = 0$, а также тот факт, что в нашем частном случае анизотропии на поверхности Σ (плоскость (q^1, q^2) перпендикулярна оси L, см. выше, если координаты q^j декартовы) все направления равноправны, как и в изотропном случае, будем считать, см. [1],

$$A^0_n\big|_{n=0} \neq 0, \quad (\vec{A}^0\nabla_s l)_{n=0} = 0, \quad \gamma = 0. \tag{1.4a}$$

Но тогда в силу $c_{44} > 0$, $c_{33} > 0$, см. (VIIa), из (1.3) следует

$$l_3\big|_\Sigma = \frac{\partial l}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0, \quad \gamma = 0. \tag{1.4}$$

Коэффициент $\vec{A}^0$ на поверхности Σ (при $\gamma = 0$) является собственным вектором задачи, определяемой (1.1), где $\lambda = \rho l_t^2$ – собственные значения матричного оператора $(a_{ij\alpha\beta}l^i l^\alpha)$, оператор же

$\vec{N}_l$ в нашем случае имеет вид (VIII), где следует положить $\xi = l$, $\vec{C} = \vec{A}^0$. Проекцируя (1.1) на $\vec{n}$, учитывая (1.4a), (1.4) и испольуя (VIII), получим на Σ $(\gamma = 0)$

$$c_{44}(\nabla_s l)^2 - \rho l_t^2 = 0 \quad \text{или} \quad (\mu - \widetilde{m})(\nabla_s l)^2 - \rho l_t^2 = 0. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) есть не что иное, как пространственно-временное уравнение эйконала (с эйконалом $l = |_{n=0,\gamma=0}$) для поля лучей на Σ. Как следует из дальнейших построений (см. Приложение), для возникновения волн Рэлея в нашем случае ($A_n^0\big|_{n=0} \neq 0$) должно выполняться условие $\widetilde{m} \geqslant 0$, т.е. в (1.5) $c_{44} \leqslant c_{66}$.

Вводя на Σ тройку ортогональных векторов $\vec{n}$, $\nabla_s l$, $\vec{\zeta} = \vec{n} \times \nabla_s l$ и проекцируя (1.1) на $\vec{\zeta}$, получим $(\vec{A}^0, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, если $\widetilde{m} \neq 0$.

Как уже отмечалось в [1, 6], соотношение (1.2) непосредственно связано с групповой скоростью $\vec{g}$ волн Лява. Выражение для $\vec{g}$ может быть получено в виде

$$g^j = \frac{G^{ji} a_{ir\alpha\beta}(m^{1/4}U^r)(m^{1/4}U^\beta)\tau^\alpha}{\rho(-\tau) m^{1/2}|\vec{U}|^2}, \quad j = 1,2,3, \tag{1.6}$$

где $\tau = l \mp \frac{2}{3} m^{3/2}$, $\vec{U} = m^{-1/4}\vec{A}^0 \mp m^{1/4}\vec{B}^0$ – соответственно эйконалы и амплитуды идущих к поверхности Σ (знак "–") и отраженных от нее (знак "+") волн. На Σ имеем $m = \gamma$, и при $j = 3$ и $\gamma = 0$ числитель правой части (1.6) равен левой части равенства (1.2), вследствие чего нормальная компонента $\vec{g}$ равна нулю на Σ. Касательные составляющие $\vec{g}$ в нашем случае равны

$$g^{j'} = \frac{\mu - \widetilde{m}}{\rho(-l_t)} \frac{\partial l}{\partial q^{j'}}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}, \quad j' = 1, 2. \tag{1.6a}$$

Заметим, что при записи некоторых формул (например, (1.6)) в силу исходной постановки задачи мы сохраняем символику верхних и нижних индексов.

2. Обратимся к определению компонент вектора $\vec{B}^0$. Используя (VII) и (1.3a), из краевых условий (III), (IIIa), полагая $k = 0$, при $j = 3$ получим

$$\left[c_{13}(\vec{B}^0 \nabla_s l) + c_{33} m_3 A_n^0\right]_{n=0} = 0, \quad m_3 = \frac{\partial m}{\partial n}, \tag{1.7}$$

а при $j = 1, 2$ будем иметь

$$\left[c_{44} B_n^0 \frac{\partial l}{\partial q^{j'}} + c_{44} m_3 A_{j'}^0\right]\Big|_{n=0} = 0, \quad j' = 1, 2. \tag{1.8}$$

Проекцируя (1.8) на $\vec{\zeta} = \vec{n} \times \nabla_s l$, находим, как и выше, $(\vec{A}^0, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, и таким образом на Σ $(\gamma = 0)$

$$\vec{A}^0 = A_n^0 \vec{n}. \tag{1.9a}$$

И теперь из (1.8) очевидно, что $B_n^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$.

Обратимся ко второму векторному уравнению системы (VI) при $k = 0$ и найдем его проекцию соответственно на $\vec{\zeta}$ и $\nabla_s l$. Пользуясь, как и выше, (VII) и (1.3а), при $\gamma = 0$ в первом случае получим $(\vec{B}^0, \vec{\zeta})_{n=0} = 0$, если $\widetilde{m} \neq 0$, а во втором случае для проекции упомянутого уравнения на $\nabla_s l$, находим

$$\left[(c_{11} - c_{44})(\vec{B}^0 \nabla_s l) + (c_{13} + c_{44}) m_3 A_n^0\right]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{1.9}$$

Итак, рекуррентная система (VI) и краевые условия (III) привели к однородной системе (1.7), (1.9) для компонент $(\vec{B}^0 \nabla_s l)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и $A_n^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ с определителм D, равным выражению

$$D = (c_{11} - c_{44}) c_{33} - c_{13}(c_{13} + c_{44}). \tag{1.10}$$

Для изотропной среды $D = 2\mu(\lambda + \mu) > 0$. В нашем случае при условии $c_{11} \geqslant c_{33}$ (причем, $c_{44} < c_{66}$) можно доказать, что если

$$0 \leqslant \widetilde{p} < 2\mu, \quad -\mu < \widetilde{l} < \lambda, \tag{1.10a}$$

(если $\widetilde{l} > 0$ $(\widetilde{l} < 0)$, то $c_{13} < c_{12}$ $(c_{13} > c_{12})$), где $\widetilde{p}$ и $\widetilde{l}$ определены равенствами (VIIв), то $D > 0$. Система (1.7), (1.9) при условиях (1.10а) и $\gamma = 0$ имеет только нулевое решение, т.е. $A_n^0\big|_\Sigma = 0$, что противоречит исходной постановке задачи.

Выход из этой ситуации, см. [1, 5], – добавить к полю поверхностной волны объемные волны (их, вообще говоря, две) с комплексными эйконалами, экспоненциально затухающие при удалении от Σ.

§ 2. Волны с комплексными эйконалами. Уравнение переноса для $\vec{A}^0$

1. Добавим к полю $\vec{u}$ поверхностной волны (IV) слагаемые

$$\vec{u}_{1,2} = \widehat{\alpha} e^{ip\theta_{1,2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{C}^k{}_{1,2}}{(ip)^k}. \tag{2.1}$$

Эйконалы $\theta_{1,2}$ этих волн подчиним на Σ условиям

$$\theta_{1,2}\big|_{\Sigma} = l\big|_{\Sigma}, \quad \operatorname{Im}\frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n}\Big|_{\Sigma} > 0. \tag{2.2}$$

В результате подстановки (2.1) в уравнение (I) приходим к рекуррентным соотношениям

$$\vec{N}_{\theta_{1,2}}\vec{C}^{k}_{1,2} + \vec{M}_{\theta_{1,2}}\vec{C}^{k-1}_{1,2} + \vec{L}\vec{C}^{k-2}_{1,2} \equiv 0$$
$$\vec{C}^{-2}_{1,2} = \vec{C}^{-1}_{1,2} \equiv 0, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Коэффициенты $\vec{C}^{k}_{1,2}$ разыскиваются в виде

$$\vec{C}^{k}_{1,2} = \Phi^{k}_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2} + \vec{U}^{k0}_{1,2}, \quad \vec{U}^{00}_{1,2} = 0, \quad k = 0,1,\dots \tag{2.3}$$

и при $k = 0$ имеем

$$\vec{C}^{0}_{1,2} = \Phi^{0}_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2}, \quad \rho|\vec{\varkappa}_{1,2}|^2 = 1, \tag{2.3a}$$

где $\vec{C}^{0}_{r}$, $r = 1,2$, – собственные векторы матрицы $A = (a_{ij\alpha\beta}\theta^{i}_{r}\theta^{\alpha}_{r})$, а $\lambda_r = \rho(\theta_r)^2_t$ – ее собственные числа. Векторы поляризации $\vec{\varkappa}_{1,2}$ являются решениями линейной системы

$$(\vec{N}_{\theta_r}\vec{\varkappa}_r)_j = a_{ij\alpha\beta}\theta^{i}_{r}\theta^{\alpha}_{r}\varkappa^{\beta}_{r} - \rho(\theta_r)^2_t(\varkappa_r)_j = 0, \quad j = 1,2,3 \tag{2.4a}$$

и находятся однозначно в соответствии с условиями (2.2) и нормировкой $\rho|\vec{\varkappa}_{1,2}|^2 = 1$. Функции $\Phi^{0}_{1,2}$, $\Phi^{k}_{1,2}$ из (2.3), (2.3a) подлежат определению.

Для компонент $(\sigma^{1,2}_{3j})^k$ разложения тензора $\sigma_{3j}(\vec{u}_{1,2})$ по степеням $1/ip$ на Σ получаем выражения

$$\left(\sigma^{r}_{3j}\right)^{k}_{n=0} = \widehat{\alpha}\left\{a_{3j\alpha\beta}\frac{\partial\theta_r}{\partial q^\alpha}(C^{k}_{r})^{\beta} + \sigma_{3j}(\vec{C}^{k-1}_{r})\right\}_{n=0} e^{ipl(q^1,q^2,t)}$$
$$r = 1,2; \quad k = 0,1,\dots, \tag{2.4}$$

которые должны быть добавлены к выражениям (IIIa).

Пусть $\vec{u}_1$ из (2.1) является аналогом продольной волны, так что заведомо $(\vec{\varkappa}_1, \nabla_s l)_{n=0} \neq 0$, $\frac{\partial\theta_1}{\partial n} \neq 0$ и согласно (2.2) $\operatorname{Im}\frac{\partial\theta_1}{\partial n}\big|_{n=0} > 0$ (см. Приложение). Прибавим (2.4) к выражениям (IIIa) и приравняем эту сумму нулю, полагая $k = 0$. Учитывая конкретную структуру тензора $a_{ij\alpha\beta}$ (формулы (VII), (1.3a)), при этом на Σ получим

$$\left\{c_{13}(\vec{B}^0\nabla_s l) + \widetilde{\Phi}^{\,0}_{1}\left[c_{13}(\vec{\varkappa}_1\nabla_s l) + c_{33}(\theta_1)_n(\varkappa_1)_n\right]\right\}_{n=0} =$$
$$= -\left(c_{33}m_3A^{0}_{n}\right)_{n=0}, \tag{2.5a}$$

$$\left\{B_n^0\frac{\partial l}{\partial q^{j'}}+\widetilde{\Phi}\,_1^0[(\varkappa_1)_n\frac{\partial l}{\partial q^{j'}}+(\theta_1)_n(\varkappa_1)_{j'}]+m_3A_{j'}^0\right\}_{n=0}=0,$$
$$j'=1,2, \tag{2.5б}$$

где $(\theta_1)_n=\frac{\partial\theta_1}{\partial n}$, $\vec{\varkappa}_1=(\vec{\varkappa}_1)_s+(\varkappa_1)_n\,\vec{n}$, $(\vec{\varkappa}_1)_s$ – вектор с компонентами $(\varkappa_1)_{j'}$, $j'=1,2$; $\widetilde{\Phi}\,_1^0=\widehat{\alpha}\Phi_1^0$, $\widehat{\alpha}\equiv -ip^{1/3}/v'(-p^{2/3}\gamma)$.

Равенства (2.5а) и (1.9) будем рассматривать как линейную неоднородную систему для определения $(\vec{B}\,^0\nabla_s l)_{n=0}$ и $(\widetilde{\Phi}\,_1^0)_{n=0}$ с правыми частями, пропорциональными $A_n^0\big|_{n=0}$, полагая $\gamma=0$. Определитель этой системы имеет вид

$$\widehat{D}=-(c_{11}-c_{44})\left[c_{13}(\vec{\varkappa}_1\nabla_s l)+c_{33}(\theta_1)_n(\varkappa_1)_n\right]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}. \tag{2.6}$$

Учитывая при $n=0$, $\gamma=0$ равенство (см. Приложение)

$$c_{33}(\theta_1)_n(\varkappa_1)_n=-(c_{13}+c_{44})(\vec{\varkappa}_1\nabla_s l),$$

получим

$$\widehat{D}=c_{44}(c_{11}-c_{44})(\vec{\varkappa}_1\nabla_s l)\big|_{n=0,\gamma=0}, \tag{2.6а}$$

и т.к. $(\vec{\varkappa}_1\nabla_s l)\neq 0$, $c_{44}>0$ и $(c_{11}-c_{44})=\lambda+\mu+\widetilde{m}>0$ (в силу $\widetilde{m}>0$, см. Приложение, формула (6)), то $\widehat{D}\neq 0$ (это делает исходную задачу разрешимой).

Проецируя (2.5б) на $\nabla_s l$ и учитывая равенство $(\vec{A}^0\nabla_s l)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=0$ (см. (1.4а)), выражаем $B_n^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ через $A_n^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$. Проецируя далее (2.5б) на $\vec{\zeta}=\vec{n}\times\nabla_s l$ и учитывая равенство $(\varkappa_1,\vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=0$ (см. Приложение), получаем, как и выше, $(\vec{A}^0,\vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=0$, т.е. попрежнему имеет место (1.9а).

Однако, в следующем приближении по γ $(k=0)$ удовлетворить краевым условиям (отсутствию напряжений на Σ) можно, лишь добавив к полю $\vec{u}$ волны Релея еще не учтенную волну $\vec{u}_2$ из (2.1). При этом выражения (IIIа) и (2.4) необходимо продифференцировать по γ. Волна $\vec{u}_2$ (в нашем случае) должна иметь порядок $O(\gamma)$, т.е. $\Phi_2^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=0$, а вектор поляризации $\vec{\varkappa}_2$ имеет при $\gamma=0$, $n=0$ единственную компоненту $\vec{\varkappa}_2\big|_{\vec{\zeta}}\neq 0$, см. Приложение. Полагая $k=0$, добавим к левой части равенства (2.5а) слагаемое $\widehat{\alpha}[\frac{\partial\Phi_2^0}{\partial\gamma}a_{33\alpha\beta}\frac{\partial\theta_2}{\partial q^\alpha}(\varkappa_2)_\beta]_{n=0}$, а к левым частям равенств (2.5б) – соответственно слагаемые

$$\widehat{\alpha}\left\{\frac{\partial\Phi_2^0}{\partial\gamma}\left[(\varkappa_2)_n\frac{\partial l}{\partial q^{j'}}+(\theta_2)_n(\varkappa_2)_{j'}\right]\right\}_{n=0},\qquad j'=1,2 \tag{2.6б}$$

и приравняем нулю коэфициент при γ^1 в полученных выражениях. Учтем уравнения системы (VI) при $k=0$, дифференцируя их по γ. В результате мы приходим к неоднородной линейной системе для коэффициентов $(\frac{\partial \vec{B}^0}{\partial\gamma}, \nabla_s l)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$ и $\frac{\partial \Phi_1^0}{\partial\gamma}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ с тем же определителем $\widehat{D}$ из (2.6), (2.6a). Правые части этой системы теперь пропорциональны A_n^0 и $\frac{\partial A_n^0}{\partial\gamma}$ при $n=0$, $\gamma=0$.

Проекцируя полученные выражения соответственно на $\nabla_s l$ и $\vec{\zeta}$, мы получим вторую пару линейных неоднородных уравнений для коэффициентов $\frac{\partial B_n^0}{\partial\gamma}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и $\frac{\partial \Phi_2^0}{\partial\gamma}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, т.к. проекции $(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial\gamma}, \nabla_s l)$ и $(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial\gamma}, \vec{\zeta})$ при $n=0$, $\gamma=0$ определяются из системы (VI).

Таким образом, исходная задача оказывается разрешимой, а процесс построения коэффициентов разложений $\vec{B}^0$ и $\Phi_{1,2}^0$ по степеням γ^r – рекуррентным, если при любом $r=r_0$ будут определены A_n^0, $\frac{\partial^r (A_n^0)}{\partial\gamma^r}$, $r=1,2,\ldots,r_0$, на Σ.

2. При нахождении $A_n^0\big|_\Sigma$, как следует из [1, 5], мы должны располагать уравнением эйконала для поля лучей на поверхности Σ. Такое уравнение получено нами выше – это уравнение (1.5) для эйконала $l(q^1,q^2,t)$. Кроме того, мы приходим к необходимости вычисления коэффициентов разложений для функций l и m из (IV) по целым степеням $n^i\gamma^k$ вблизи поверхности Σ. Мы приведем результаты вычислений коэффициентов: $m_{10} \equiv m_3\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \frac{\partial m}{\partial n}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $l_{01} = \frac{\partial l}{\partial\gamma}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $l_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 l}{\partial n^2}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$.

Дифференцируя первое уравнение системы (VI) по n и γ и проектируя его на $\vec{A}^0$ (т.е. на $\vec{n}$), соответственно получим

$$(m_{10})^3 = -\left(\frac{2(-l_t)^2}{\widehat{a}_{33}R_Э}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}, \quad l_{01} = -\frac{1}{(-l_{00})_t}\int\limits_{M_0}^{M}\frac{\widehat{a}_{33}}{2}m_{10}^2\,ds, \qquad (2.7)$$

где $\frac{2}{R_Э} = (\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{\mu-\widetilde{m}}{\rho})_{n=0}$ – эффективный радиус кривизны, $\widehat{a}_{33} = \widehat{c}_{33}/\rho$, $\widehat{c}_{33} = c_{33} - \frac{(c_{13}+c_{44})^2}{c_{11}-c_{44}}$, $l_{00} = l\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, интеграл берется вдоль ПВ луча и $ds = dt$. Легко убедиться, что в (2.7) $a_{33} > \frac{(\mu-\widetilde{p})}{\rho}\cdot q$, если $\widetilde{p} < \mu$, $\widetilde{l} > 0$ и $\widetilde{m} > 0$, где $q = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+m}$.

С целью вычисления коэффициента l_{20} спроекцируем первое уравнение системы (VI) на $\vec{B}^0$, второе уравнение этой системы – на $\vec{A}^0$. Вычитая полученные проекции, имеем

$$(2\vec{N}_{lm}\vec{A}^0, \vec{A}^0) - m2(\vec{N}_{lm}\vec{B}^0, \vec{B}^0) = 0. \qquad (2.8)$$

Дифференцируя (2.8) по n, находим

$$2l_{20}\widetilde{a}_{33} = -\frac{1}{m_{10}}\left\{\rho(-l_t)\frac{dm_{10}}{dt} + \frac{m_{10}}{|\vec{A}^0|^2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(a_{3\alpha\beta i'}(A^0)^\alpha(A^0)^\beta l^{i'}\right)+ \right.\right.$$
$$\left.\left. +(-1)\left(\vec{N}_{lm}\vec{B}^0, \vec{B}^0\right)\right]\right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}, \quad i' = 1,2; \ \alpha,\beta = 1,2,3 \qquad (2.8а)$$

где $\widetilde{a}_{33} \equiv \left(\frac{a_{3\alpha3\beta}(A^0)^\alpha(A^0)^\beta}{|\vec{A}^0|^2}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $(-l_t)\frac{dm_{10}}{dt}$ – производная вдоль ПВ луча. В трансверсально-изотропной среде $\widetilde{a}_{33} = c_{33}$. Выражение (2.8а) записанное в инвариантной форме (независимо от типа анизотропии среды), как мы увидим ниже, играет существенную роль при нахождении A_n^0. Очевидно, что вычисление l_{20} сводится к вычислению суммы в квадратных скобках равенства (2.8а). Первое слагаемое этой суммы содержит проекцию $(\frac{\partial\vec{A}^0}{\partial n}, \nabla_s l)$, которая находится из первого уравнения системы (VI) (в результате дифференцирования по n проекции этого уравнения на $\nabla_s l$). Второе слагаемое упомянутой суммы с помощью (1.9) приводится к виду

$$-\left(\vec{N}_{lm}\vec{B}^0, \vec{B}^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = m_{10}^2\left[\frac{(c_{13}+c_{44})^2}{c_{11}-c_{44}}A_n^0 B_n^0\right]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}. \qquad (2.9а)$$

В результате для коэффициента l_{20} получим

$$2l_{20} = \frac{-1}{m_{10}\widehat{a}_{33}}(-l_{00})_t\frac{dm_{10}}{dt}, \qquad (2.9б)$$

где $\widehat{a}_{33} = \widehat{c}_{33}/\rho$, $l_{00} = l\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $\widehat{c}_{33}$ определено в (2.7), причем в изотропной среде $\widehat{c}_{33} = \mu$.

Рассмотрим первое уравнение системы (VI) при $k = 1$. Условием разрешимости полученного векторного уравнения для $\vec{A}^0$ на поверхности Σ при $\gamma = 0$ является следующее равенство

$$\left(\vec{M}_l\vec{A}^0, \vec{A}^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} + \left(\vec{N}_m\vec{B}^0, \vec{A}^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \qquad (2.9)$$

В силу (VIб)

$$\left\{\nabla_{\alpha'}\left(G^{\alpha' i'}a_{i'j\delta\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta l^\delta\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(a_{3j\delta\beta'}(A^0)^j(A^0)^\delta l^{\beta'}\right)+ \right.$$
$$\left. +2l_{20}\widetilde{a}_{33}|\vec{A}^0|^2 + \left(\vec{N}_m\vec{B}^0, \vec{A}^0\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\rho l_t|\vec{A}^0|^2\right)\right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \qquad (2.10)$$

Вводя $\mathcal{A}^2 = \frac{|\vec{A}^0|^2\rho}{m_{10}}$, пользуясь равенством (2.8а) и формулами (1.6), (1.6а) для групповой скорости $\vec{g}$, запишем (2.10) в форме

$$\left\{ -(l_{00})_t \left[\operatorname{div}_s(\vec{g}\mathcal{A}^2) + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}^2 \right] + \mathcal{A}^2\mathcal{E} \right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \tag{2.11}$$

где обозначено $\operatorname{div}_s(\vec{g}\mathcal{A}^2) = \nabla_{i'}(g^{i'}\mathcal{A}^2)$, $i' = 1, 2$,

$$\begin{gathered} \mathcal{E} \equiv m_{10}\left\{ \left[(\vec{N}_{lm}\vec{B}^0, \vec{B}^0) + (\vec{N}_m\vec{B}^0, \vec{A}^0)\right] \frac{1}{\rho|\vec{A}^0|^2} \right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \\ = i\frac{\widehat{c}_{33}}{\rho}|m_{10}|^3 \frac{D}{c_{44}(c_{11}-c_{44})} \left| \frac{(\varkappa_1)_n(\nabla_s l)^2 + (\theta_1)_n(\vec{\varkappa}_1\nabla_s l)}{(\vec{\varkappa}_1\nabla_s l)(\nabla_s l)^2} \right| \end{gathered} \tag{2.12}$$

и где D имеет вид (1.10), $\widehat{c}_{33}$ – то же, что и в (2.7). При получении выражения (2.12) мы использовали формулу (2.9а), равенство $(\vec{N}_m\vec{B}^0, \vec{A}^0)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = (c_{33}A_n^0 B_n^0)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и, согласно с краевыми условиями (2.5а), (2.5б), выразили B_n^0 через A_n^0.

Равенство (2.11) является уравнением переноса на Σ для амплитуды $\vec{A}^0$ поверхностной волны. Интегрируя это уравнение вдоль ПВ луча, мы приходим к модифицированной формуле лучевого метода

$$A_n^0\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \chi^0(\alpha_1, \alpha_2)\left(\frac{|m_{10}|}{\rho\Delta}\right)^{1/2}_{n=0} e^{-i\frac{1}{2(-l_{00})_t}\int\limits_{M_0}^{M}(\operatorname{Im}\mathcal{E})ds}, \tag{2.13}$$

где $\chi^0(\alpha_1, \alpha_2) = \text{const}$ вдоль ПВ луча; $\Delta = \frac{D(t,q^1,q^2)}{D(s,\alpha,\alpha_2)}$ – якобиан перехода от координат q^1, q^2, t к лучевым координатам s, α_1, α_2; интеграл в фазе экспоненты берется вдоль ПВ луча, причем $ds = dt$.

Воспользуемся формулой (2.7) для m_{10}^3, а также формулами (2), (3) (см. Приложение) и представим подынтегральную функцию в (2.13) в виде

$$\frac{1}{2(-l_{00})_t}\operatorname{Im}\mathcal{E} = \frac{(-l_{00})_t}{R_Э|(\theta_1)_n|}\frac{D^2}{c_{33}c_{44}^2(c_{11}-c_{44})}, \tag{2.14}$$

где $(-l_{00})_t > 0$, $R_Э > 0$, $c_{11} - c_{44} > 0$, D имеет вид (1.10), $(\theta_1)_n = \frac{\partial\theta_1}{\partial n}$ при $n = 0$, $\gamma = 0$ находится из (3), см. Приложение, причем $|(\theta_1)_n| \neq 0$ (в случае $\left|\frac{\partial\theta_1}{\partial n}\right| = 0$ задача построения асимптотики неразрешима).

Располагая формулой (2.14) и полагая $\widetilde{l} = \widetilde{m} = \widetilde{p} = 0$, см. (VIIв), легко убедиться в совпадении (2.13) с выражением для $A_n^0\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ в изотропной среде, [1].

В заключение отметим, что, дифференцируя по γ первое уравнение системы (VI) при $k = 1$, мы можем из условия разрешимости полученного уравнения найти $\left.\frac{\partial A_n^0}{\partial \gamma}\right|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$. Таким образом, краевые условия будут удовлетворены с точностью до γ^1, см. п.1, §2, и процедура разложения коэффициентов $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$, $\Phi^0_{1,2}$ по степеням γ^s, $s = 1, 2, \ldots$, оказывается рекуррентной.

Приложение

Опишем процедуру, в результате которой можно построить на Σ (в любом приближении по γ) как эйконалы $\theta_{1,2}$ разложений (2.1), так и векторы поляризации $\vec{\varkappa}_{1,2}$ собственных векторов (2.3а). В соответствии с (2.2) имеем на Σ

$$\vec{N}_\theta \vec{\varkappa} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\varkappa} = \vec{\varkappa}_s + \varkappa_n \vec{n}, \quad \nabla\theta = \nabla_s l + \theta_n \vec{n}, \quad \theta_n = \frac{\partial \theta}{\partial n}. \tag{1a}$$

В (1) под $\vec{\varkappa}$ и θ подразумеваем $\vec{\varkappa}_r$ и $(\theta_r)_n$, $r = 1, 2$.

Спроекцируем (1) на $\vec{n}$, воспользуемся (VIII), учтем (1а) и уравнение эйконала (1.5). В результате при условии $\theta_n \neq 0$ имеем

$$c_{33}\theta_n \varkappa_n + (c_{13} + c_{44})(\vec{\varkappa}\nabla_s l) = 0, \quad (n = 0, \gamma = 0). \tag{2}$$

Рассмотрим сначала волну $\vec{u}_1$ из (2.1), предполагая $(\varkappa_1)_n \neq 0$ (следовательно, и $(\vec{\varkappa}_1 \nabla_s l) \neq 0$). Проекцируем теперь (1) на $(\nabla_s l)$ и учитывая (2), для $(\theta_1)_n^2$ при $n = 0$, $\gamma = 0$ получим

$$(\theta_1)_n^2 = -\frac{P_n^2}{c_{33}c_{44}}(\nabla_s l)^2, \tag{3}$$

$$P_n^2 \equiv (c_{11} - c_{44})c_{33} - (c_{13} + c_{44})^2.$$

Если $P_n^2 > 0$, то $i|(\theta_1)_n|$ определяет затухание волны $\vec{u}_1$. При $\widetilde{m} > 0$ неравенству $P_n^2 > 0$ можно придать вид

$$(c_{12} + c_{66})c_{33} > (c_{13} + c_{66})^2. \tag{3a}$$

Легко видеть, что если $c_{13} > 0$, $c_{66} > 0$ и выполнено (3а), то выполнены неравенства (VIIa), обеспечивающие положительность потенциальной энергии W.*) Неравенство $P_n^2 > 0$, очевидно, выполнено

*) Неравенство $P_n^2 > 0$ может быть получено также как следствие $W > 0$, если воспользоваться конкретным выражением W для нашего случая анизотропии, см. [7]. При этом, наряду с условиями (VIIa), приходим к неравенству $c_{12}c_{33} > c_{13}^2 + 2c_{12}c_{66}$ (если $c_{12} > 0$, $c_{33} > 2c_{66}$), из которого, как нетрудно показать, следует $P_n^2 > 0$.

при $c_{11} > c_{33}$, $c_{12} > c_{13} > 0$, если $0 \leqslant \widetilde{p} \leqslant \mu$, $0 \leqslant \widetilde{l} < \lambda$, $\widetilde{m} > 0$. Кроме того, замечаем, что из положительности P_n следует $D > 0$, где D имеет вид (1.10).

Проекция (1) на $\vec{\zeta} = \vec{n} \times \nabla_s l$ дает

$$\left\{\left[c_{44}\theta_n^2 + \widetilde{m}(\nabla_s l)^2\right](\vec{\varkappa}_s, \vec{\zeta})\right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) содержит две возможности.

1) Полагая в (4) $\theta = \theta_1$, получаем $((\vec{\varkappa}_1)_s, \vec{\zeta}) = 0$, что позволяет считать $\vec{u}_1$ аналогом продольной волны.

2) Пусть $\vec{\varkappa} = \vec{\varkappa}_2$ и предположим, что $(\varkappa_2, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} \neq 0$. Тогда из (4) следует при $n = 0$, $\gamma = 0$

$$(\theta_2)_n^2 = -\frac{\widetilde{m}}{c_{44}}(\nabla_s l)^2. \tag{5}$$

Полученное равенство определяет $(\theta_2)_n = i\left(\frac{|\widetilde{m}|}{c_{44}}\right)^{1/2}|\nabla_s l|$, если

$$\widetilde{m} = c_{66} - c_{44} > 0. \tag{6}$$

Неравенство (6) является тем условием, которое обеспечивает возникновение поверхностных волн Рэлея.

Случай $\widetilde{m} = 0$ ($c_{44} = c_{66}$) не исключается из наших рассмотрений и в определенном смысле подобен изотропному случаю, [1], т. к. не требует добавления затухающей “поперечной” волны $\vec{u}_2$.

Положим в (1) $\theta = \theta_2$, $\varkappa = \varkappa_2$ и вследствие (5), проецируя (1) на $\nabla_s l$, найдем

$$\{(c_{12} + c_{66})(\vec{\varkappa}_2 \nabla_s l) + (c_{13} + c_{44})(\theta_2)_n(\varkappa_2)_n\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{7}$$

Это равенство совместно с (2) (где следует считать $\theta = \theta_2$, $\vec{\varkappa} = \vec{\varkappa}_2$) можно рассматривать как линейную однородную систему для $(\vec{\varkappa}_2 \nabla_s l)$ и $(\theta_2)_n(\varkappa_2)_n$ с определителем $\widetilde{D}$, равным

$$\widetilde{D} = (c_{12} + c_{66})c_{33} - (c_{13} + c_{44})^2,$$

и если $\widetilde{p} \leqslant \mu$, $\widetilde{l} > 0$, $\widetilde{m} > 0$, то $\widetilde{D} > 0$, см. (3а). В этом случае при $n = 0$, $\gamma = 0$ имеем $(\vec{\varkappa}_2 \nabla_s l) = 0$, $(\varkappa_2)_n = 0$. Таким образом, $\vec{u}_2$ мы можем считать аналогом поперечной волны SH.

Итак, при условии нормировки $\rho|\vec{\varkappa}_r|^2 = 1$, $r = 1, 2$, векторы поляризации $(\vec{\varkappa}_{1,2})_{n=0}$ полностью определяются.

Следующие приближения по γ для $\theta_{1,2}$ и $\vec{\varkappa}_{1,2}$ на Σ могут быть получены последовательным дифференцированием по γ равенства

(1). В результате $\frac{\partial^s(\theta_{1,2})_n}{\partial\gamma^s}$, $\frac{\partial^s \vec{\varkappa}_{1,2}}{\partial\gamma^s}$, $s = 1, 2, \ldots$, определяются (при $n = 0$, $\gamma = 0$) рекуррентным образом через уже найденные значения $(\theta_{1,2})_n\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и $(\vec{\varkappa}_{1,2})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–011–16148).

Литература

1. З. А. Янсон, *Нестационарные волны типа Рэлея вблизи поверхности неоднородного упругого тела.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **156** (1986), 168–183.
2. И. В. Мухина, И. А. Молотков, *О распространении волн Рэлея в упругом полупространстве.* — Изв. АН СССР, Физика Земли No. 4 (1967), 3–8.
3. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле.* Труды МИАН Т. CXV 1971 с. 114-130.
4. П. В. Крауклис, Н. В. Цепелев, *О построении высокочастотной асимптотики волнового поля, сосредоточенного вблизи границы упругой среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **34** (1973), 72–92.
5. В. Д. Ажоткин, В. М. Бабич, *О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого тела произвольной формы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 9–14.
6. З. А. Янсон, *К вопросу о нестационарных волнах Лява вблизи поверхности анизотропного упругого тела.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **203** (1992), 166–172.
7. Г. И. Петрашень, *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* Л. 1980.
8. И. Н. Снеддон, Д. С. Берри, *Классическая теория упругости.* М. 1961.

Yanson Z. A. Propagation of Rayleigh waves of SV type in transversely isotropic elastic media.

The asymptotics of surface waves in elastic media is studied for a special case of anisotropy, namely, a transversely isotropic medium (where the parameters of the elastic medium are invariant of rotation about one of the coordinate axes). The slow Rayleigh waves under study are, in the zeroth asymptotic approximation, polarized in the plane of the normal section of the surface. Necessary computations are carried out to construct the principal asymptotic term with the addition of two faster waves with complex eikonals. The space-time ray method is employed to construct the asymptotics of these waves as well as Rayleigh ones. Due to the specific structure of the elasticity tensor used, the obtained formulas are valid in the case of a plane boundary. Also obtained are the conditions for the tensor components which govern the origination of the surface waves in question.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 ноября 1995 г.