

УДК 517.51

П. Освальд

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В МЕТРИКЕ L_p , $0 < p < 1$

Введение

Главной задачей данной работы является исследование некоторых экстремальных свойств тригонометрических полиномов в метрике пространств $L_p(0, 2\pi)$, $0 < p < 1$. Как известно, подобные вопросы для случая $1 \leq p \leq \infty$ в основном решены, причем имеется обширная литература. Основным нашим источником является монография [1], где также приведены дальнейшие литературные ссылки.

Центральное место среди экстремальных свойств занимает замечательное неравенство Бернштейна, связывающее нормы тригонометрического полинома и его производной. Приведем его.

Неравенство Бернштейна — Зигмунда. Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический полином степени не выше n , $n = 0, 1, \dots$ Тогда ¹⁾

$$\|T'_n\|_p \leq n \|T_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (0.1)$$

Заметим, что случай $p = \infty$ ($L_\infty \equiv C$) доказан С. Н. Бернштейном [2], случай $1 \leq p < \infty$ — А. Зигмундом [3]. Мы изложим в § 2 аналог (0.1) для $0 < p < 1$. Основной идеей является использование представлений тригонометрических полиномов с помощью обобщенных ядер Джексона

$$K_{r,n}(t) \equiv \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right)^{2r}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (0.2)$$

которые при $r = 1$ переходят в ядра Фейера $K_n(t)$, а при $r = 2$ — в классические ядра Джексона. Подобные представления получены в § 1 и имеют своим исходным пунктом формулы М. Рисса и интегральное представление Ю. А. Брудного [4]

$$T'_n(x) = \frac{2^{2r} n^2}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x+t) H_{r,n}(t) \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right)^{2r} dt, \quad (0.3)$$

¹⁾ Мы всюду обозначаем

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L_p, \quad 0 < p < \infty.$$

где $r = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$, а $H_{r,n}(t)$ — тригонометрический полином, удовлетворяющий условию $|\tilde{H}_{r,n}(t)| \leq 1$.

Эти формулы дают возможность получить целый ряд неравенств для тригонометрических полиномов. Часть из них имеется в § 3, где рассматривается обобщение некоторых результатов С. М. Никольского [5]. Прием использования ядер (0.2) оказывается плодотворным и в других вопросах, напр., при исследовании тригонометрической аппроксимации в пространствах L_p (см. [6], [7], а также [1]).

Заметим, что в основном все полученные здесь результаты для тригонометрических полиномов можно перенести на целые функции экспоненциального типа. Мы на этом обобщении не остановимся, т. к. оно получается почти автоматически (ср. с [1]). Возможно также перенести оценки данной работы на некоторые φ -расстояния, для которых порождающая функция $\varphi(t)$ близка в некотором смысле к $|t|^p$, $0 < p \leq 1$. По поводу этого обобщения мы отсылаем к работе [7], где и имеются соответствующие определения.

Часть изложенных здесь результатов опубликована в статьях [6], [7], однако, в основном, с другими доказательствами. Ряд полученных оценок (в частности, теорема 1 из § 2) независимо доказаны Э. А. Стороженко, которой и принадлежит постановка задач, затронутых в данной работе.

§ 1. Некоторые интерполяционные формулы

Для получения результатов следующих параграфов мы здесь выводим ряд интерполяционных соотношений и интегральных представлений, являющихся аналогами приведенного во введении тождества (0.3). Всюду ниже мы будем понимать под $T_n \equiv T_n(x)$ тригонометрический полином степени не выше n , где n , вообще говоря, — произвольное натуральное число. Кроме того, обозначим

$$t_k^{(n)} = \frac{2k+1}{2n} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Лемма 1. Для любого $r = 1, 2, \dots$ имеет место представление

$$T'_n(x) = \frac{2rn}{4} \sum_{k=0}^{2^r n - 1} T_n(x + t_k^{(2^r - 1)n}) \tilde{H}_{r,n}(t_k^{(2^r - 1)n}) K_{r,n}(t_k^{(2^r - 1)n}), \quad (1.1)$$

где $K_{r,n}(t)$ — ядро (0.2), а $\tilde{H}_{r,n}(t)$ — тригонометрический полином, причем $|\tilde{H}_{r,n}(t)| \leq 1$.

Доказательство. Проводим его по индукции. При $r = 1$ следует обратиться к известному тождеству М. Рисса [8]

$$T'_n(x) = \frac{1}{4n} \sum_{k=0}^{2n-1} T_n(x + t_k^{(n)}) \frac{(-1)^k}{\left(\sin \frac{t_k^{(n)}}{2}\right)^2}, \quad (1.2)$$

которое совпадает с (1.1), если положить $\tilde{H}_{1,n}(t) = \sin nt$. В самом деле,

$$\begin{aligned} & \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} T_n(x + t_k^{(n)}) \sin n \frac{(2k+1)\pi}{2n} \left(\frac{\sin \frac{n(2k+1)\pi}{4n}}{n \sin \frac{t_k^{(n)}}{2}} \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} T_n(x + t_k^{(n)}) (-1)^k \frac{\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\left(\sin \frac{t_k^{(n)}}{2} \right)^2} = \frac{1}{4n} \sum_{k=0}^{2n-1} T_n(x + t_k^{(n)}) \frac{(-1)^k}{\left(\sin \frac{t_k^{(n)}}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Итак, при $r = 1$ представление (1.1) доказано для всех $n = 1, 2, \dots$. Пусть (1.1) справедливо при $r = R$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим при фиксированном X тригонометрический полином

$$\tau(x) = T_N(x + X) \left(\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{N \sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

порядка меньше $2N$ (как известно, $K_{1,n}(x)$ есть полином порядка $n - 1$). Применяя (1.1) согласно предположению индукции при $r = R$ $n = 2N$, $x = 0$, имеем

$$\begin{aligned} T'_N(X) = \tau'(0) &= \frac{2^R 2N}{4} \sum_{k=0}^{2^R 2N - 1} T_N(X + t_k^{(2^R - 1) 2N}) \left(\frac{\sin \frac{N t_k^{(2^R - 1) 2N}}{2}}{N \sin \frac{t_k^{(2^R - 1) 2N}}{2}} \right)^2 \times \\ & \times \tilde{H}_{R, 2N}(t_k^{(2^R - 1) 2N}) K_{R, 2N}(t_k^{(2^R - 1) 2N}) = \\ & = \frac{2^{R+1} N}{4} \sum_{k=0}^{2^{R+1} N - 1} T_N(X + t_k^{(2^R N)}) \tilde{H}_{R, 1, N}(t_k^{(2^R N)}) \left(\cos \frac{N t_k^{(2^R N)}}{2} \right)^{2R} \times \\ & \times K_{R+1, N}(t_k^{(2^R N)}). \end{aligned}$$

Полагая

$$\tilde{H}_{R+1, N}(t) = \tilde{H}_{R, 2N}(t) \left(\cos \frac{Nt}{2} \right)^{2R},$$

убеждаемся в справедливости леммы.

Замечание 1.1. Соответствующее интегральное представление, которое доказывается совершенно аналогично, имеет вид

$$T'_n(x) = \frac{2^r n^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x + t) \tilde{H}_{r, n}(t) K_{r, n}(t) dt, \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Замечание 1.2. Явный вид полиномов $\tilde{H}_{r, n}(t)$ следующий:

$$\tilde{H}_{r, n}(t) = \left(\cos \frac{nt}{2} \right)^{2(r-1)} (\cos nt)^{2(r-2)} \dots (\cos 2^{(r-3)} nt)^2 \sin 2^{r-1} nt.$$

Замечание 1.3. Таким же путем, как и в лемме 1, можно доказать следующее неравенство:

$$|T'_n(x)| \leq \frac{1}{2^{(r-1)^2} 4n^{2r-1}} \sum_{k=0}^{2^r-1} |T_n(x + t_k^{(2^{r-1}n)})| \frac{1}{\left(\sin \frac{t_k^{(2^{r-1}n)}}{2}\right)^{2r}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Обобщая другое тождество М. Рисса [8] (см. также [1], с. 191)

$$T_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} T_n(t_k^{(n+1)}) r_{k, n+1}(x), \quad (1.5)$$

где $r_{k, n}(x) = \sin n(x - t_k^{(n)}) \operatorname{ctg} \frac{x - t_k^{(n)}}{2}$, мы приходим к следующим представлениям, являющимся аналогами (1.1) и (1.3).

Лемма 2. При $r = 2, 3, \dots$ имеет место представление

$$T_n(x) = \frac{2^{r-1}n}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) \tilde{H}_{r, n}\left(\frac{x-t}{2}\right) \left(\frac{\sin \frac{n(x-t)}{2}}{n \sin \frac{x-t}{2}}\right)^{2r-1} dt, \quad (1.6)$$

а также

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{2^r-1} T_n(t_k^{(2^{r-1}n)}) H_{r, n}\left(\frac{x - t_k^{(2^{r-1}n)}}{2}\right) \left(\frac{\sin \frac{n(x - t_k^{(2^{r-1}n)})}{2}}{n \sin \frac{x - t_k^{(2^{r-1}n)}}{2}}\right)^{2r-1}, \quad (1.7)$$

где $\tilde{H}_{r, n}(t)$ — тригонометрический полином, причем $|\tilde{H}_{r, n}(t)| \leq 1$.

Доказательство. Докажем (1.6). Положим

$$D_{r, n}(t) \equiv \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}}\right)^{2r-1}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Имеет место

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} dt = \\ &= \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) \cos \frac{x-t}{2} \cos \frac{n(x-t)}{2} D_{1, n}(x-t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(t) \cos n(x-t) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим тригонометрический полином

$$\tilde{\tau}(x) = T_N(x) \left(\frac{\sin \frac{N(X-x)}{2}}{N \sin \frac{X-x}{2}} \right)^2$$

степени не выше $2N-1$ и применим предыдущее тождество при $n=2N$ в точке $x=X$:

$$\begin{aligned} T_N(X) &= \tilde{\tau}(X) = \\ &= \frac{2N}{\pi} \int_0^{2\pi} T_N(t) \left(\frac{\sin \frac{N(X-t)}{2}}{N \sin \frac{X-t}{2}} \right)^2 \cos \frac{X-t}{2} \cos \frac{2N(X-t)}{2} D_{1,2N}(X-t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\tau}(t) \cos 2N(X-t) dt = \\ &= \frac{2N}{\pi} \int_0^{2\pi} T_N(t) \cos \frac{X-t}{2} \cos \frac{2N(X-t)}{2} \cos \frac{N(X-t)}{2} D_{2,N}(X-t) dt. \end{aligned}$$

Итак, тождество установлено при $r=2$. Дальнейший ход рассуждений такой же, как и в лемме 1. Соотношение (1.7) доказывается аналогично.

Замечание 1.4. Полином $\tilde{H}_{r,n}(t)$ имеет явный вид

$$\tilde{H}_{r,n}(t) = \cos t \cos 2^{r-1}nt \cos 2^{r-2}nt (\cos 2^{r-3}nt)^3 \dots (\cos nt)^{2^{r-3}}.$$

§ 2. Неравенство Бернштейна при $0 < p < 1$

Перейдем непосредственно к формулировке и доказательству аналога неравенства (0.1) при $0 < p < 1$.

Теорема 1. Пусть $0 < p < 1$. Тогда¹⁾

$$\|T'_n\|_p \leq C_p n \|T_n\|_p, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Доказательство. Фиксируем число p , $0 < p < 1$. Из (1.1) при $r=1, 2, \dots$ следует, что

$$|T'_n(x)| \leq \frac{2^n}{4n^{2r}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |T_n(x + t_k^{(2^{r-1}n)})| \frac{1}{\left(\sin \frac{t_k^{(2^{r-1}n)}}{2}\right)^{2r}}.$$

Отсюда вытекает, что

¹⁾ Здесь мы обозначаем через $A, B, C, C_p, C_{p,r}, \dots$ положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, и, вообще говоря, разные в разных формулах и оценках.

$$\begin{aligned} \|T'_n\|_p^p &= \int_0^{2\pi} |T'_n(x)|^p dx \leq \\ &\leq \frac{2^p p n^p}{4^p n^{2rp}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{2\pi} |T_n(x + t_k^{(2^{r-1}n)})|^p \frac{1}{\left|\sin \frac{t_k^{(2^{r-1}n)}}{2}\right|^{2rp}} dx = \\ &= \frac{2^p p n^p}{4^p n^{2rp}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\left|\sin \frac{t_k^{(2^{r-1}n)}}{2}\right|^{2rp}} \|T_n\|_p^p. \end{aligned}$$

Далее, имеем согласно $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\left|\sin \frac{t_k^{(2^{r-1}n)}}{2}\right|^{2rp}} \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^r n}{2k+1}\right)^{2rp} = 2 \cdot 2^{2r^2 p} n^{2rp} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2rp}}.$$

Фиксируем сейчас $r = r(p)$ так, чтобы $2rp > 1$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2rp}} < \infty$$

и, подставляя, имеем

$$\|T'_n\|_p^p \leq C_p^p n^p \|T_n\|_p^p = C_p^p n^p \|T_n\|_p^p,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеет место

$$\|T_n^{(\nu)}\|_p \leq C_p n^\nu \|T_n\|_p, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Замечание 2.1. Приведем оценку для C_p . Легко установить, что $C_p \geq 1$, если рассмотреть $T_n(x) = \cos nx$. С другой стороны, из хода доказательства видно, что

$$C_p \leq \inf_{r: 2rp > 1} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2rp}}\right)^{\frac{1}{p}} 2^{2r^2+r-2}.$$

При использовании вместо (1.1) соотношения (1.4), оценка для C_p немного улучшается:

$$C_p \leq \inf_{r: 2rp > 1} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2rp}}\right)^{\frac{1}{p}} 2^{2r^2+2r-3}.$$

Например, при $p = \frac{1}{2}$ имеем

$$1 \leq C_{\frac{1}{2}} \leq \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right)^2 2^5 = 2\pi^4 < 200.$$

Замечание 2.2. Весьма вероятно, что в (2.1) можно положить $C_p = 1$. В связи с этим возникает задача более точного исследования распределений значений тригонометрического полинома и его производной. Э. А. Стороженко поставила задачу выяснения справедливости следующего неравенства:

$$|T_n|^*(x) \leq n \cdot |T_n|^*(x), \quad x \in [0, 2\pi), \quad (2.3)$$

где через $f^*(x)$, как обычно, обозначается невозрастающая перестановка измеримой на $[0, 2\pi)$ функции $f(x)$ (см. [9], с. 54).

Замечание 2.3. В. И. Коляда заметил, что (2.1) можно вывести более элегантно из (0.3) с помощью неравенства Никольского — Тимана ([1], с. 243).

§ 3. Некоторые другие неравенства для тригонометрических полиномов в L_p , $0 < p < 1$

Введем несколько новых обозначений. Пусть $x_j^{(N)} = \frac{2\pi j}{N}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Далее, пусть

$$((T_n))_p^{(N)} \equiv \sup_x \left(\frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |T_n(x + x_j^{(N)})|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.1)$$

$$S_p^{(N)}(T_n) \equiv \left(\frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |T_n(x_j^{(N)})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

при $0 < p < \infty$. В случае $1 \leq p < \infty$ символ $((\cdot))_p^{(N)}$ называется интерполяционной нормой. Тогда имеются оценки С. М. Никольского [5]

$$\|T_n\|_p \leq ((T_n))_p^{(N)} \leq \left(1 + \frac{2\pi n}{N}\right) \|T_n\|_p. \quad (3.2)$$

Следует также отметить неравенства

$$A \|T_n\|_p \leq S_p^{(N)}(T_n) \leq B \|T_n\|_p, \quad (3.3)$$

при $1 \leq p < \infty$ для больших N , $0 < A < B < \infty$ (Зигмунд, Марцинкевич [10]). Мы здесь получим несколько оценок указанного типа для случая $0 < p < 1$.

Предложение 1. При $0 < p < 1$, $N = 1, 2, \dots$ имеют место неравенства

$$\|T_n\|_p \leq ((T_n))_p \leq C_p \left(1 + \frac{2\pi n}{N}\right)^{\frac{2r-1}{2}} \|T_n\|_p, \quad (3.4)$$

где $r = r(p)$ — наименьшее целое число, для которого $\frac{(2r-1)p}{2} \geq 1$.

Доказательство. Левая часть неравенства (3.4) очевидна, для получения правой части используем (1.7):

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |T_n(x + x_j^{(N)})|^p \leq \\
& \leq \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^r n-1} |T_n(t_k^{(2^r-1)n})|^p |D_{r,n}(x + x_j^{(N)} - t_k^{(2^r-1)n})|^p = \\
& = \sum_{k=0}^{2^r n-1} |T_n(t_k^{(2^r-1)n})|^p \cdot \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\sin \frac{n(x - t_k^{(2^r-1)n)} + x_j^{(N)})}{2}}{(x - t_k^{(2^r-1)n)} + x_j^{(N)})} \right)^{2 \frac{(2r-1)p}{2}} \leq \\
& \leq \{((K_{1,n})^{(N)})_{\frac{2r-1}{2}p}^{(N)}\}^{\frac{2r-1}{2}p} \cdot \sum_{k=0}^{2^r n-1} |T_n(t_k^{(2^r-1)n})|^p.
\end{aligned}$$

Фиксируем сейчас $r = r(p)$ согласно условиям, т. е. $\frac{(2r-1)p}{2} \geq 1$. Тогда из (3.2) имеем дальше

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |T_n(x + x_j^{(N)})|^p \leq \\
& \leq \left(1 + \frac{2\pi n}{N}\right)^{\frac{2r-1}{2}p} \cdot \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{(2r-1)p} dt \cdot \sum_{k=1}^{2^r n-1} |T_n(t_k^{(2^r-1)n})|^p.
\end{aligned}$$

Так как $(2r-1)p \geq 2 > 1$, то постоянная

$$C_p^r = \sup_n \left(\frac{2\pi n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{(2r-1)p} dt \right), \quad r = r(p), \quad (3.5)$$

конечна, т. е. $C_p < \infty$. В этом легко убедиться. Переходя к \sup по x в предыдущем неравенстве, имеем

$$\{((T_n)_p^{(N)})^p\} \leq C_p^r \left(1 + \frac{2\pi n}{N}\right)^{\frac{2r-1}{2}p} \frac{2\pi}{2^r n} \sum_{k=0}^{2^r n} |T_n(t_k^{(2^r-1)n})|^p.$$

Рассматривая $T_n(x+t)$ вместо $T_n(x)$, получим

$$\begin{aligned}
& \{((T_n)_p^{(N)})^p\} = \{((T_n(x+t))_n^{(N)})^p\} \leq \\
& \leq C_p^r \left(1 + \frac{2\pi n}{N}\right)^{\frac{2r-1}{2}p} \frac{2\pi}{2^r n} \sum_{k=0}^{2^r n} |T_n(t_k^{(2^r-1)n} + t)|^p, \quad t \in [0, 2\pi).
\end{aligned}$$

После интегрирования от 0 до 2π по t получается правая часть (3.4). Предложение доказано.

Замечание 3.1. Оценка (3.4), как мы полагаем, может быть улучшена. Она, однако, достаточна во многих вопросах приложения. Так, напр., можно сразу же извлекать в качестве следствия неравенство типа (3.3). Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 3. Пусть $0 < p < 1$ а $\alpha > 0$ — некоторая постоянная. Тогда при $N \geq \alpha n$ имеет место оценка

$$S_p^{(N)}(T_n) \leq C_{p, \alpha} \|T_n\|_p. \quad (3.6)$$

Доказательство. В самом деле, согласно предположению леммы и (3.4) имеем

$$S_p^{(N)}(T_n) \leq ((T_n)_p^{(N)}) \leq C_p \left(1 + \frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{2r-1}{2}} \|T_n\|_p,$$

что и требовалось доказать.

Для левой части (4.3) ограничение на N существенно, требуется по крайней мере выполнение условия $N > 2n + 1$ (см. по этому поводу [5]). Для случая $0 < p < 1$ мы здесь выводим более частный результат, а именно, справедлива

Лемма 4. Пусть $0 < p < 1$. Тогда

$$\|T_n\|_p \leq C_{p, r} \cdot S_p^{(2^r n)}(T_n), \quad r \geq r(p), \quad (3.7)$$

где $r(p)$ — наименьшее целое число с $(2r - 1)p > 1$.

Доказательство. Согласно (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \|T_n\|_p^p &\leq \sum_{k=0}^{2^r n - 1} |T_n(t_k^{(2^r - 1)n})|^p \cdot \int_0^{2\pi} |D_{r, n}(x - t_k^{(2^r - 1)n})|^p dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{(2r-1)p} dt \cdot \sum_{k=0}^{2^r n - 1} |T_n(t_k^{(2^r - 1)n})|^p \leq C_{p, r}^p \frac{2\pi}{2^r n} \sum_{k=0}^{2^r n - 1} |T_n(t_k^{(2^r - 1)n})|^p, \end{aligned}$$

где $C_{p, r}$ совпадает с константой (3.5). Утверждение леммы получается, если рассмотреть полином $T_n\left(x - \frac{2\pi}{2^r + 1n}\right)$ вместо $T_n(x)$.

Выведем еще одно неравенство из результатов §§ 1 и 3, которое, однако, можно получить и исходя из оценки (2.1) (см. [7]).

Предложение 2. Пусть $0 < p < 1$. Тогда при $\delta \leq \alpha/n$, где $\alpha < \infty$ — некоторая постоянная, справедлива оценка

$$\omega_p^*(\delta, T_n) \leq C_{p, \alpha} \delta \|T_n'\|_p, \quad (3.8)$$

где

$$\omega_p^*(\delta, T_n) \equiv \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{2\pi} |T_n(x+h) - T_n(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

— модуль непрерывности в $L_p(0, 2\pi)$.

Доказательство. Очевидно, из (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |T_n(x+h) - T_n(x)|^p dx &= \int_0^{2\pi} \left| \int_x^{x+h} T'_n(t) dt \right|^p dx \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2^r n-1} |T'_n(t_k^{(2^r-1)n})|^p \left(\int_x^{x+h} \left| \frac{\sin \frac{n(t-t_k^{(2^r-1)n)})}{2}}{n \sin \frac{t-t_k^{(2^r-1)n)}}{2}} \right|^{2r-1} dt \right)^p dx = \\ &= \sum_{k=0}^{2^r n-1} |T'_n(t_k^{(2^r-1)n})|^p \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_x^{x+h} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{2r-1} dt \right)^p dx. \end{aligned}$$

Фиксируем $r = r(p)$ так, чтобы $(2r-1)p > 1$. Тогда легко убедиться в том, что величина

$$\tilde{C}_{p, \alpha}^p = \sup_{n, h \leq \frac{\alpha}{n}} \frac{2^r n}{2\pi h^p} \int_0^{2\pi} \left(\int_x^{x+h} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{2r-1} dt \right)^p dx$$

конечна, т. е. $\tilde{C}_{p, \alpha} < \infty$. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_x^{x+h} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{2r-1} dt \right)^p dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j^{(n)}}^{x_{j+1}^{(n)}} \left(\int_x^{x+h} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{2r-1} dt \right)^p dx \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\max_{x_j^{(n)} \leq t \leq x_{j+1}^{(n)} + h} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{(2r-1)p} \right) \int_{x_j^{(n)}}^{x_{j+1}^{(n)}} \left(\int_x^{x+h} dt \right)^p dx \leq \\ &\leq C_\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^{(2r-1)p}} \frac{2\pi h^p}{n} \leq \tilde{C}_{p, \alpha}^p \frac{2\pi h^p}{2^r n}. \end{aligned}$$

Учитывая все это, согласно (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |T_n(x+h) - T_n(x)|^p dx &\leq \tilde{C}_{p, \alpha}^p h^p \frac{2\pi}{2^r n} \sum_{k=0}^{2^r n-1} |T'_n(t_k^{(2^r-1)n})|^p \leq \\ &\leq \tilde{C}_{p, \alpha}^p h^p \{((T'_n))_p^{(2^r n)}\}^p \leq C_{p, \alpha}^p h^p \|T'_n\|_p^p. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Остается перейти к \sup при $0 < h \leq \delta$.

Замечание 3.2. Отметим, что $C_{p, \alpha} \geq 1$. В этом можно убедиться, если рассмотреть $T_n(x) = \cos nx$.

Следствие 2. В условиях предложения 2 имеет место оценка

$$\omega_{p,k}^*(\delta, T_n) \leq (C_{p,k} \delta)^k \|T_n^{(k)}\|_p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

где $\omega_{p,k}^*(\delta, T_n) \equiv \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k T_n\|_p$ — модуль гладкости k -го порядка в L_p .

Доказательство. Оно сводится к последовательному применению (3.9).

В заключение мы без доказательства приведем обратную теорему для тригонометрического наилучшего приближения в L_p , $0 < p < 1$. При $1 \leq p < \infty$ имеется результат М. Ф. Тимана, изложенный в [1]. Сформулируем его: если $E_n \equiv E_{n,p}^*(f, T) \equiv \inf_{T_n} \|f - T_n\|_p$ — наилучшее тригонометрическое приближение n -го порядка для функции $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, то при $1 \leq p < \infty$, $n = 0, 1, \dots$ справедлива оценка

$$\omega_{p,k}^*\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \leq \frac{C_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{k-1} E_\nu.$$

В случае $0 < p < 1$ справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $0 < p < 1$ и функция $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$. Тогда при $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\omega_{p,k}^*\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \leq \frac{C_{p,k}}{(n+1)^k} \left\{ \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{kp-1} E_\nu^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (3.11)$$

Доказательство этой теоремы опирается на (2.2) и (3.10) и следует схеме, предложенной в [1]. В случае $k=1$ его можно найти в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман А. Ф. Теория приближения функции действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
2. Бернштейн С. Н. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné. Mem. Acad. Roy Belgique, 2-me série, v. 4, 1912, p. 1—104.
3. Zygmund A. A remark on conjugate series. J. London Math. Soc., v. 34, № 1872, 1932, p. 392—400.
4. Брудный Ю. А. Приближение целыми функциями на внешности отрезка и полуоси. ДАН СССР, т. 124, № 4, 1959, с. 739—742.
5. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 38, 1951, с. 244—278.
6. Кротов В. Г., Освальд П., Стороженко Э. А. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$. ДАН СССР, т. 226, № 1, 1976, с. 44—47.
7. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$. Матем. сб., т. 98 (140), 1975, с. 395—415.
8. Riesz M. Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonometrique. С. г. Acad. sci., v. 158, 1914, p. 1152.
9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1, М., „Мир“, 1965.
10. Zygmund A., Marcinkiewicz J. Mean values of trigonometrical polynomials. Fundam. math., v. 28, f. 1, 1937, s. 9—166.