В. Б. Лидский, О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, *Докл. АН СССР*, 1960, том 132, номер 2, 275–278

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 132, № 2

МАТЕМАТИКА

В. Б. ЛИДСКИЙ

О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ПО ГЛАВНЫМ ВЕКТОРАМ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 I 1960)

Пусть C — линейный вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots$ — характеристические числа* оператора C, расположенные в порядке возрастания модуля, и пусть

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_s, \ldots \tag{1}$$

система соответствующих собственных и присоединенных векторов (в дальнейшем главных векторов) оператора C.

Можно показать, что система (1) всегда допускает взаимную систему

$$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_s, \ldots, \tag{2}$$

составленную из главных векторов сопряженного оператора C^*. Ввиду этого, если для некоторого $f \in \mathfrak{H}$ имеет место равенство

$$\mathbf{f} = \sum_{s=1}^{\infty} c_s \mathbf{e}_s, \tag{3}$$

где ряд справа сходится в смысле метрики гильбертова пространства, то коэффициенты c_s определяются естественным образом (ср. ([1])). А именно, как можно показать, если $\mathbf{e}_s$ — собственный вектор C, у которого нет присоединенных (в дальнейшем простой собственный вектор), то

$$c_s = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{g}_s)}{(\mathbf{e}_s, \mathbf{g}_s)}, \tag{4}$$

где $\mathbf{g}_s$ — собственный вектор C^*, соответствующий характеристическому числу $\bar{\lambda}_s$. Если же векторы $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_{p+k}$ образуют жорданову цепочку, отвечающую характеристическому числу λ_p, то

$$c_{p+i} = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{g}_{p+k-i})}{(\mathbf{e}_{p+i}, \mathbf{g}_{p+k-i})} \quad (0 \leqslant i \leqslant k). \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{g}_p, \mathbf{g}_{p+1}, \ldots, \mathbf{g}_{p+k}$ — жорданова цепочка векторов оператора C^*, соответствующая характеристическому числу $\bar{\lambda}_p$. В силу этого замечания можно каждому $\mathbf{f} \in \mathfrak{H}$ сопоставить формальный ряд Фурье по главным векторам оператора C

$$\mathbf{f} \sim \sum_{s=1}^{\infty} c_s \mathbf{e}_s, \tag{6}$$

где коэффициенты c_s определяются по формулам (4) и (5).

* $\lambda_s = 1/\mu_s$, где μ_s — отличные от нуля собственные значения оператора C.

В настоящее время найдены широкие условия, при которых система главных векторов (1) является полной ([1–5]). Однако ряды Фурье (6) при этом, вообще говоря, расходятся. В данной работе доказано, что ряды Фурье по главным векторам оператора суммируемы к соответствующему элементу $\mathfrak{f}$ по методу Абеля. Тем самым, между прочим, дается способ, позволяющий находить коэффициенты линейных комбинаций элементов системы (1), приближающих $\mathfrak{f}$ с наперед заданной точностью. Попутно устанавливается также, что решение задачи Коши для уравнения $\partial \mathfrak{u} / \partial t + B\mathfrak{u} = 0$ разлагается при некоторых предположениях относительно оператора B в сходящийся ряд Фурье по главным векторам оператора.

Для точной формулировки результатов нам понадобятся некоторые определения.

Задавшись некоторым $\alpha > 0$, введем в рассмотрение следующие полиномы относительно t:

$$P_m^{\alpha}(\zeta^{-1}, t) = \frac{e^{\zeta^{-\alpha}t}}{m!} \frac{d^m}{d\zeta^m} e^{-\zeta^{-\alpha}t}, \quad (m = 0, 1, \ldots), \tag{7}$$

после чего свяжем с рядом (6) ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_s(t)\, \mathfrak{e}_s. \tag{8}$$

Коэффициенты $c_s(t)$ данного ряда образуются при помощи коэффициентов c_s ряда (6) и характеристических чисел λ_s следующим образом. Если $\mathfrak{e}_s$ — простой собственный вектор, то

$$c_s(t) = e^{-\lambda_s^{\alpha} t} c_s. \tag{9}$$

Если же векторы $\mathfrak{e}_p, \mathfrak{e}_{p+1}, \ldots, \mathfrak{e}_{p+k}$ образуют жорданову цепочку, то

$$c_{p+i}(t) = e^{-\lambda_p^{\alpha} t} \sum_{m=0}^{k-i} P_m^{\alpha}(\lambda_p, t)\, c_{p+i+m}. \tag{10}$$

Отметим, что при $t \to 0$ во всех случаях $c_s(t) \to c_s$.

Определение. Пусть ряд (8) обладает подпоследовательностью частных сумм $\{S_{N_\tau}(t)\}$, которая сходится при всех $t > 0$, и пусть $\mathfrak{u}(t)$ — соответствующая предельная функция

$$\mathfrak{u}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_\nu+1} c_s(t)\, \mathfrak{e}_s \right). \tag{11}$$

Пусть при этом

$$\lim_{t \to +0} \mathfrak{u}(t) = \mathfrak{f}. \tag{12}$$

Тогда мы скажем, что ряд Фурье (6), соответствующий элементу $\mathfrak{f}$, суммируем к $\mathfrak{f}$ по методу (A, λ, α).

Теорема 1. *Пусть C — линейный вполне непрерывный оператор в $\mathfrak{H}$. Пусть при некотором $\rho > 0$ сходится ряд*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^{\rho}, \tag{13}$$

где γ_s — *собственные значения оператора* $(C^*C)^{1/2}$, *и пусть значения квадратичной формы* (Ch, h) *лежат в секторе* *

$$-\frac{\pi}{2\rho'} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2\rho'}, \quad \rho' > \max\left(\rho, \frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

Тогда ряд Фурье любого элемента $\mathfrak{f}$, *принадлежащего области значений оператора* C, *т. е. представимого в виде* $\mathfrak{f} = C\mathfrak{h}$, *суммируем к* $\mathfrak{f}$ *по методу* (A, λ, α) *при всех* α, *удовлетворяющих условию* $\rho' > \alpha > \rho$, *а в случае целого* ρ *условию* $\rho' > \alpha \geqslant \rho$.

Для доказательства мы рассматриваем интеграл

$$\mathfrak{u}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{-\lambda^{\alpha}t}(E - \lambda C)^{-1}C\mathfrak{f}\,d\lambda. \tag{15}$$

Данный интеграл берется по границе области G, представляющей собой сектор $-\pi/2\rho' - \varepsilon < \arg z < \pi/2\rho' + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ и достаточно мало), из которого удалена окрестность начала координат столь малая, что в ней функция $R_\lambda \mathfrak{f} = (E - \lambda C)^{-1}\mathfrak{f}$ регулярна. Можно показать, что на контуре γ резольвента R_λ ограничена, поэтому при $t > 0$ интеграл (15) существует. Дальнейшее доказательство основано на вычислении интеграла (15) при помощи теории вычетов. Рассматривается уходящая в бесконечность система контуров Γ_ν, концы которых скользят по нижнему и верхнему лучам контура γ. В части области G, отсекаемой контуром Γ_ν, находится N_ν полюсов резольвенты R_λ. Существенно, что контуры Γ_ν можно выбрать так, чтобы на них удовлетворялось неравенство

$$\| R_\lambda \mathfrak{f} \| \leqslant e^{o(|\lambda|^{\alpha})} \| \mathfrak{f} \|. \tag{16}$$

Так как в силу этой оценки при фиксированном $t > 0$ $\int_{\Gamma_\nu} e^{-\lambda^{\alpha}t} R_\lambda \mathfrak{f}\,d\lambda \to 0$, то отсюда уже следует формула (11). Наличие контуров Γ_ν, на которых справедливо неравенство (16), мы устанавливаем, представляя резольвенту в виде $R_\lambda \mathfrak{f} = D_C(\lambda)/\Delta(\lambda)$, где $D_C(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ — соответственно первый минор и детерминант Фредгольма оператора C. Как было впервые в общей форме доказано М. В. Келдышем ([6]), *при условии* (13) $D_C(\lambda)$ *и* $\Delta(\lambda)$ *представляют собой целые функции порядка не выше* ρ. Это утверждение может быть дополнено в том отношении, что *в случае целого* ρ *обе функции* $D_C(\lambda)$ *и* $\Delta(\lambda)$ *минимального типа*. Опираясь на эти факты и пользуясь известными оценками для модуля целой функции снизу (см ([7]), стр. 33), мы получаем неравенство (16). Тот факт, что $\mathfrak{u}(t) \to \mathfrak{f}$ при $t \to +0$, доказывается без труда.

Сделаем еще несколько замечаний.

В случае $\alpha > \rho$ последовательность контуров Γ_ν может быть выбрана весьма густой. В формуле (11) объединенными оказываются лишь те элементы системы (1), которые относятся либо к одному и тому же собственному значению, либо к разным, но «экспоненциально близким» собственным значениям. Следует отметить, что, как показывают примеры, полного разделения даже в случае однократного спектра добиться невозможно.

Заметим, что при $\alpha = 1$ функция $\mathfrak{u}(t)$ (15) при условии $C = B^{-1}$ представляет собой решение задачи Коши для уравнения $\partial\mathfrak{u}/\partial t + B\mathfrak{u} = 0$.

Из наших рассуждений поэтому вытекает следующий факт, который мы формулируем для случая дифференциальных операторов:

Теорема 2. *Пусть* L — *сильно эллиптический оператор порядка* $2m$, *который действует в гильбертовом пространстве функций, определенных*

* Заметим, что значения квадратичной формы всегда заполняют выпуклое множество; поэтому в случае $\rho' < 1$ условие (14) означает, что значения (Ch, h) не выходят за пределы некоторой полуплоскости, содержащейся в указанном секторе.

в некоторой конечной области D n-мерного пространства с гладкой границей S. Пусть $2m > n$.

Тогда решение $\mathbf{u}(t)$ смешанной задачи

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L\mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{u}\,|_{t=0} = f, \quad \mathbf{u}\Big|_S = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu}\Big|_S = \ldots = \frac{\partial^m \mathbf{u}}{\partial \nu^m}\Big|_S = 0$$

разлагается в сходящийся при всех $t > 0$ ряд Фурье по главным векторам оператора L:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{s=N_\nu+1}^{N_\nu+1} \omega_s(t)\, \mathbf{e}_s.$$

Поясним, что соответствующий резольвенте сильно эллиптического оператора ряд (13) сходится при всех $\rho > n/2m$. Так как кроме того значения квадратичной формы $((L+\mu^2E)^{-1}\mathbf{h},\mathbf{h})$ лежат в некотором секторе правой полуплоскости, то $\rho' > 1$, и можно при условии $n/2m < 1$ положить $\alpha = 1$.

Укажем в заключение, что теорема 2 не охватывает случая уравнения второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{p,q=1}^{2} a_{pq}(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{s=1}^{2} b_s(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_s} + c(x_1, x_2)\,u, \tag{17}$$

где правая часть представляет собой эллиптический оператор (здесь $2m=n$, $\rho > 1$, и поэтому нельзя положить $\alpha = 1$). Тем не менее, нам удалось показать, что и *в этом случае решение $u(t)$ разлагается в сходящийся при всех $t > 0$ ряд Фурье по главным векторам.* При доказательстве мы воспользовались относительной малостью несамосопряженной части эллиптического оператора (17) и привлекли для оценки резольвенты в интеграле (15) результаты Т. Карлемана ([8]) и М. С. Лившица ([9]).

Автор выражает признательность акад. М. В. Келдышу за обсуждения вопросов о сходимости рядов Фурье по главным векторам, а также М. И. Вишику и М. А. Евграфову за внимание к настоящей работе.

Московский
физико-технический институт

Поступило
14 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, **77**, 11 (1951). [2] В. Б. Лидский, ДАН, **119**, № 6 1958). [3] В. Б. Лидский, ДАН, **125**, № 3 (1959). [4] М. Г. Крейн, УМН, **14**, в. 3 (87) (1959). [5] М. Г. Крейн, ДАН, **130**, № 2 (1960). [6] Дж. Э. Аллахвердиев, ДАН, **115**, № 2 (1957). [7] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. [8] T. Carleman, Ber. d. Math.-Phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig, **119** (1936). [9] М. С. Лившиц, Матем. сборн., **34** (76), 1, 145 (1954).