С. А. Гриценко, О плотностной теореме, *Тр. МИАН*, 1994, том 207, 70–81

Труды Математического института РАН
1994, том 207

УДК 517.518

С.А. Гриценко

О плотностной теореме

Пусть $N(\alpha, T)$ — число нулей дзета-функции Римана в прямоугольнике $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \leq \operatorname{Re} s,\ 0 < \operatorname{Im} s \leq T$.

Оценки сверху величины $N(\alpha, T)$ называются плотностными теоремами.

Для приложений особый интерес представляют плотностные теоремы вида

$$N(\alpha, T) \leq c_1 T^{a(1-\alpha)} (\log T)^c,$$

где c_1, a, c — положительные абсолютные постоянные; здесь постоянная a играет основную роль, а постоянная c — второстепенную.

Лучшие известные к настоящему времени значения постоянных a и c установлены М.Н. Хаксли [1] и равны $a = 2,4,\ c = 44$.

Недавно А.А.Карацуба дал новое доказательство плотностной теоремы с $a = 2,4$ (см. [2]). Значение постоянной c в статье [2] не вычислялось.

Настоящая работа посвящена вычислению постоянной c. Она основана на методе А.А.Карацубы.

Отметим, что этим методом удалось получить $c = 32.6$. Использование дополнительно плотностной теоремы А.Е.Ингама (см. [3,4]) привело к следующей теореме.

Т е о р е м а. *Имеет место оценка*

$$N(\alpha, T) \ll T^{2,4(1-\alpha)} (\log T)^{18,2}.$$

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Л е м м а 1. *Пусть $S(t)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0, t_k]$ функция, $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$. Тогда, полагая $\delta = \min_{0 \leq r < k}(t_{r+1} - -t_r)$, будем иметь*

$$\sum_{r=1}^{k} |S(t_r)|^2 \leq \delta^{-1} \int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2\, dt + 2\Big(\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2\, dt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{t_0}^{t_k} |S'(t)|^2\, dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функцию $\omega_r(t)$ следующим образом:

$$\omega_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_r \leq t \leq t_{r+1}, \\ 0, & \text{если } t \notin [t_r, t_{r+1}]. \end{cases}$$

Положим

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int\limits_{t_0}^{t} \omega_r(u)\, du;$$

тогда

$$\int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} \varphi_r(t)(|S(t)|^2)'\, dt = \varphi_r(t)|S(t)|^2\Big|_{t_r}^{t_{r+1}} - \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2 \omega_r(t)\, dt =$$

$$= |S(t_{r+1})|^2 - \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2\, dt;$$

$$|S(t_{r+1})|^2 \le \delta^{-1} \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2\, dt + 2 \int\limits_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)| \cdot |S'(t)|\, dt.$$

Суммируя обе части неравенства по r, $0 \le r < k$, и применяя к интегралу от произведения неравенство Коши (квадрат интеграла от произведения неотрицательных функций не превосходит произведения интегралов от квадратов функций), получим утверждение леммы.

Л е м м а 2. *Пусть* $a(n)$ — *произвольные комплексные числа,* $0 < X < Y \le$ $\le 2X$, $2 < N < M \le 2N$,

$$I = \int\limits_X^Y \Big| \sum_{N<n\le M} a(n) n^{it} \Big|^2\, dt.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$I \le (X + 32N \log N) \sum_{N<n\le M} |a(n)|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$I = \sum_{N<n,m\le M} a(n)\overline{a(m)} \int\limits_X^Y \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt = (Y - X) \sum_{N<n\le M} |a(n)|^2 + W,$$

$$W = -i \sum_{N<n\ne m\le M} a(n)\overline{a(m)} \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{iY} - \left(\frac{n}{m}\right)^{iX} \right) \left(\log \frac{n}{m} \right)^{-1}.$$

Легко видеть, что

$$|W| \le 4 \sum_{N<n<m\le M} |a(n)| \cdot |a(m)| \left(\log \frac{m}{n} \right)^{-1}.$$

Полагая $m = n + r$, $1 \le r < M - N$, $a(n) = 0$ при $n > M$, последовательно получаем

$$\log \frac{m}{n} = \log\left(1 + \frac{r}{n}\right) = \frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} + \cdots \ge \frac{r}{2n};$$

$$\left(\log \frac{m}{n}\right)^{-1} \le \frac{2n}{r} \le \frac{2M}{r};$$

$$|W| \le 8M \sum_{1 \le r < N} \frac{1}{r} \sum_{N < n \le M} |a(n)| \cdot |a(n+r)| \le$$

$$\le 8M \sum_{1 \le r < N} \frac{1}{r} \left(\sum_{N < n \le M} |a(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N < n \le M} |a(n+r)|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le 16M(\log N) \sum_{N < n \le M} |a(n)|^2.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $\tau_r(k)$ — число решений уравнения $x_1 \ldots x_r = k$. Тогда при любом натуральном числе r справедливы неравенства*

$$\sum_{n \le X} \tau_r(n) \le ((r-1)!)^{-1} X (\log X + r - 1)^{r-1},$$

$$\sum_{n \le X} \tau_r^2(n) \le r^2 (r!)^{-r-1} X (\log X + r^2 - 1)^{r^2-1}.$$

Доказательство леммы 3 см. в [5].

Лемма 4. *Пусть $r \ge 2$ — целое число, U, V — произвольные числа,*

$$\tau_{r-1}(k) = \sum_{U < u \le 2U} \sum_{\substack{V < v_1 \ldots v_{r-1} \le 2^{r-1} V \\ u v_1 \ldots v_{r-1} = k}} 1.$$

Тогда для суммы W,

$$W = \sum_{UV < k \le 2^r UV} \tau_{r-1}^2(k),$$

справедлива оценка

$$W \ll UV (\log UV)^{r^2-3}.$$

Постоянная в знаке Виноградова зависит только от r.

Доказательство. Сумма W равна числу решений уравнения

$$u_1 v_1 \ldots v_{r-1} = u_2 w_1 \ldots w_{r-1}, \tag{1}$$

где $U < u_1, u_2 \le 2U$, $V < v_1 \ldots v_{r-1}$, $w_1 \ldots w_{r-1} \le 2^{r-1} V$.

Имеем

$$W = \sum_{d=1}^{2U} W(d),$$

где $W(d)$ — число таких решений уравнения (1), что $(u_1,u_2)=d$.

Тогда $W(d)$ — число решений уравнения

$$x_1v_1\dots v_{r-1}=x_2w_1\dots w_{r-1}, \tag{2}$$

$$\frac{U}{d}<x_1,x_2\le\frac{2U}{d},\quad (x_1,x_2)=1,\quad V<v_1\dots v_{r-1},w_1\dots w_{r-1}\le 2^{r-1}V. \tag{3}$$

Пусть числа x_1, x_2, v_1, ..., v_{r-1}, w_1, ..., w_{r-1} удовлетворяют уравнению (2) и условиям (3). Тогда так как $(x_1,x_2)=1$, число $v_1\dots v_{r-1}$ делится на x_2, а число $w_1\dots w_{r-1}$ делится на x_1, т. е.

$$v_1\dots v_{r-1}=x_2t_2,\qquad w_1\dots w_{r-1}=x_1t_1.$$

Подставляя эти равенства в (2), находим, что $t_1=t_2=t$, значит,

$$v_1\dots v_{r-1}=x_2t,\qquad w_1\dots w_{r-1}=x_1t.$$

Ввиду (3) t лежит в промежутке $\frac{V}{2U}d<t\le\frac{2^{r-1}Vd}{U}$.

Мы установили, что

$$W(d)=\sum_{\substack{\frac{U}{d}<x_1,x_2\le\frac{2U}{d}\\(x_1,x_2)=1}}\ \sum_{\frac{Vd}{2U}<t\le\frac{2^{r-1}Vd}{U}}\Bigg(\sum_{\substack{V<v_1\dots v_{r-1}\le 2^{r-1}V\\ v_1\dots v_{r-1}=x_2t}}1\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{V<w_1\dots w_{r-1}\le 2^{r-1}V\\ w_1\dots w_{r-1}=x_1t}}1\Bigg)\le$$

$$\le\sum_{\frac{U}{d}<x_1,x_2\le\frac{2U}{d}}\ \sum_{\frac{Vd}{2U}<t\le\frac{2^{r-1}Vd}{U}}\tau^*_{r-1}(x_1t)\tau^*_{r-1}(x_2t),$$

где $\tau^*_{r-1}(n)=\tau_{r-1}(n)$ при $r\ge3$ и $\tau^*_1(n)=1$.

Пользуясь известным неравенством $\tau_{r-1}(xy)\le\tau_{r-1}(x)\tau_{r-1}(y)$, имеем

$$W(d)\le\Bigg(\sum_{\frac{U}{d}<x\le\frac{2U}{d}}\tau^{*2}_{r-1}(x)\Bigg)^2\sum_{\frac{Vd}{2U}<t\le\frac{2^{r-1}Vd}{U}}\tau^{*2}_{r-1}(t).$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$W=\sum_{d=1}^{2U}W(d)\ll\sum_{d=1}^{2U}\frac{U^2}{d^2}(\log UV)^{2r-4}\frac{Vd}{U}(\log UV)^{r^2-2r}\ll UV(\log UV)^{r^2-3}.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. 1. Пусть $2\le T_1\le T$, $R=N_1(\alpha,T_1)$ — число нулей вида $\rho=\beta+i\gamma$, $\alpha\le\beta$, $0,5T_1<\gamma\le T_1$.

Будем оценивать R. Возьмем

$$X=T_1^{0,001},\qquad M_X(s)=\sum_{m\le X}\mu(m)m^{-s}.$$

Умножим $\zeta(s)$ на $M_X(s)$ и воспользуемся приближенным функциональным уравнением дзета-функции

$$\zeta(s)M_X(s) = 1 + \sum_{X<k\le X^2} a(k)k^{-s} + \sum_{X<n\le y} n^{-s}M_X(s) +$$

$$+\chi(s)M_X(s)\sum_{n\le x} n^{-1+s} + O(T_1^{-0,5\sigma}|M_X(s)|\log T_1),$$

где $s=\sigma+it$, $y=T_1^{-0,5}$, $2\pi xy=t$, $a(k)=\sum\limits_{\substack{m|k\\ m\le X, k\le my}}\mu(m)$, $|a(k)|\le\tau(k)$.

Если $s=\rho$, то левая часть равенства равна нулю; считая $T_1\gg 1$, получаем неравенство

$$1\le 2\sum^{\log T_1}\Big|\sum_{Y<k\le Y_1} a(k)k^{-\rho}\Big| + 2\sum^{\log^2 T_1}\Big|\sum_{N<n\le N_1} n^{-\rho}\Big|\cdot\Big|\sum_{M<m\le M_1}\mu(m)m^{-\rho}\Big|+$$

$$+2\sum^{\log^2 T_1}|\chi(\rho)|\cdot\Big|\sum_{Z<n\le Z_1} n^{-1+\rho}\Big|\Big|\sum_{M<m\le M_1}\mu(m)m^{-\rho}\Big| = 2\sum^{3\log^2 T_1}|S(\rho)|, \tag{4}$$

где

$$X<Y<Y_1\le 2Y,\qquad Y\le X^2,\qquad X<N<N_1\le 2N,$$

$$N_1\le y,\qquad 1\le M<M_1\le 2M,\qquad M_1\le X,\qquad 1\le Z<Z_1\le 2Z,\qquad Z_1\le x,$$

$S(\rho)$ имеет один из следующих видов:

$$S(\rho)=\sum_{Y<k\le Y_1} a(k)k^{-\rho}, \tag{5}$$

$$S(\rho)=\sum_{N<n\le N_1} n^{-\rho}\sum_{M<m\le M_1}\mu(m)m^{-\rho}, \tag{6}$$

$$S(\rho)=\chi(\rho)\sum_{Z<n\le Z_1} n^{-1+\rho}\sum_{M<m\le M_1}\mu(m)m^{-\rho}. \tag{7}$$

Обозначим через D количество сумм $S(\rho)$ в правой части (4); $D\ll\log^2 T_1$; занумеруем эти суммы в произвольном порядке: $S_1(\rho)$, ..., $S_D(\rho)$.

Все R нулей ρ с условием $\operatorname{Re}\rho\ge\alpha$, $0,5T_1<\operatorname{Im}\rho\le T_1$ разобьем на классы A_1, ..., A_D следующим образом: $\rho\in A_\nu$, если $|S_\nu(\rho)|\ge(2D)^{-1}$.

В силу (4) каждый нуль ρ принадлежит хотя бы одному классу A_ν. Значит, существует хотя бы один класс (обозначим его буквой A), содержащий не менее RD^{-1} нулей ρ.

Разделим $(\frac{1}{2}T_1, T_1]$ на промежутки вида $(n, n+1]$; те из них, для которых n — четное число, отнесем к множеству B_1, оставшиеся — к множеству B_2. В одно из множеств B_1 или B_2 попадет не менее чем $\frac{1}{2}RD^{-1}$ нулей ρ; множество этих нулей обозначим буквой B. Наконец, B разобьем на $\ll \log T_1$ множеств следующим образом: к множеству E_1 отнесем те ρ, у которых мнимые части γ являются первыми на своих промежутках $(n, n+1]$ (если их несколько, берем один из них), к множеству E_2 отнесем те ρ, у которых мнимые части γ являются вторыми на своих промежутках и т. д. Так как на промежутке $(n, n+1]$ лежит не более $c_2 \log T_1$ чисел $\gamma = \operatorname{Im} \rho$, то и количество множеств E_ν не превосходит $c_2 \log T_1$.

Следовательно, найдется такое E_ν, в котором будет $\geq RD^{-1}(c_2 \log T_1)^{-1}$ нулей ρ.

Итак, доказано существование множества E нулей такого, что

$$D^{-1} \ll |S(\rho)|, \qquad \rho \in E; \qquad |E| \gg R(D \log T_1)^{-1}. \tag{8}$$

Введем обозначение $l = \log T_1$.

2. В этом пункте будет доказана

Л е м м а 5. *Пусть* $2 \leq F < F_1 \leq 2F$. *Пусть для всех* $\rho \in E$ *справедливо неравенство*

$$1 \ll l^A \Big| \sum_{F < n \leq F_1} b(n) n^{-\rho} \Big|^2. \tag{9}$$

Тогда для числа нулей $\rho \in E$ *имеет место оценка*

$$|E| \ll l^{A+1}(T_1 + Fl) F^{-2\alpha} \sum_{F < n \leq F_1} |b(n)|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Просуммируем обе части (9) по $\rho \in E$, применим к сумме по n частное суммирование и воспользуемся неравенством Коши:

$$|E| \ll l^A \Big(F^{-1-2\alpha} \int_F^{F_1} \sum_{\rho \in E} \Big| \sum_{F < n \leq u} b(n) n^{-i\gamma} \Big|^2 du +$$

$$+ F^{-2\alpha} \sum_{\rho \in E} \Big| \sum_{F < n \leq F_1} b(n) n^{-i\gamma} \Big|^2 \Big) \ll l^A F^{-2\alpha} \sum_{\rho \in E} \Big| \sum_{F < n \leq F_1} b(n) n^{-i\gamma} \Big|^2.$$

Применим к сумме по ρ лемму 1, положив в ней $t_r = \gamma$, а получившиеся интегралы оценим, пользуясь леммой 2. Лемма 5 полностью доказана.

3. В п. 3–5 считаем, что $S(\rho)$ в правой части (8) имеет вид (6).

Определим множества F_r: $F_1 = (T_1^{\frac{1}{2}}, yX]$, $F_r = (T_1^{\frac{1}{r+1}}, T_1^{\frac{1}{r}}]$ при $r \geq 2$.

Очевидно, число MN принадлежит одному из множеств F_r, $r = 1, \ldots, 1000$.

Если $MN \in F_1$ или $MN \in F_r$ при $6 \leq r \leq 1000$, то возведем обе части (8) в степень $2r+2$; получим

$$1 \ll l^{4r+4} \Big| \sum_{(MN)^{r+1} < n \leq (M_1 N_1)^{r+1}} A_{r+1}(n) n^{-\rho} \Big|,$$

где $|A_{r+1}(n)| \le \tau_{2r+2}(n)$; затем применим леммы 5 и 3 и получим оценку

$$R \ll T_1^{2,35(1-\alpha)}. \tag{10}$$

Везде в дальнейшем будем считать, что $MN \in F_r$, где r — одно из чисел $2,\dots,5$. Если при этом $N \le T_1^{\frac{1}{r+1}}$, то, так как $M \le T_1^{0,001}$, $r \le 5$, имеем неравенство $(MN)^{2r+2} \le T_1^{2,012}$.

Вновь возводя обе части (8) в степень $2r+2$ и применяя леммы 5 и 3, приходим к (10).

Осталось рассмотреть случай $T_1^{\frac{1}{r+1}} < N$. Из (8) следует

$$1 \ll l^2 M^{1-\alpha} \Big| \sum_{N<n\le N_1} n^{-\rho} \Big|;$$

возведем обе части этого неравенства в степень $2r+2$ и воспользуемся леммой 5:

$$|E| \ll l^{4r+5} M^{2(r+1)(1-\alpha)} (T_1 + lN^{r+1}) N^{-2\alpha(r+1)} \sum_{N^{r+1}<n\le N_1^{r+1}} C_{r+1}^2(n),$$

где

$$C_{r+1}(n) = \sum_{\substack{N<n_1\le N_1 \\ n_1\dots n_{r+1}=n}} \cdots \sum_{N<n_{r+1}\le N_1} 1\,.$$

Применим лемму 4 и получим следующую оценку:

$$R \ll (MN)^{2(r+1)(1-\alpha)} l^{r^2+6r+7} + T_1^{2,35(1-\alpha)}. \tag{11}$$

4. Получим вторую оценку числа R. Представим неравенство (8) в виде

$$1 \ll l^2 \Big| \sum_{K<k\le K_1} a_1(k) k^{-\rho} \Big|, \tag{12}$$

где

$$K = MN, \qquad K_1 = M_1N_1, \qquad a_1(k) = \sum_{\substack{m|k, M<m\le M_1 \\ mn<k\le mN_1}} \mu(m).$$

Возведем обе части (12) в степень $2r$ и применим лемму 5:

$$|E| \ll l^{4r+1}(T_1 + K^r l) K^{-2\alpha r} \sum_{K^r<k\le K_1^r} c_{2r}^2(k),$$

где

$$c_{2r}(k) \sum_{\substack{M<m_1\le M_1 \\ m_1n_1\dots m_rn_r=k}} \cdots \sum_{M<m_r\le M_1} \sum_{N<n_1\le N_1} \cdots \sum_{N<n_r\le N_1} 1.$$

Применим лемму 4:

$$R \ll T_1 K^{r(1-2\alpha)} l^{4r^2+4r+1} + T_1^{2(1-\alpha)} l^{4r^2+4r+2}. \tag{13}$$

5. Пусть $\alpha \geq \frac{3}{4}$ (можно допустить это, не ограничивая общности, так как в противном случае плотностная теорема А.Е.Ингама точнее той теоремы, которую мы доказываем).

Получим третью оценку числа R. Возведем обе части (12) в степень r, просуммируем по $\rho \in E$ и сделаем частное суммирование:

$$|E| \leq l^{2r} K^{-\alpha r} \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{K^r < k \leq K_2^r} A_r(k) k^{-i\gamma} \right|,$$

где K_2 — некоторое число, $K < K_2 \leq K_1$, при котором правая часть максимальна;

$$|A_r(k)| \leq \sum_{M < m_1 \leq M_1} \sum_{N < n_1 \leq N_1} \cdots \sum_{\substack{M < m_r \leq M_1 \\ m_1 n_1 \ldots m_r n_r = k}} \sum_{N < n_r \leq N_1} 1.$$

Пусть

$$\theta(\rho) = \arg \sum_{K^r < k \leq K_2^r} A_r(k) k^{-i\gamma}.$$

Поменяем порядок суммирования и применим неравенство Коши:

$$|E|^2 \ll l^{4r} K^{-2\alpha r} \sum_{K^r < k \leq K_2^r} |A_r(k)|^2 \sum_{K^r < k \leq K_2^r} \left| \sum_{\rho \in E} k^{-i\gamma} e^{-i\theta(\rho)} \right|^2.$$

Отсюда и из леммы 4:

$$|E|^2 \ll l^{4r^2+4r-3} \left(|E| K^{2r(1-\alpha)} + K^{r(1-2\alpha)} \sum_{\gamma \neq \gamma_1} \left| \sum_{K^r < k \leq K_2^r} k^{i(\gamma-\gamma_1)} \right| \right).$$

Двойную сумму по $\gamma \neq \gamma_1$ разобьем на $\ll \log T_1$ сумм вида $V < \gamma - \gamma_1 \leq V_1 \leq 2V$, $1 \leq V < V_1 \leq \frac{1}{2} T_1$.

Переходя к максимальной сумме, найдем

$$|E| \ll l^{4r^2+4r-2} \left(K^{2r(1-\alpha)} + K^{r(1-2\alpha)} \sum_{V < \gamma - \gamma_0 \leq V_1} \left| \sum_{K^r < k \leq K_2^r} k^{i(\gamma-\gamma_0)} \right| \right), \tag{14}$$

где внешнее суммирование проводится по числам γ, а γ_0 — фиксированное число из промежутка $(\frac{1}{2} T_1, T_1]$.

Введем обозначение:

$$W = \sum_{V < \gamma - \gamma_0 \leq V_1} \left| \sum_{K^r < k \leq K_2^r} k^{i(\gamma-\gamma_0)} \right|.$$

Если $V_1 \leq K^r$, то применим к сумме по k лемму о приближении ее интегралом (см., например, [6, с. 22]):

$$W \ll K^r + |E|;$$

подставляем эту оценку в (14) и учитываем, что $\alpha \geq \frac{3}{4}$:

$$R \ll T_1^{2(1-\alpha)} l^{4r^2+4r+1}$$

при $V_1 \leq K^r$.

Пусть $K^r < V_1$. Пользуясь леммой о приближении суммы по k более короткой [6, с.25], имеем

$$|W| = \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leq V_1} \left(\sqrt{V} \left| \sum_{M_1\leq n\leq M_2} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1} \right| + K^r V^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{15}$$

где $M_1 = \frac{\gamma-\gamma_0}{2\pi K_1^r}$, $M_2 = \frac{\gamma-\gamma_0}{2\pi K^r}$.

Пределы суммирования в сумме по n зависят от γ; освободимся от этой зависимости за счет незначительного огрубления оценки.

Возьмем $B = [VK^{-r}]$, $B_1 = \frac{V}{2\pi K_1^r}$, $B_2 = \frac{V_1}{2\pi K^r}$; имеем равенства

$$\sum_{M_1\leq n\leq M_2} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1} = \sum_{B_1<n\leq B_2} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1} \sum_{M_1\leq m\leq M_2} \frac{1}{B}\sum_{b=0}^{B-1} e^{2\pi i\frac{b(n-m)}{B}} =$$

$$= \frac{M_2-M_1}{B} \sum_{B_1<n\leq B_2} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1} +$$

$$+\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B-1}\left(\sum_{B_1<n\leq B_2} e^{2\pi i\frac{bn}{B}} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1}\right)\left(\sum_{M_1\leq m\leq M_2} e^{-2\pi i\frac{bm}{B}}\right);$$

сумма членов геометрической прогрессии (по m) оценивается по абсолютной величине как $\ll Bb^{-1}$, следовательно,

$$\left|\sum_{M_1\leq n\leq M_2} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1}\right| \ll \sum_{b=0}^{B-1}\frac{1}{b+1}\left|\sum_{B_1<n\leq B_2} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1}\varepsilon(n,b)\right|,$$

где $\varepsilon(n,b) = e^{2\pi i\frac{bn}{B}}$.

Подставим эту оценку в (15):

$$|W| \ll \sum_{b=0}^{B-1}\frac{1}{b+1}\left(\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leq V_1}\sqrt{V}\left|\sum_{B_1<n\leq B_2} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1}\varepsilon(n,b)\right|\right) +$$

$$+ \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leq V_1} K^r V^{-\frac{1}{2}}.$$

Пусть b_0 — число из промежутка $[0, B-1]$, при котором сумма

$$\sum_{V<\gamma-\gamma_0\le V_1}\Bigl|\sum_{B_1<n\le B_2} n^{i(\gamma-\gamma_0)-1}\varepsilon(n,b)\Bigr|$$

максимальна; тогда

$$|W| \ll \sum_{V<\gamma-\gamma_0\le V_1}\Bigl(\sqrt{V}l\Bigl|\sum_{B_1<n\le B_2}\varepsilon(n)n^{i(\gamma-\gamma_0)-1}\Bigr| + K^rV^{-\frac12}\Bigr) \ll$$

$$\ll K^rV^{-\frac12}l\sum_{V<\gamma-\gamma_0\le V_1}\Bigl(\Bigl|\sum_{B_1<n\le B_3}\varepsilon(n)n^{i(\gamma-\gamma_0)}\Bigr|+1\Bigr), \qquad (16)$$

где $\varepsilon(n)=\varepsilon(n,b_0)$, B_3 — число из промежутка $(B_1, B_2]$, при котором правая часть последнего неравенства максимальна.

Возведем обе части (12) в степень r и перемножим получившееся неравенство и (16):

$$|W| \ll K^rV^{-\frac12}l^{2r+1}\sum_{V<\gamma-\gamma_0\le V_1}\Bigl(\Bigl|\sum_{B_1<n\le B_3}\varepsilon(n)n^{i(\gamma-\gamma_0)}\Bigr|+1\Bigr)\Bigl|\sum_{K^r<k\le K_1^r} b_r(k)k^{-\beta+i\gamma}\Bigr|,$$

$$b_r(k)=\sum_{K<k_1\le K_1}\cdots\sum_{\substack{K<k_r\le K_1\\ k_1\dots k_r=k}} a_1(k_1)\dots a_1(k_r).$$

Сделаем в сумме по k частное суммирование и применим неравенство Гельдера и леммы 1 и 4; тогда

$$W \ll |E|^{0,5}T_1^{0,5}K^{r(1-\alpha)}l^{2r^2+4r+1}.$$

Подставим это неравенство в (14) и получим еще одну оценку R:

$$R \ll T_1K^{2r(2-3\alpha)}l^{12r^2+16r+1} + T_1^{2(1-\alpha)}l^{4r^2+4r-2}. \qquad (17)$$

6. Пусть $S(\rho)$ в (8) имеет вид (5). Возводя обе части (8) в степень $2r+2$ и применяя леммы 3 и 5, получаем оценку

$$R \ll T_1^{2\frac{r+1}{r}(1-\alpha)}l^{4r^2+12r+12}.$$

Так как $X < Y \le X^2$, то $499 < r < 1000$ и, следовательно, последняя оценка лучше чем (10).

7. Пусть $S(\rho)$ в (8) имеет вид (7). Возведем обе части (8) в четвертую степень, просуммируем полученное неравенство по $\rho\in E$, произведем в обеих суммах частное суммирование и "освободимся" от зависимости пределов суммирования от ρ; будем иметь

$$|E| \ll l^9T_1^{4(\frac12-\alpha)}Y^{-4(1-\alpha)}M^{-4\alpha}\sum_{\rho\in E}\Bigl|\sum_{Y^2M^2<kY_1^2M_1^2} a_4(k)k^{i\gamma}\Bigr|^2,$$

где $|a_4(k)|\le\tau_4(k)$.

Пользуясь леммами 1 и 3, продолжим неравенство:

$$|E| \ll T_1^{4(\frac{1}{2}-\alpha)} Y^{-4(1-\alpha)} M^{-4\alpha}(T_1 + lM^2Y^2)M^2Y^2l^{25};$$

отсюда

$$R \ll (T_1M^2)^{2(1-\alpha)}l^{29};$$

так как $M \le T_1^{0,001}$, последняя оценка лучше чем (10).

Вернемся к случаю, когда $S(\rho)$ в (8) имеет вид (6). Для этого случая нами получены оценки (11), (13), (17).

Пусть сначала $3 \le r \le 5$. Имеются три возможности:

1) $K \le T_1^{\frac{1}{r+0,5}}$; 2) $K > T_1^{\frac{1}{r+0,5}}$, $\alpha \le \frac{3}{4}$; 3) $K > T_1^{\frac{1}{r+0,5}}$, $\alpha > \frac{3}{4}$.

Воспользуемся в первом случае оценкой (11), во втором — оценкой (13), а в третьем — оценкой (17); тогда

$$R \ll T_1^{\frac{16}{7}(1-\alpha)}l^{157}. \tag{18}$$

Пусть теперь $r = 2$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{3}{4} - 100\log l(\log K)^{-1} < \alpha < \frac{3}{4} + 100\log l(\log K)^{-1}, \tag{19}$$

$$\frac{\log T_1}{\log K} = \frac{5}{2} + O\Big(\frac{\log l}{\log T_1}\Big).$$

Вновь рассматриваем три возможности:

1) $K \le T_1^{\frac{2}{5}}l^{6,4}$; 2) $K > T_1^{\frac{2}{5}}l^{6,4}$, $\alpha \le \frac{3}{4} + 7\frac{\log l}{\log K}$; 3) $K > T_1^{\frac{2}{5}}l^{6,4}$, $\alpha > \frac{3}{4} + 7\frac{\log l}{\log K}$,

и, пользуясь соответственно оценками (11), (13), (17), имеем оценку

$$R \ll T_1^{2,4(1-\alpha)}l^{32,6},$$

упомянутую в начале статьи.

Для доказательства сформулированной в теореме оценки воспользуемся вместо (13) плотностной теоремой Ингама:

$$R \ll T_1^{\frac{3(1-\alpha)}{2-\alpha}}l^5. \tag{20}$$

В силу (19) формулы (11), (17), (20) можно переписать так:

$$R \ll K^{6(1-\alpha)}l^{23}, \tag{11'}$$

$$R \ll T_1^{\frac{12}{5}(1-\alpha)}T_1^{\frac{12}{25}(\alpha-\frac{3}{4})}l^5, \tag{20'}$$

$$R \ll T_1K^{4(2-3\alpha)}l^{81} \tag{17'}$$

Рассмотрим три возможности:

1) $K \le T_1^{\frac{2}{5}} l^{-3,2}$; 2) $K > T_1^{\frac{2}{5}} l^{-3.2}$, $\alpha \le \frac{3}{4} + 27,5\frac{\log l}{\log T_1}$; 3) $K > T_1^{\frac{2}{5}} l^{-3,2}$,

$\alpha > \frac{3}{4} + 27,5\frac{\log l}{\log T_1}$.

Применим соответственно неравенства (11′), (20′), (17′) и получим

$$R \ll T_1^{\frac{12}{5}(1-\alpha)} l^{18,2}.$$

Утверждение теоремы следует из последней оценки и (18).

Поступило в январе 1992 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huxley M.N.* On the difference between consecutive primes //Invent. Math. 1972. Vol. 15. P. 164–170.
2. *Карацуба А.А.* Распределение простых чисел // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 81–140.
3. *Ingham A.E.* On the estimation of $N(\sigma, T)$ //Quart. J. Math. 1940. Vol. 11. P. 291–292.
4. *Титчмарш Е.К.* Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
5. *Марджанишвили К.К.* Оценка одной арифметической суммы //ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 7. С. 391–393.
6. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.