Функциональный анализ и его приложения,
1985, т. 19, вып. 1, 85—86

УДК 513.63

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Л. Е. Файбусович

В заметке обсуждается связь линейно-квадратичной задачи теории управления с симплектической геометрией.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\int_0^{+\infty} [\langle Qq, q\rangle + \langle u, u\rangle_U]\, dt \tag{1}$$

для системы управления

$$\dot{q} = Aq + Bu, \tag{2}$$

где переменная q принимает значения в векторном пространстве V, а управление u — в евклидовом пространстве $(U, \langle\,,\,\rangle_U)$; $Q\colon V \to V^*$, $Q^* = Q$, $B\colon U \to V$, $A\colon V \to V$ — линейные операторы. Согласно принципу Беллмана [1], экстремали функционала (1) описываются так: в пространстве $V \oplus V^*$ имеется каноническая симплектическая структура $\omega(q \oplus p,\ q' \oplus p') = p(q') - p'(q)$. Строится гамильтониан $h\colon V \oplus V^* \oplus U \to \mathbf{R}$, $h(q, p, u) = \langle Qq, q\rangle/2 + \langle u, u\rangle/2 + \langle p, Aq + Bu\rangle$. Экстремали функционала (1) суть траектории линейной гамильтоновой системы в симплектическом пространстве $V \oplus V^*$ с гемильтонианом $H(q, p) = -\min\{h(q, p, v)\colon v \in U\} = \langle p, BB^*p\rangle/2 - \langle p, Aq\rangle - \langle Qq, q\rangle/2$, лежащие на устойчивом инвариантном лагранжевом многообразии этого гамильтониана, при выборе управления $u = -B^*p$ (из условия минимума $h(q, p, u) = -H(q, p)$). В линейно-квадратичном случае рассматриваемая задача сводится к нахождению симметричного решения *алгебраического матричного уравнения Риккати* [1] ($u = -B^*Kq$)

$$KLK - A^*K - KA - Q = 0, \qquad L \geqslant 0 \quad (L = BB^*), \tag{3}$$

выражающего H-инвариантность графика K.

Мы опишем ниже в геометрических терминах свойства симметричных решений K, $K^* = K$, этого уравнения.

Лемма 1. *График симметричного решения* (3) — *H-инвариантное лагранжево подпространство.*

Множество точек $q \in V$, из которых с помощью выбора подходящего управления можно попасть в 0 вдоль траектории (2), образует подпространство $D = \operatorname{Im} L + A \operatorname{Im} L + A^2 \operatorname{Im} L + \ldots$ Система (2) называется *управляемой*, если $D = V$.

Лемма 2. $D^\perp = \operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Ker} LA^* \cap \operatorname{Ker} LA^{*2} \ldots \subset V^*$ *суть максимальное H-инвариантное подпространство в $0 \oplus V^*$.*

Лемма 3. *Пересечение H-инвариантного лагранжева подпространства в $V \oplus V^*$ с $0 \oplus V^*$ H-инвариантно.*

В самом деле, пусть X — поле гамильтониана H, $\Lambda \subset V \oplus V^*$ — H-инвариантное лагранжево подпространство. Тогда X касается Λ в точках из Λ. Далее, $H \mid \Lambda = 0 \Rightarrow H \mid \Lambda \cap V^* = 0 \Rightarrow L \mid \Lambda \cap V^* = 0$ $(L \geqslant 0)$. Но тогда $dH \mid \Lambda \cap V^* = -\langle A^*p, dq\rangle$, $p \in \Lambda \cap V^*$, и, значит, X касается V^* в точках из $\Lambda \cap V^*$. Итак, X касается $\Lambda \cap V^*$ в точках из $\Lambda \cap V^*$.

Теорема 1. *Для управляемой системы* (1), (2) *соответствие* $K \to \Gamma(K)$ (*график* K) *между симметричными решениями* (3) *и H-инвариантными лагранжевыми подпространствами в $V \oplus V^*$ взаимно однозначно.*

Оказывается [1], решение уравнения (3), соответствующее устойчивому инвариантному многообразию гамильтониана H, максимально на множестве симметричных решений (3) (относительно естественного отношения частичного порядка). Назовем такое решение (и его график) *экстремальным.*

Пространство $V \oplus V^*$ однозначно представляется как косоортогональная сумма $W_0 \oplus W$ симплектических H-инвариантных подпространств, из которых W_0 отвечает чисто мнимым, а W — остальным собственным числам. H-инвариантное лагранжево подпространство разбивается в прямую сумму своих пересечений с W_0 и W.

Лемма 4. *Экстремальное H-инвариантное лагранжево подпространство в W существует и единственно.*

В самом деле, максимальное «сжимающее» подпространство в W лагранжево. Таким образом, описание экстремальных решений сводится к случаю чисто мнимого спектра. Назовем лагранжево подпространство *нулевым*, *положительным* или *отрицательным*, если таково ограничение на него гамильтониана H.

Полупростой квадратичный гамильтониан с чисто мнимым спектром в подходящих канонических координатах $H_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (p_k^2 + q_k^2)/2$, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ (см. [2]).

Следующий результат принадлежит А. Б. Гивенталю [3].

Лемма 5. *Гамильтониан H_1 обладает положительным лагранжевым подпространством, если и только если $\alpha_{k+1} + \alpha_{n-k} > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Следствие. *Квадратичный гамильтониан с чисто мнимым спектром не может иметь положительное и отрицательное лагранжевы подпространства одновременно.*

В противном случае его полупростое возмущение с чисто мнимым спектром также обладало бы этим свойством, что противоречит лемме 5.

Лемма 6. *Если в косоортогональной прямой сумме $W_1 \oplus W_2$ симплектических инвариантных подпространств есть положительное лагранжево подпространство Λ, а в W_1 есть нулевое лагранжево подпространство Λ_1, то в W_2 есть положительное лагранжево подпространство.*

Им будет проекция в W_2 параллельно W_1 подпространства $(\Lambda_1 \oplus W_2) \cap \Lambda$.

Лемма 7. *Управляемая система* (2) *обладает положительным лагранжевым подпространством.*

Действительно, покажем, что при $Q > 0$ (3) обладает симметричным решением. Если это так, то график решения (3), в котором Q заменено на $Q + \varepsilon E$, с достаточно большим $\varepsilon > 0$ — искомое положительное лагранжево подпространство. Итак, пусть $Q > 0$. В силу теоремы 1, достаточно показать, что H обладает нулевым лагранжевым подпространством. Пусть $L > 0$. Ясно, что V^*, V будут положительным и отрицательным лагранжевым подпространством соответственно. Если $W_0 \neq 0$, то в силу лемм 4, 6 сужение H на W_0 обладало бы положительным и отрицательным лагранжевым подпространством. Но это противоречит следствию к лемме 5. Итак, $W_0 = 0$ и максимальное «сжимающее» подпространство в W — нулевое лагранжево подпространство для H в $V \oplus V^*$. Пусть теперь $L \geqslant 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ гамильтониан $H + \varepsilon \langle p, p \rangle$ имеет нулевое лагранжево подпространство $M(\varepsilon)$. Рассматривая отображение $\varepsilon \to M(\varepsilon)$ как кривую в лагранжевом грассманиане и пользуясь компактностью последнего, заключаем, что H обладает нулевым лагранжевым подпространством (при условии $Q > 0$).

Согласно классификации линейных гамильтоновых систем [2], фазовое пространство такой системы с чисто мнимым спектром $\{\pm i\alpha\}$ разбивается в косоортогональную сумму инвариантных симплектических подпространств, на каждом из которых гамильтонова система имеет при $\alpha = 0$: а) пару жордановых клеток порядка $2k-1$, либо б) одну жорданову клетку порядка $2k$, а при $\alpha \neq 0$ — пару жордановых клеток порядка $2k$ в), либо $2k-1$ г.) При данном k гамильтониан на таком подпространстве приводится симплектическим преобразованием в случае а) — к универсальной нормальной форме, а в случаях б), в), г) — к одной из двух нормальных форм, отличающихся знаком. При одном из этих знаков нормальная форма имеет положительное лагранжево подпространство (и называется *положительной*), при другом — отрицательное. В случае а) нет ни тех, ни других.

Лемма 8. *Если гамильтонова система с чисто мнимым спектром* $\{\pm i\alpha\}$ *имеет положительное лагранжево подпространство, то все ее жордановы клетки приводятся к положительной нормальной форме типов* б), в), г).

Инае, возмущая гамильтониан, можно было бы попасть в противоречие с леммой 5.

Лемма 9. *Если в условиях леммы 8 гамильтонова система имеет хотя бы одну жорданову клетку типа* г), *то она не имеет нулевых лагранжевых подпространств. В противном случае нулевое лагранжево подпространство существует и единственно* (*следует из анализа нормальных форм*).

Полученные результаты позволяют рассмотреть различные критерии разрешимости уравнения Риккати, включая частотный [4]. Докажем следующий основной результат [5].

Теорема 2. *Пусть система* (2) *управляема. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *существует симметричное решение* (3);

2) *существует единственное симметричное решение K уравнения* (3), *такое, что спектр $H \mid \Gamma(K)$ лежит в замкнутой левой полуплоскости*;

3) *всякая жорданова клетка гамильтониана H, соответствующая чисто мнимому собственному числу, имеет четный порядок.*

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1) очевидно; 3) $\Rightarrow$ 1) следует из явного вида нормальных форм [2] и теоремы 1; 1) $\Rightarrow$ 3, 2) по лемме 7 в $V \oplus V^*$ есть положительное лагранжево подпространство. Ввиду 1) в косоортогональном дополнении W_1 корневого подпространства W_2, отвечающего собственным числам $\{\pm i\alpha\}$, есть нулевое лагранжево подпространство, поэтому (лемма 6) в W_2 есть положительное лагранжево подпространство. Поскольку в нем есть также и нулевое (ввиду 1), то из лемм 8, 9 получаем 3), а из лемм 9, 4 и теоремы 1 получаем 2).

В заключение выражаю глубокую благодарность А. Б. Ги615нталю, оказавшему мне весьма существенную помощь при переработке первого варианта этой заметки.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления.— М.: Наука, 1980. 2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974. 3. *Гивенталь А. Б.*— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 3, с. 73—74. 4. *Чурилов А. Н.*— Сиб. мат. ж., 1979, № 4, с. 854—867. 5. *Lancaster P., Rodman L.*— Int. J. Contr., 1980, v. 32, p. 285—309.

Военная академия тыла и транспорта

Поступило в редакцию
29 ноября 1982 г.