П. К. Белобров, О минимальном продолжении линейных функционалов на второе сопряженное пространство,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 3, 439–445

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

О МИНИМАЛЬНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ВТОРОЕ СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

П. К. Белобров

Для банахова пространства X ставится вопрос о единственности минимального (т. е. сохраняющего норму) продолжения функционалов из X^* на все второе сопряженное пространство X^{**}. Оказывается, что он решается неоднозначно для класса нерефлексивных пространств. В случае положительного решения оператор наилучшего приближения подпространства $X^\perp \subset X^{***}$ является однозначным и линейным (возможна оценка нормы); верно и обратное. В частности, нормирующими элементами из X^{***} для ненулевых элементов из X являются лишь функционалы из X^*. Характеристика пространств X, обладающих свойством единственности указанных нормирующих элементов из X^*, представляющим один из типов гладкости, рассмотрена в [1]. Единственность минимального продолжения функционалов на второе сопряженное связана с такими свойствами пространства, как несопряженность, несуществование непрерывных проекторов из X^{**} на X.

Нижеизложенное в основном относится к подпространствам пространства непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпакте, поскольку в него можно изометрически изоморфно вложить каждое банахово пространство.

§ 1. Случаи однозначного продолжения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть замкнутое подпространство* $M \subset C(Q)$, *где* Q — *хаусдорфов бикомпакт,* $F =$

$= \{q \in Q \mid x(q) = 0,\ \forall x \in M\} \neq \phi$ *и для каждой окрестности и множества F пространство $M|_{Q\setminus u}$ сужений функций из M на $Q \setminus$ и рефлексивно. Тогда M обладает свойством единственного минимального продолжения функционалов из M^* на второе сопряженное.*

Доказательство. Ввиду известных [2, стр. 49] изометрических изоморфизмов $M^{**} = (C^*(Q)/M^{\perp})^* = M^{\perp\perp}$, достаточно доказать единственность минимального продолжения функционалов из M^* на $M^{\perp\perp} \supset M$. Пусть X_0 — произвольно фиксированный элемент из $M^{\perp\perp} \setminus M$, $\| X_0 \| = 1$, и расстояние $\rho(X_0, M) = s > 0$. Существует функционал $\psi \in (\mathrm{sp}\{M, X_0\})^*$ такой, что $\psi(M) = 0$ и $\psi(X_0) = 1$, а для каждого $X \in \mathrm{sp}\{M, X_0\}$ $X = x + \psi(X) X_0$, где $x \in M$.

Пусть $\Phi \in (M^{\perp\perp})^* = M^{***}$ и сужение $\Phi|_M = f \in M^* = C^*(Q)/M^{\perp}, f = \varphi + M^{\perp}$, где $\varphi \in C^*(Q)$, $\| f \| = \rho(\varphi, M^{\perp}) = \| \varphi|_M \|$ — норма $\varphi|_M$ сужения φ на M. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $x_\varepsilon \in M$, $\| x_\varepsilon \| = 1$, такая, что $f(x_\varepsilon) > \| f \| - \varepsilon$.

Поскольку замыкание в $C^*(Q)$-топологии единичного шара из M совпадает с единичным шаром из $M^{\perp\perp}$ [3, стр. 548], то существует обобщенная последовательность $(x_\alpha) \subset M$, $\| x_\alpha \| = 1$, сходящаяся к X_0 в указанной топологии. Обозначим $u' = Q \setminus u$; по условию, $M|_{u'} = (M|_{u'})^{\perp\perp}$. Пусть, далее, $\mu' \in (M|_{u'})^{\perp}$ — мера на u'; полагая $\mu = \mu'$ на подмножествах из u' и 0 из u, получим, что $\mu \in M^{\perp}$, $0 = \mu(X_0) = \mu'(X_0|_{u'})$, откуда $X_0|_{u'} \in M|_{u'}$. Аналогично получаем, что $(x_\alpha|_{u'})$ сходится к $X_0|_{u'}$ в $(M|_{u'})^*$-топологии, и, ввиду условия, слабо. Пусть при некотором натуральном n, шар радиуса n^{-1} с центром $X_0|_{u'}$ имеет с $\overline{\mathrm{co}}\{x_\alpha|_{u'}\}$ пустое пересечение. Тогда найдется функционал $\chi \in (M|_{u'})^*$ и число $\delta > 0$ такие, что неравенство $\chi(x_\alpha|_{u'}) < \chi(X_0|_{u'}) - \delta$ будет выполняться при любом α. Ввиду этого противоречия, очевидно, существует последовательность выпуклых комбинаций $y_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)} x_{\alpha_k}|_{u'}$, сильно сходящаяся к $X_0|_{u'}$. Будем считать m настолько большим, что $\| y_m - X_0|_{u'} \| < \varepsilon s$.

Если $Y_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)} x_{\alpha_k}$, то

$$|f(Y_m - X_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

В качестве u возьмем такую окрестность множества F, что $|x_\varepsilon(q)| < \varepsilon\ \forall q \in u$, и рассмотрим элемент $X_\varepsilon = x_\varepsilon +$

$+\frac{X_0-Y_m}{\|X_0-Y_m\|}\operatorname{sgn}\alpha$, где $\alpha=\Phi(X_0)-f(X_0)$. Оценим норму X_ε. Если $q\in u$, то $|x_\varepsilon(q)|<\varepsilon$ и $|X_\varepsilon(q)|<1+\varepsilon$. Если $q\in u'$, то $y_m(q)=Y_m(q)$ и $|X_0(q)-Y_m(q)|\leqslant \leqslant \|y_m-X_0|_{u'}\|<\varepsilon s$. Учитывая, что $s\leqslant\|X_0-Y_m\|$, будем иметь $\frac{|X_0(q)-Y_m(q)|}{\|X_0-Y_m\|}<\varepsilon$. Так как еще $|x_\varepsilon(q)|\leqslant 1$, то $|X_\varepsilon(q)|<1+\varepsilon$. Следовательно, $\|X_\varepsilon\|<1+\varepsilon$.

Далее имеем, что $\Phi(X_\varepsilon)=f(X_\varepsilon)+\psi(X_\varepsilon)\alpha$ и, по выбору x_ε и (1),

$$(1+\varepsilon)\|\Phi\|>\Phi(X_\varepsilon)=$$

$$=f(x_\varepsilon)+\frac{f(X_0-Y_m)}{\|X_0-Y_m\|}\operatorname{sgn}\alpha+\alpha\operatorname{sgn}\alpha\frac{\psi(X_0)}{\|X_0-Y_m\|}\geqslant$$

$$\geqslant\|f\|-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{s}+\frac{|\alpha|}{2}\ (\|Y_m\|\leqslant 1).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$,

$$\|\Phi\|\geqslant\|f\|+|\alpha|/2, \tag{2}$$

а если $\|\Phi\|=\|f\|$, то $|\alpha|=0$. Так как X_0 — произвольный элемент из $M^{\perp\perp}\setminus M$, то теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что условиям теоремы 1 удовлетворяет пространство $c_0\subset m$. В качестве Q здесь достаточно взять $(0, 1, \ldots, 1/n, \ldots)$. Однако аналогичные рассуждения для c_0 приводят к равенству вместо неравенства (2). Именно, пусть $X'\in m\setminus c_0$ и элемент $z\in c_0$ ближайший к X', $X_0=\frac{X'-z}{\|X'-z\|}$. Ближайшим из элементов c_0 к X_0 будет 0.

Если $F\in m^*$, $f\in l_1$ и $F|_{c_0}=f$, то имеет место равенство

$$\|F\|=\|f\|+|F(X_0)-f(X_0)|. \tag{3}$$

Отсюда, $|F(X')-f(X')|=(\|F\|-\|f\|)\,\rho(X', c_0)$, а учитывая, что для $X'=(\xi_i)$ [4, стр. 8] $\rho(X', c_0)= =\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}|\xi_i|$, будем иметь

$$|F(X')-f(X')|=(\|F\|-\|f\|)\overline{\lim_{i\to\infty}}|\xi_i|. \tag{4}$$

В частности, для $F\in c_0^\perp$ получаем

$$|F(X')|=\|F\|\overline{\lim_{i\to\infty}}|\xi_i|.$$

В качестве применения равенства (3) покажем, что оператор P наилучшего приближения элементов из m^* подпространством $c_0^\perp$ имеет единичную норму. Действительно, согласно лемме 4 из [3], $PF = F - f$ и ясно, что P — линейный оператор. Пусть $\overline{X} \in m$, $\| \overline{X} \| = 1$,— такой элемент, что $(PF)\overline{X} > \| PF \| - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и $\overline{x} \in c_0$ такой, что $\rho(\overline{X}, c_0) = \| \overline{X} - \overline{x} \|$. Для $X_0 = \frac{\overline{X} - \overline{x}}{\| \overline{X} - \overline{x} \|}$ имеем

$$(PF)X_0 = \frac{(PF)\overline{X}}{\| \overline{X} - \overline{x} \|} > \frac{\| PF \| - \varepsilon}{\| \overline{X} - \overline{x} \|}.$$

Ввиду равенства (3)

$$\| F \| > \| f \| + \frac{\| PF \| - \varepsilon}{\| \overline{X} - \overline{x} \|} \geqslant \| PF \| - \varepsilon,$$

так как $\| \overline{X} - \overline{x} \| \leqslant 1$. Откуда, $\| P \| = 1$. Итак, оператор наилучшего приближения аннулятором $c_0^\perp$ является проектором единичной нормы.

Заметим также, что из рассматриваемого свойства c_0, как подпространства c, нетрудно показать существенность условия рефлексивности в теореме 5 из [3].

ТЕОРЕМА 2. *Если пространство X обладает свойством единственного минимального продолжения функционалов из X^* на второе сопряженное, то им обладает и любое подпространство M.*

Доказательство. Как уже отмечалось, имеют место с точностью до изометрического изоморфизма соотношения $M^{**} = (X^*/M^\perp)^* = M^{\perp\perp}$, $M^{***} = X^{***}/M^{\perp\perp\perp}$. Пусть $\Phi|_M \in M^* = X^*/M^\perp$, $\Phi \in M^{***}$ и $\| \Phi|_M \| = \| \Phi \|$, причем $\Phi|_M = f + M^\perp$ есть сужéние $\Phi = F + M^{\perp\perp\perp}$ на M, где $f \in X^*$, $F \in X^{***}$; обозначим еще сужéние F на X через $F|_X$. Ясно, что $F|_X$ и f на M совпадают, поэтому, обозначая единичную сферу в M через S_M, будем иметь

$$\| \Phi|_M \| = \sup_{m \in S_M} f(m) = \sup_{m \in S_M} F|_X(m) = \| F|_X + M^\perp \|.$$

Пусть $\Psi \in M^{\perp\perp\perp}$ такой функционал, что $\| \Phi \| = \| F + \Psi \|$. Имеет место представление $\Psi = \overline{f} + \Psi_X^0$, где $\overline{f} \in M^\perp$, а Ψ_X^0 обращается в 0 как на $M^{\perp\perp}$, так и на X (легко получить из разложения $X^{***} = X^\perp + X^*$). Обозначим: $\overline{F} = F + \Psi_X^0$ и $\overline{F}_X$ — сужéние $\overline{F}$ на X. Тогда $\overline{F}_X =$

$= F|_X$ и $\|\bar{F} + \bar{f}\| = \|F|_X + M^{\perp}\| \leqslant \|F|_X + \bar{f}\|$, и, поскольку $F|_X + \bar{f}$ — сужение $\bar{F} + \bar{f}$ на X, $\|\bar{F} + \bar{f}\| = \|F|_X + \bar{f}\|$. Из этого равенства и условия следует, что $\bar{F} = F|_X$, и поэтому

$$\Phi = F|_X + M^{\perp\perp\perp} = f + (F|_X - f) + M^{\perp\perp\perp} = f + M^{\perp\perp\perp}.$$

Таким образом, функционалы Φ и $\Phi|_M$ совпадают на $M^{\perp\perp} = M^{**}$, т. е. имеет место единственность минимального продолжения на второе сопряженное.

§ 2. Случаи многозначного продолжения.

Предложение 1. *Если существует проектор P единичной нормы пространства X^{**} на X, то X свойством единственного минимального продолжения функционалов из X^* на X^{**} не обладает.*

Доказательство. Пусть $X_0 \in P^{-1}(0) \neq \phi$. Существует $f \in X^*$ такой, что $f(X_0) \neq 0$, но $(fP)(X_0) = 0$. Однако fP совпадает с f на X и $\|fP\| = \|f\|$, т. е. fP — минимальное продолжение f на X^{**}, вместе с этим $fP \neq f$.

Следствие 1. *Сопряженное (но нерефлексивное) пространство свойством единственности минимального продолжения функционалов на второе сопряженное пространство не обладает.*

Доказательство. Для каждого $F \in X^{***}$ имеет место разложение $F = QF + PF$, где $QF = F|_X \in X^*$ и линейный оператор Q есть проектор единичной нормы пространства $(X^*)^{**}$ на X^*.

ЛЕММА. *Сужение каждого оператора из $B(M^{**}, M)$ на M, где M — замкнутое подпространство из c_0, имеет минимальное продолжение на M^{**}.*

Доказательство. Если оператор $u \in B(M^{**}, M)$, то $ux = (f_n(x))$, где $f_n \in M^{***}$ и $f_n = \varphi_n + \psi_n$, $\varphi_n \in M^*$, $\psi_n \in M^{\perp}$, причем $(\varphi_n(x)) \in c_0$ и $\|\varphi_n\| \leqslant \|f_n\|$. Предположим, что при некотором $x_0 \in M^{**} = M^{\perp\perp}$ $(\varphi_n(x_0)) \notin M$. Тогда найдется $\Phi \in l_1$ такой, что $\Phi((\varphi_n(x_0))) \neq 0$, но $\Phi(M) = 0$. Так как $\psi_n \in M^{\perp}$, а $x_0 \in M^{\perp\perp}$, то $\psi_n(x_0) = 0$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, и тогда имеем: $0 = \Phi((f_n(x_0))) = \Phi((\varphi_n(x_0)))$, т. е. противоречие.

Таким образом, $u_0 = (\varphi_n) \in B(M^{**}, M)$, а u_0 — сужение u на M и одновременно продолжение сужения.

Следствие 2. *Из M^{**} на замкнутое бесконечномерное подпространство M из c_0 нет непрерывных проек-*

торов. В пространстве c_0 нет сопряженных бесконечномерных подпространств.

Действительно, если бы непрерывный проектор существовал, то, по лемме, существовал бы и проектор единичной нормы. Однако, по теореме 2, M обладает свойством единственного минимального продолжения функционалов из M^* на M^{**}, а это противоречит предложению 1. Второе утверждение также следует из теоремы 2 и следствия 1.

Замечание 2. Покажем существенность условий теоремы 1.

1. Пространство $C(Q)$, где Q — бесконечный хаусдорфов бикомпакт, не обладает свойством единственности минимального продолжения функционалов из $C^*(Q)$ на второе сопряженное.

Действительно, каждая мера $\mu \in C^*(Q)$ представима в виде $\mu = \alpha\mu^+ - \beta\mu^-$, где меры μ^+, $\mu^- \geqslant 0$ и числа α, $\beta \geqslant 0$, $\|\mu^+\| = \mu^+(1) = \mu^-(1) = \|\mu^-\| = 1$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{S}_0 = \{\mu \in C^*(Q) \mid \mu(1) = \|\mu\| = 1\}.$$

Поскольку $\|\mu\| = \alpha\|\mu^+\| + \beta\|\mu^-\| = \alpha + \beta$, и если $\mu \in \mathfrak{S}_0$, $\alpha \pm \beta = 1$. Отсюда, $\mu = \mu^+ \geqslant 0$. Таким образом, единичный шар в $C^*(Q)$ есть абсолютно выпуклая оболочка множества $\mathfrak{S}_0$. Если бы пространство $C(Q)$ обладало указанным в начале свойством, то множество всех функционалов из $C^{***}(Q)$ единичных норм, достигающихся в 1, совпадало бы с $\mathfrak{S}_0$. По пункту 2 леммы 1 из [3] тогда было бы $\overline{C^{**}(Q)|_{\mathfrak{S}_0}} = \overline{C(Q)|_{\mathfrak{S}_0}}$, где замыкания берутся в топологии пространства $C(\mathfrak{S}_0)$; противоречие.

2. Пусть Q есть совокупность двух непересекающихся и сходящихся к разным пределам числовых последовательностей: $(q_k) \to q_0$, $(s_k) \to s_0$. Рассмотрим подпространство $M \subset C(Q)$, обращающихся в 0 на q_0 функций. Очевидно, что M изоморфно изометрично пространству $c_0 \times c$ с максимальной метрикой. Поскольку $(c_0 \times c)^{**} = c_0^{**} \times c^{**}$ и, ввиду пункта 1 замечания, c не обладает свойством единственности минимального продолжения функционалов на второе сопряженное, то им не будет обладать и $c_2 \times c = M$. Заметим, что M не удовлетворяет второму условию теоремы 1.

Ростовский-на-Дону институт
народного хозяйства

Поступило
16.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S u l l i v a n F., Geometrical properties determined by the higher duals of a Banach space, Illinois J. Math., **21**, № 2 (1977), 315—331.

[2] Д э й М. М., Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961.

[3] Б е л о б р о в П. К., Об операторе минимального продолжения линейных функционалов, Матем. заметки, **21**, № 4 (1977), 539—550.

[4] Б е л о б р о в П. К., О чебышевской точке системы гиперплоскостей в нормированном пространстве, Изв. вузов, Математика, № 2 (1970), 3—9.