Ю.Г.Сафаров

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ БИХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Настоящая работа является продолжением [5] *). В первых двух параграфах доказываются более точные и более общие, нежели в [5], результаты об асимптотике функции распределения собственных значений (см.замечание 2). В § 3 приводится несколько простых результатов, связанных с обратной спектральной задачей.

В отличие от [5] в данной работе рассматриваются только операторы на многообразии без края. Это делается для того, чтобы избежать технических усложнений. Все результаты с помощью микролокального разбиения единицы переносятся на дифференциальные операторы на многообразии с краем, удовлетворяющие условиям из [I]. При этом меняется лишь определение фазового сдвига (см. [5]).

§ I. Обозначения. Основные результаты.

Пусть M - замкнутое компактное d-мерное C^∞-многообразие, $d \geq 2$. Рассмотрим самосопряженный эллиптический классический псевдодифференциальный оператор A, действующий в пространстве полуплотностей на M (определения см. в [2,4]). Для простоты будем считать, что $A > 0$ и $\operatorname{ord} A = 1$ (в противном случае следует рассмотреть оператор $(A + cI)^{\varkappa}$, $\varkappa^{-1} = \operatorname{ord} A$). Обозначим через λ_j, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, собственные значения оператора A с учетом их кратности, через $N(\lambda)$ - функцию распределения собственных значений, $N(\lambda) = \#\{j : \lambda_j \leq \lambda\}$.

Пусть a - главний символ оператора A, a_s - субглавный символ, $S^*M = \{\nu \in T^*M : a(\nu) = 1\}$. Обозначим через G^t гамильтонов поток в S^*M, порожденный главным символом оператора A. Точка $\nu \in S^*M$ называется абсолютно t-периодической, если график отображения G^t в точке $(\nu, G^t\nu)$ имеет касание бесконечного порядка с графиком тождественного отображения. Точка ν называется абсолютно периодической, если для некоторого $t > 0$ она абсолютно t-периодическая. Обозначим множество абсолютно периодических точек через Π^a, множество абсолютно t-периодических точек - через Π^a_t. Тогда $S^*M \supset \Pi^a = \bigcup_{t>0} \Pi^a_t$.

*) Работа [5] на русском языке готовится к печати в I79 томе Трудов МИАН СССР.

Стандартную меру в S^*M будем обозначать mes, ее элемент $- d\nu$. Для каждого $\varkappa \in \mathbb{R}^1_+$ объединение Π^a_t по $t \leq \varkappa$ замкнуто в S^*M. Поэтому множество Π^a измеримо. Пусть $T(\nu)$ - примитивный период траектории гамильтонова потока, выпущенной из точки $\nu \in \Pi^a$ (тогда $\nu \in \Pi^a_{T(\nu)}$). Нетрудно показать, что функция $T(\nu)$, заданная на Π^a, измерима и что $T(\nu) \geq const > 0$ для всех $\nu \in \Pi^a$.

Обозначим через $q_c(\nu)$ индекс Маслова периодической траектории длины $T(\nu)$, выпущенной из точки $\nu \in \Pi^a$, через $q_s(\nu)$ -интеграл субглавного символа оператора A по этой траектории. Пусть $q(\nu) = q_c(\nu) - q_s(\nu)$; $q(\nu)$ можно интерпретировать как сдвиг фазы при обходе по замкнутой траектории (см. [5]). Так как $q_s(\nu) = \beta_s(T(\nu), \nu)$, где β_s - C^∞-функция на $\mathbb{R}^1_+ \times S^*M$, то функция $q_s(\nu)$, заданная на Π^a, измерима. Из определения индекса Маслова следует (см., например, [5, § 2]), что если $\nu_n \to \nu$ и $T(\nu_n) \leq const$, то $q_c(\nu_n) \to q_c(\nu)$. Поэтому измерима и функция $q_c(\nu)$. Следовательно, $q(\nu)$ - измеримая функция на Π^a.

Для $\tau \in \mathbb{R}^1$ через $[\tau]_{2\pi}$ будем обозначать вычет τ по модулю 2π, т.е. $-\pi < [\tau]_{2\pi} \leq \pi$ и $[\tau]_{2\pi} = \tau + 2\pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Положим

$$Q(\lambda) = (2\pi)^{-d} \int_{\Pi^a} \frac{[\pi - \lambda T(\nu) - q(\nu)]_{2\pi}}{T(\nu)} \, d\nu .$$

Функция Q непрерывна справа и ограничена,

$$|Q(\lambda)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{1-d} \int_{\Pi^a} T^{-1}(\nu) \, d\nu .$$

Из теоремы Фубини следует

$$\int_0^\lambda Q(\mu) \, d\mu \leq const . \tag{I.I}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\tau_n \to +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что функция Q асимптотически непрерывна в точках τ_n, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что $|Q(\tau_n) - Q(\mu)| \leq \varepsilon$ при $n \geq m$, $|\tau_n - \mu| \leq \delta$. Будем говорить, что функция Q асимптотически непрерывна, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$, $\mu > 0$ такие, что $|Q(\mu_1) - Q(\mu_2)| \leq \varepsilon$ при $\mu_1 \geq \mu$, $\mu_2 \geq \mu$, $|\mu_1 - \mu_2| \leq \delta$.

Положим

$$c_0 = d^{-1}(2\pi)^{-d} mes\, S^*M, \qquad c_1 = (2\pi)^{-d} \int_{S^*M} a_s(\nu) \, d\nu ,$$

$$V(\lambda) = c_0 \lambda^d - c_1 \lambda^{d-1} + Q(\lambda) \lambda^{d-1} .$$

В силу предложения I (см.ниже) для любого $\varepsilon \geqslant 0$

$$V(\lambda) - V(\lambda+\varepsilon) \leqslant const(\lambda^{d-2}+1), \quad \lambda \geqslant 0 .$$

ТЕОРЕМА I. Для любого $\varepsilon > 0$

$$V(\lambda+\varepsilon) + o(\lambda^{d-1}) \geqslant N(\lambda) \geqslant V(\lambda-\varepsilon) - o(\lambda^{d-1}) \tag{I.2}$$

($o(\lambda^{d-1})$, вообще говоря, зависит от ε).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I см. в § 2.

СЛЕДСТВИЕ I. Если функция Q асимптотически непрерывна, то $N(\lambda)$ имеет "квазивейлевскую" асимптотику: $N(\lambda) = V(\lambda) + o(\lambda^{d-1})$. Если функция $Q(\lambda)$ асимптотически непрерывна в точках μ_n, $\mu_n \to +\infty$, то $N(\mu_n) = V(\mu_n) + o(\mu_n^{d-1})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mu_n \to +\infty$. Предположим, что функция $Q(\lambda)$ асимптотически непрерывна в точках $\mu_n \pm \varepsilon$. Тогда

$$\#\{j : |\mu_n - \lambda_j| \leqslant \varepsilon\} = V(\mu_n+\varepsilon) - V(\mu_n-\varepsilon) + o(\mu_n^{d-1}) .$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mu_n \to +\infty$. Для любой сходящейся к нулю положительной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ найдется последовательность $\{\varepsilon'_n\}$, $\varepsilon'_n \geqslant \varepsilon_n$, $\varepsilon'_n \to 0$, такая, что

$$V(\mu_n+\varepsilon'_n) - V(\mu_n-\varepsilon'_n) + o(\mu_n^{d-1}) \geqslant \#\{j : |\mu_n - \lambda_j| \leqslant \varepsilon_n\} , \tag{I.3}$$

$$V(\mu_n+\varepsilon_n) - V(\mu_n-\varepsilon_n) - o(\mu_n^{d-1}) \leqslant \#\{j : |\mu_n - \lambda_j| \leqslant \varepsilon'_n\} . \tag{I.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствия I и 2 легко выводятся из (I.2) и определения асимптотической непрерывности. Докажем (I.3) и (I.4).

В силу (I.2) для любого $\varepsilon > 0$

$$V(\mu_n+3\varepsilon/2) - V(\mu_n-3\varepsilon/2) + o(\mu_n^{d-1}) \geqslant \#\{j : |\mu_n - \lambda_j| \leqslant \varepsilon\} \geqslant$$

$$\geqslant V(\mu_n+\varepsilon/2) - V(\mu_n-\varepsilon/2) - o(\mu_n^{d-1}) .$$

Поэтому по любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ можно построить последовательность $\{\varepsilon_n^*\}$ вида $\{\varepsilon_1, \varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\}$, для которой

$$V(\mu_n+3\varepsilon_n^*/2) - V(\mu_n-3\varepsilon_n^*/2) + o(\mu_n^{d-1}) \geqslant \#\{j : |\mu_n - \lambda_j| \leqslant \varepsilon_n^*\} \geqslant$$

$$\geqslant V(\mu_n+\varepsilon_n^*/2) - V(\mu_n-\varepsilon_n^*/2) - o(\mu_n^{d-1})$$

(подробности см. в [5, § 4]). Так как $\varepsilon_n \to 0$, можно считать, что $\varepsilon_n^* \geqslant 2\varepsilon_n$ при больших n . Отсюда следует II.3) с $\varepsilon_n' = 3\varepsilon_n^*/2$ и (I.4) с $\varepsilon_n' = \varepsilon_n^*$. ▨

В силу (I.3) и (I.4) функция Q не является асимптотически непрерывной в точках $\mu_n \to +\infty$ тогда и только тогда, когда собственные значения образуют кластеры, стягивающиеся к точкам μ_n .

Положим $\Omega_\mu = \{ \nu \in \Pi^a : \mu T(\nu) + q(\nu) = 0 \ (mod\ 2\pi) \}$,

$\Omega^\varepsilon_{\mu,k} = \{ \nu \in \Pi^a : -\varepsilon T(\nu) \leqslant \mu T(\nu) + q(\nu) - 2\pi k < \varepsilon T(\nu) \}$

и обозначим через $\chi^\varepsilon_{\mu,k}(\nu)$ индикатор множества $\Omega^\varepsilon_{\mu,k}$. В связи со следствиями 2 и 3 может оказаться полезным

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I (оно вытекает непосредственно из определения функции Q). Для любых $\mu \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon > 0$

$$Q(\mu+\varepsilon) - Q(\mu-\varepsilon) = -2(2\pi)^{-d}\varepsilon\, mes\, \Pi^a + \\ + (2\pi)^{-d+1} \int_{\Pi^a} T^{-1}(\nu) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi^\varepsilon_{\mu,k}(\nu)\, d\nu, \tag{I.5}$$

$$Q(\mu+0) - Q(\mu-0) = (2\pi)^{-d+1} \int_{\Omega_\mu} T^{-1}(\nu)\, d\nu. \tag{I.6}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Используя (I.6), можно показать, что функция Q непрерывна всюду за исключением не более чем счетного множества точек. В этих точках функция Q имеет разрывы первого рода.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда $mes\, \Pi^a = 0$, формула $N(\lambda) = V(\lambda) + o(\lambda^{d-1})$ была доказана Дж.Дейстермаатом и В.Гийемином в [4] . Там же получены значительно более точные, нежели следствие 3, результаты об асимптотике спектра операторов, для которых $\Pi^a = S^*M$, $T(\nu) = const$, $q(\nu) = const$. Эти результаты были еще более усилены Коленом де Вердье в [3] . В [6] для оператора Шредингера с магнитным потенциалом на сфере доказано следствие 2. Следствие 2 и формула $N(\lambda) = V(\lambda) + o(\lambda^{d-1})$ из следствия I доказаны в [5] для дифференциального оператора второго порядка на многообразии с краем в предположении, что $mes\{\nu \in \Pi^a : T(\nu) \neq T_0\} = 0$ для некоторого $T_0 > 0$. В [5] предполагалось также, что коэффициенты оператора вещественны. По недосмотру в [5] это предположение явно не сформулировано.

§ 2. Доказательство теоремы I.

Введем функцию $\rho \in S(\mathbb{R}^1)$ такую, что $\rho(\tau)=\rho(-\tau)$, $\rho(\tau)\geq 0$, $\forall\tau$, $\rho(\tau)>0$ при $|\tau|\leq 1$, $\hat{\rho}(0)=1$, $\hat{\rho}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ и имеет достаточно малый носитель. Для $\delta>0$ положим $\rho_\delta(\tau)=\delta^{-1}\rho(\delta^{-1}\tau)$.

В дальнейшем через C обозначаются различные константы, зависящие только от оператора A и функции ρ.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $e(\lambda)$ – неубывающая функция не более чем степенного роста, $e_\delta = e*\rho_\delta$, $\delta\leq 1$. Предположим, что $e_1'(\lambda)\leq C(|\lambda|^{d-1}+1)$. Тогда при $\varepsilon\in(0,1]$

$$e_\delta(\lambda-\varepsilon)-\varepsilon^{-1}C(\delta|\lambda|^{d-1}+1)\leq e(\lambda)\leq \tag{2.I}$$
$$\leq e_\delta(\lambda+\varepsilon)+\varepsilon^{-1}C(\delta|\lambda|^{d-1}+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция ρ отделена от нуля на отрезке $[-1,1]$ и неотрицательна, имеем

$$C(|\lambda|^{d-1}+1)\geq e_1'(\lambda)=\int\rho(\lambda-\mu)\,de(\mu)\geq C\int_\lambda^{\lambda+1}de(\mu)=$$
$$=C[e(\lambda+1)-e(\lambda)].$$

Поэтому

$$|e(\lambda+s)-e(\lambda)|\leq C(1+|s|)(|\lambda|^{d-1}+|s|^{d-1}+1). \tag{2.2}$$

Так как $\int\rho_\delta(\mu)\,d\mu=1$, то

$$\int\rho_\delta(\lambda\pm\varepsilon-\mu)e(\mu)\,d\mu-e(\lambda)=\int\rho_\delta(\lambda\pm\varepsilon-\mu)[e(\mu)-e(\lambda)]\,d\mu=$$
$$=\int\rho(\tau)[e(\lambda\pm\varepsilon-\delta\tau)-e(\lambda)]\,d\tau.$$

Поскольку функция ρ быстро убывает, используя (2.2), получаем

$$\pm\int\rho(\tau)[e(\lambda\pm\varepsilon-\delta\tau)-e(\lambda)]\,d\tau\geq\pm\int_{\delta|\tau|\geq\varepsilon}\rho(\tau)[e(\lambda\pm\varepsilon-\delta\tau)-e(\lambda)]\,d\tau\geq$$
$$\geq -C\int_{\delta|\tau|\geq\varepsilon}\rho(\tau)(1+|\tau|)(|\lambda|^{d-1}+|\tau|^{d-1}+1)\,d\tau\geq-\varepsilon^{-1}\delta C(|\lambda|^{d-1}+1).$$

Отсюда следует (2.I). ▨

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\varphi\in S(\mathbb{R}^1)$, $\hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $0\overline{\in}\operatorname{supp}\hat{\varphi}$. Тогда

$$\int\varphi(\lambda-\mu)\,dN(\mu)=(2\pi)^{-d}\int_{\Pi^a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ik(\lambda T(\nu)+q(\nu))}\times$$
$$\times\hat{\varphi}(kT(\nu))\,d\nu\,\lambda^{d-1}+o(\lambda^{d-1}),\qquad\lambda\to+\infty,$$
$$\int\varphi(\lambda-\mu)\,dN(\mu)=o(\lambda^{-n}),\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad\lambda\to-\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается повторением рассуждений [5, § 3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [4, стр.46]). Пусть $\varphi\in S(\mathbb{R}^1)$, $\hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\hat{\varphi}(0)=1$, $D_t\hat{\varphi}(0)=0$. Если носитель $\hat{\varphi}$ достаточно мал, то

$$\int\varphi(\lambda-\mu)\,dN(\mu)=d\,c_0\lambda^{d-1}-(d-1)c_1\lambda^{d-2}+o(\lambda^{d-2}),\quad \lambda\to+\infty,$$

$$\int\varphi(\lambda-\mu)\,dN(\mu)=o(\lambda^{-n}),\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \lambda\to-\infty.$$

Из предложений 2 и 3 следует, что

$$\int\rho_\delta(\lambda-\mu)\,dN(\mu)=d\,c_0\lambda^{d-1}+2(2\pi)^{-d}\int_{\Pi^a}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\rho}(\delta nT(\nu))\times$$
$$\times\cos(n\lambda T(\nu)+nq(\nu))\,d\nu\,\lambda^{d-1}+o(\lambda^{d-1}),\quad \lambda\to+\infty, \tag{2.3}$$

$$\int\rho_\delta(\lambda-\mu)\,dN(\mu)=o(\lambda^{-n}),\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \lambda\to-\infty. \tag{2.4}$$

Заметим, что в условиях предложения 2

$$\int_0^\lambda\int\varphi(\mu-\tau)\,dN(\tau)\,d\mu=\int\psi(\lambda-\mu)\,dN(\mu)+C,$$

где $\psi(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}\varphi(\mu)\,d\mu$. Так как $0\overline{\in}\operatorname{supp}\hat{\varphi}$, то $\psi\in S(\mathbb{R}^1)$. При этом $\hat{\psi}(t)=(it)^{-1}\hat{\varphi}(t)$. Поэтому из предложений 2 и 3 следует также, что

$$N*\rho_\delta(\lambda)=c_0\lambda^d-c_1\lambda^{d-1}+2(2\pi)^{-d}\int_{\Pi^a}T^{-1}(\nu)\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\hat{\rho}(\delta nT(\nu))\sin(n\lambda T(\nu)+nq(\nu))\,d\nu\,\lambda^{d-1}+o(\lambda^{d-1}). \tag{2.5}$$

Пусть $\theta_{\lambda,n}(\nu)=\theta(\lambda T(\nu)+q(\nu)-2\pi n)$, где $\theta(t)=0$ при $t<0$ и $\theta(t)=1$ при $t\geq 0$. Заметим, что при фиксированных λ, ν и $n\in\mathbb{N}$ лишь конечное число $\theta_{\lambda,n}(\nu)$ отлично от нуля и

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{\lambda,n}(\nu)=\lambda T(\nu)+q(\nu)-\pi+$$
$$+\left[\pi-\lambda T(\nu)-q(\nu)\right]_{2\pi} \tag{2.6}$$

при $\lambda\gg 1$ (здесь и далее $\lambda\gg 1$ означает, что $\lambda\geq\lambda_0$, где λ_0 определяется функцией $T(\nu)$). Обозначим через $I^\delta_{\lambda,k}(\nu)$ интеграл функции ρ по отрезку $\left[-2\pi kT^{-1}\delta^{-1},(\lambda T+q-2\pi k)T^{-1}\delta^{-1}\right]$ и положим $I^\delta_\lambda(\nu)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}I^\delta_{\lambda,k}(\nu)$.

ЛЕММА I. При всех $\varepsilon\in(0,1]$, $\delta>0$, $\lambda\gg1$, $\nu\in\Pi^a$

$$\varepsilon T(\nu)+[\pi-(\lambda+\varepsilon)T(\nu)-q(\nu)]_{2\pi}+\varepsilon^{-1}\delta CT(\nu)\geqslant 2\pi I_\lambda^\delta(\nu)-$$
$$-\lambda T(\nu)-q(\nu)\geqslant-\varepsilon T(\nu)+[\pi-(\lambda-\varepsilon)T(\nu)-q(\nu)]_{2\pi}-\varepsilon^{-1}\delta CT(\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (2.6) достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{\lambda+\varepsilon,n}(\nu)+\varepsilon^{-1}\delta CT(\nu)+1/2\geqslant I_\lambda^\delta(\nu)\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{\lambda-\varepsilon,n}(\nu)-\varepsilon^{-1}\delta CT(\nu)+1/2. \tag{2.7}$$

Для этого нам понадобится следующее очевидное неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\varkappa n}^{\infty}\rho(\tau)\,d\tau\leqslant\varkappa^{-1}C,\quad\forall\varkappa>0. \tag{2.8}$$

Так как $\sum_{k=-1}^{-\infty}I_{\lambda,k}^\delta(\nu)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{Ck}^{\infty}\rho(\tau)\,d\tau$, где $C=2\pi T^{-1}(\nu)\delta^{-1}$, то из (2.8) следует $\sum_{k=-1}^{-\infty}I_{\lambda,k}^\delta\leqslant CT\delta$. Поскольку $\int_0^\infty\rho(\tau)\,d\tau=1/2$, точно так же оценивается и разность $I_{\lambda,0}^\delta-1/2$. Остается оценить сумму $I_{\lambda,k}^\delta$ по $k\in\mathbb{N}$.

Предположим, что $\theta_{\lambda+\varepsilon,k}(\nu)=1$, $k=1,\dots,m$, и $\theta_{\lambda+\varepsilon,k}(\nu)=0$ при $k>m$. Тогда в силу (2.8) $\sum_{k>m}I_{\lambda,k}^\delta(\nu)\leqslant\varepsilon^{-1}\delta CT(\nu)$. Оценив теперь сумму $I_{\lambda,k}^\delta(\nu)$ по $k=1,\dots,m$ через m, получим оценку сверху в (2.7).

Предположим теперь, что $\theta_{\lambda-\varepsilon,k}(\nu)=1$, $k=1,\dots,m$ и $\theta_{\lambda-\varepsilon,k}(\nu)=0$ при $k>m$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}I_{\lambda,k}^\delta(\nu)-m\geqslant\sum_{k=1}^{m}I_{\lambda,k}^\delta-m\geqslant-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{-b_k}\rho(\tau)\,d\tau-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\int_{b_k}^{\infty}\rho(\tau)\,d\tau, \tag{2.9}$$

где $b=2\pi T^{-1}(\nu)\delta^{-1}$, $b_k=kb+\varepsilon\delta^{-1}$. Аналогично предыдущему правая часть (2.9) оценивается снизу через $-\varepsilon^{-1}\delta CT(\nu)$. Отсюда вытекает оценка снизу в (2.7). ▨

Из (2.3) и (2.4) следует

$$\int\rho(\lambda-\mu)\,dN(\mu)\leqslant C\left(|\lambda|^{d-1}+1\right).$$

Поэтому согласно теореме 2 для любого $\varepsilon>0$

$$N*\rho_\delta(\lambda+\varepsilon/2)+\varepsilon^{-1}C\left(\delta|\lambda|^{d-1}+1\right)\geqslant N(\lambda)\geqslant$$

$$\geqslant N * \varrho_\delta(\lambda - \varepsilon/2) - \varepsilon^{-1} C\left(\delta|\lambda|^{d-1} + 1\right).$$

Из (2.5), используя формулу Пуассона, получаем

$$N * \varrho_\delta(\mu) = C_0 \mu^d - C_1 \mu^{d-1} +$$
$$+ (2\pi)^{-d} \int_{\Pi^a} \left[2\pi I^\delta_\mu(\nu) - \mu T(\nu) - q(\nu)\right] T^{-1}(\nu)\, d\nu\, \mu^{d-1} +$$
$$+ o\left(\mu^{d-1}\right), \quad \mu \to +\infty.$$

Отсюда и из леммы I следует, что

$$V(\lambda+\varepsilon) + \varepsilon^{-1}\delta C|\lambda|^{d-1} + o(\lambda^{d-1}) \geqslant N(\lambda) \geqslant$$
$$V(\lambda-\varepsilon) - \varepsilon^{-1}\delta C|\lambda|^{d-1} - o(\lambda^{d-1}) \tag{2.10}$$

Поскольку δ может быть произвольно малым, из (2.10) вытекает (I.2).

§ 3. Обратные результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $\mu \to +\infty$

$$\sum_{\lambda_j \leqslant \mu} (\mu - \lambda_j) = \int_0^\mu N(\lambda)\, d\lambda = (d+1)^{-1} C_0 \mu^{d+1} - d^{-1} C_1 \mu^d + o(\mu^d). \tag{3.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (I.1) $\int_0^\mu Q(\lambda)\lambda^{d-1}\, d\lambda = o(\mu^d)$.

Поэтому, интегрируя (I.2) по отрезку $[0, \mu]$, получаем (3.1).

Формула (3.1) позволяет, зная функцию $N(\lambda)$ с точностью до $o(\lambda^{d-1})$, определить константы C_0 и C_1. В случае, когда $N(\lambda)$ имеет квазивейлевскую асимптотику, это дает возможность определить функцию Q с точностью до $O(1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Предположим, что существуют константа $\varkappa > 0$ и положительные последовательности $\varepsilon_n \to 0$, $\mu_n \to +\infty$ такие, что $\#\{j : |\mu_n - \lambda_j| \leqslant \varepsilon_n\} \geqslant \varkappa \mu_n^{d-1}$. Тогда

$$(2\pi)^{1-d} \int_{\Pi^a} T^{-1}(\nu)\, d\nu \geqslant \varkappa. \tag{3.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (I.3) существует положительная последовательность $\varepsilon'_n \to 0$, для которой

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(V(\mu_n + \varepsilon'_n) - V(\mu_n - \varepsilon'_n)\right) / \mu_n^{d-1} \geqslant \varkappa.$$

В силу (I.5) отсюда следует, что

$$(2\pi)^{1-d} \varliminf_{n\to\infty} \int_{\Pi^a} T^{-1}(\nu) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi^{\varepsilon_n'}_{\mu_n,k}(\nu)\, d\nu \geqslant \varkappa . \qquad (3.3)$$

Из определения функций $\chi^{\varepsilon}_{\mu,k}(\nu)$ видно, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi^{\varepsilon}_{\mu,k}(\nu) \leqslant \pi^{-1} \varepsilon T(\nu) + 1 .$$

Поэтому из (3.3) вытекает (3.2).

Давно известно, что если $mes\, \Pi^a = 0$, то $N(\lambda) = c_0\lambda^d - c_1\lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1})$. Как показывает следующий пример, обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР. Пусть M - единичная трехмерная сфера S^3 со стандартной метрикой, $M = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$. Обозначим через $\alpha(x)$ векторное поле в $\mathbb{R}^4$, компоненты которого в точке $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ равны $(-x_2|x|^{-1}, x_1|x|^{-1}, -x_4|x|^{-1}, x_3|x|^{-1})$. Векторное поле $\alpha(x)$ касается M в каждой точке $x \in M$. Обозначим через ν дифференциальный оператор первого порядка на M, порожденный полем α (поскольку M - риманово многообразие, можно считать, что операторы действуют в пространстве функций, а не полуплотностей).

Пусть $\mathcal{A} = -\Delta + (i\nu^* - i\nu)/2$, где Δ - оператор Лапласа на M. Тогда $\mathcal{A} = -\Delta - i\nu$ с точностью до оператора умножения на гладкую функцию. Оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен в $L_2(M)$ и полуограничен снизу. Выберем константу $C > 0$ так, чтобы было $\mathcal{A} > -C$, и положим $A = (\mathcal{A} + C)^{1/2}$. Главный символ a оператора A равен корню из главного символа оператора Лапласа. Поэтому все бихарактеристики оператора A периодичны, а их проекции на M совпадают с геодезическими на M. Субглавный символ a_s оператора A равен произведению $(2a)^{-1}$ и субглавного символа оператора $\mathcal{A}$. В точке $(x,\xi) \in T^*M$, $x \in M$, $\xi \in T^*_x M$,

$$a_s(x,\xi) = \frac{1}{2} a^{-1}(x,\xi) \langle \alpha(x), \xi \rangle ,$$

где через $\langle \alpha(x), \xi \rangle$ обозначено значение ковектора ξ на векторе $\alpha(x) \in T^*_x M$. Если $(x(t), \xi(t))$ - единичная бихарактеристика оператора A (т.е. траектория потока G^t), то

$$a_s(x(t), \xi(t)) = \frac{1}{2} (\alpha(x(t)), \dot{x}(t))_x ,$$

где $\dot{x}(t)$ - касательный вектор к геодезической $x(t)$, $(\cdot,\cdot)_x$ -скалярное произведение в слое $T_x M$. Нетрудно показать, что величина $(\alpha(x(t)), \dot{x}(t))_x$ постоянна вдоль любой геодезической на M (это является следствием групповой структуры S^3). Поэтому субглавный символ a_s постоянен на траекториях потока G^t.

Поскольку для сферы S^3 $q_c(\nu)\equiv 0$, получаем отсюда

$$q(x,\xi)=-2\pi a_S(x,\xi)=-\pi\langle\alpha(x),\xi\rangle .$$

Заметим теперь, что в любой системе координат на M при $-1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$

$$vol\left\{\xi\in S^*_x M : x_1\leqslant\langle\alpha(x),\xi\rangle\leqslant x_2\right\}=2\pi(x_2-x_1)\,g(x),$$

где $g(x)$ - риманова плотность на M. Следовательно,

$$mes\left\{\nu\in S^*M : x_1\leqslant q(\nu)\leqslant x_2\right\}=2(x_2-x_1)vol\,M= \tag{3.4}$$
$$=(2\pi)^{-1}(x_2-x_1)mes\,S^*M,\quad -\pi\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\pi .$$

В силу (I.5) равенство (3.4) означает, что $Q\equiv const$. Ввиду (I.I) отсюда следует, что $Q\equiv 0$.

Таким образом, для оператора A

$$N(\lambda)=c_0\lambda^d-c_1\lambda^{d-1}+o(\lambda^{d-1})=\frac{1}{3}\lambda^3+o(\lambda^2),$$

несмотря на то, что $\Pi^a=S^*M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для дифференциального оператора $\mathcal{A}$ на полусфере S^3_+ с краевым условием Дирихле или Неймана также верна "вейлевская" формула асимптотики $N(\lambda)$. При этом все траектории биллиардного потока, соответствующего оператору $\mathcal{A}$ на S^3_+, периодичны.

Автор благодарит профессора М.З.Соломяка за внимание к работе.

Литература.

I. Васильев Д.Г. Двучленная асимптотика спектра краевой задачи. - Функц.анализ, I983, т.I7, вып.4, с.79-8I.

2. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. М., "Мир", I984.

3. Colin de Verdière J. Sur le spectre des opérateurs elliptiques a bicaractéristiques toutes periodiques. - Comment.Math.Helvetici, 1979, vol.54, 3, p.508-522.

4. Duistermaat J., Guillemin V. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. - Invent.Math., 1975, vol.29, 1, p.39-79.

5. Gurevich T.E., Safarov Yu.G. Precise asymptotics of the spectrum for the Laplace operator on manifolds with periodic geodesics. LOMI preprint E-1-86,Lenin-

grad, 1986.
6. K u w a b a r a R. Spectrum and holonomy of the line bundle over the sphere. - Mathematische Zeitschrift, 1984, 187, p.481-490.

Safarov Yu.G. Asymptotics of the spectrum of pseudo-differential operator with periodic bicharacteristics.

Let λ_j be the eigenvalues of positive elliptic pseudo-differential operator of order $m > 0$ on compact closed d-dimensional C^∞-manifold, $N(\lambda) = \#\{j : \lambda_j \leqslant \lambda^m\}$. It is shown that for each $\varepsilon > 0$

$$C_0(\lambda+\varepsilon)^d + C_1\lambda^{d-1} + Q(\lambda+\varepsilon)\lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}) \geqslant N(\lambda) \geqslant$$
$$\geqslant C_0(\lambda-\varepsilon)^d + C_1\lambda^{d-1} + Q(\lambda-\varepsilon)\lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}),$$

where C_0 and C_1 are standard Weyl constants, $Q(\mu)$ is some bounded function on $\mathbb{R}^1$. The function $Q(\mu)$ describes the influence of periodic bicharacteristics on the asymptotics of $N(\lambda)$. Under assumption of simple reflection of bicharacteristics this result is valid for differential operators on compact manifold with boundary too.