Доклады Академии наук СССР
1968. Том 183, № 2
УДК 517.948:513.88 МАТЕМАТИКА

Е. А. ЛИФШИЦ, Б. Н. САДОВСКИЙ

ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННО УПЛОТНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 25 III 1968)

В ([1]) была доказана теорема о неподвижных точках одного общего класса операторов, действующих в банаховых пространствах. Показано, что этот класс включает в себя сжимающие операторы, вполне непрерывные, а также суммы операторов указанных двух типов. Естественно возникло желание получить более общий принцип неподвижной точки, который, в частности, содержал бы и классический принцип А. Н. Тихонова ([2]). Полученный на этом пути результат излагается в настоящей работе.

Определение. Пусть E — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Действующий в E непрерывный оператор f назовем обобщенно уплотняющим на множестве $T \subseteq E$, если для любого множества $\Omega \subseteq T$ из $f(\Omega) \subseteq \Omega$ и из бикомпактности множества $\Omega \setminus \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega)$ вытекает бикомпактность $\overline{\Omega}$.

Теорема. *Пусть $T(\subseteq E)$ — выпуклое замкнутое множество. Пусть обобщенно уплотняющий оператор f переводит T в себя: $f(T) \subseteq T$. Тогда f имеет в T хотя бы одну неподвижную точку.*

Доказательство. Напомним некоторые сведения, относящиеся к обобщенным последовательностям. Обобщенной последовательностью элементов множества X называется отображение g: $D \to X$ направленного множества D в X (направленное множество — это частично упорядоченное множество, в котором каждое конечное подмножество имеет мажоранту). Точка x топологического пространства X называется обобщенной предельной точкой обобщенной последовательности g: $D \to X$, если для каждой окрестности U точки x и любого $d_0 \in D$ существует $d \geqslant d_0$ такое, что $g(d) \in U$. Каждая обобщенная последовательность в бикомпактном пространстве X имеет по крайней мере одну обобщенную предельную точку (см. ([3]), стр. 38—41).

Пусть α — порядковое число; A_α — множество всех порядковых чисел, не превосходящих α. Докажем по индукции, что существует обобщенная последовательность g: $A_\alpha \to T$, обладающая следующими свойствами: а) $g(\beta) = f[g(\beta - 1)]$, если β — порядковое число первого рода; б) $g(\beta)$ является обобщенной предельной точкой обобщенной последовательности g: $A^\beta \to T$ (A^β — множество всех порядковых чисел, предшествующих β), если β — порядковое число второго рода.

Если $\alpha = 0$, то существование такой последовательности очевидно. Пусть она существует для любого $\alpha < \gamma$. Покажем, что она существует и для $\alpha = \gamma$.

Если γ — порядковое число первого рода, то мы можем доопределить обобщенную последовательность g: $A_{\gamma-1} \to T$, положив $g(\gamma) = f[g(\gamma - 1)]$. При этом, очевидно, получится последовательность, также удовлетворяющая требованиям а) и б). (Здесь мы используем тот факт, что $f(T) \subseteq T$.)

Если γ — порядковое число второго рода, то мы покажем предварительно, что замыкание множества точек $\Omega = \{g(\alpha),\ \alpha < \gamma\}$ бикомпактно. Согласно условию теоремы и определению обобщенно уплотняющего оператора, для этого достаточно показать, что множество

$$\Omega \setminus \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega) \tag{1}$$

бикомпактно. Очевидно, $f(\Omega) = \{g(\alpha), \alpha < \gamma$, α — порядковое число первого рода$\}$, так как по предположению индукции $f[g(\alpha)] = g(\alpha + 1)$ (отсюда, кстати, вытекает включение $f(\Omega) \subseteq \Omega$). Далее, если α — порядковое число второго рода, $\alpha < \gamma$, $\alpha \neq 0$, то, по предположению, $g(\alpha)$ есть обобщенная предельная точка последовательности g: $A^\alpha \to T$ и, следовательно,

$$g(\alpha) \in \overline{f(\Omega)}.$$

Итак,

$$\Omega \setminus \{g(0)\} \subseteq \overline{f(\Omega)},$$

но тогда и подавно

$$\Omega \setminus \{g(0)\} \subseteq \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega \setminus \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega) \subseteq \{g(0)\},$$

так что множество (1), а следовательно, и $\overline{\Omega}$ бикомпактно. Поэтому обобщенная последовательность g: $A^\gamma \to T$ имеет предельную точку, которую можно принять за $g(\gamma)$.

Итак, существование обобщенной последовательности, удовлетворяющей условиям а) и б), доказано для любого порядкового числа α. Построим трансфинитную последовательность множеств $\{\Omega_\alpha\}$ по формулам: $\Omega_0 = T$; $\Omega_\alpha = \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega_{\alpha-1})$, если α — порядковое число первого рода; $\Omega_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \Omega_\beta$, если α — порядковое число второго рода.

Нетрудно видеть, что все эти множества лежат в T, выпуклы, замкнуты и инвариантны относительно f: $f(\Omega_\alpha) \subseteq \Omega_\alpha$. Очевидно также, что с некоторого момента последовательность $\{\Omega_\alpha\}$ становится стационарной: $\Omega_{\gamma+1} = \Omega_\gamma$. Это значит, что $\overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega_\gamma) = \Omega_\gamma$, т. е. множество $\Omega_\gamma \setminus \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega_\gamma)$ пусто. Отсюда и из определений обобщенно уплотняющего оператора f вытекает бикомпактность множества Ω_γ. Если мы покажем, что Ω_γ не пусто, то доказательство можно будет завершить ссылкой на теорему Шаудера — Тихонова ([3], стр. 493), согласно которой непрерывный оператор f, переводящий выпуклое бикомпактное множество локально выпуклого линейного топологического пространства в себя, имеет в этом множестве неподвижную точку.

Для того чтобы доказать непустоту Ω_γ, мы рассмотрим обобщенную последовательность g: $A_\gamma \to T$, существование которой доказано выше, и проверим индукцией по α, что $g(\alpha) \in \Omega_\alpha$ при $\alpha \leqslant \gamma$. Очевидно, $g(0) \in \Omega_0 = T$. Далее, если α — порядковое число первого рода, то из $g(\alpha - 1) \in \Omega_{\alpha-1}$ вытекает

$$g(\alpha) = f[g(\alpha - 1)] \in f(\Omega_{\alpha-1}) \subseteq \overline{\mathrm{co}}\, f(\Omega_{\alpha-1}) = \Omega_\alpha.$$

Пусть α — порядковое число второго рода и пусть $g(\beta) \in \Omega_\beta$ при $\beta < \alpha$. Согласно б), $g(\alpha)$ есть обобщенная предельная точка последовательности g: $A^\alpha \to T$. Зафиксируем любое $\beta < \alpha$ и покажем, что $g(\alpha) \in \Omega_\beta$. Отсюда немедленно будет вытекать включение $g(\alpha) \in \Omega_\alpha$, так как $\Omega_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \Omega_\beta$. Пусть U — произвольная окрестность точки $g(\alpha)$. По определению обобщенной предельной точки, найдется $\beta' \geqslant \beta$ такое, что $g(\beta') \in U$. Так как $g(\beta') \in \Omega_{\beta'}$, то $\Omega_{\beta'} \cdot U \neq \phi$. Но тогда и подавно $\Omega_\beta \cdot U \neq \phi$. Итак, любая окрестность точки $g(\alpha)$ пересекается с Ω_β, т. е. $g(\alpha) \in \overline{\Omega}_\beta = \overline{\Omega}_\beta$. Теорема полностью доказана.

Институт автоматики и телемеханики
(технической кибернетики)

Воронежский государственный университет

Поступило
15 III 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Н. Садовский, Функциональный анализ и его прилож., 1, № 2 (1967). [2] А. Н. Тихонов, Math. Ann., 111 (1935). [3] Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы, ИЛ, 1962.