Ф. Е. Ломовцев, Граничные задачи для полных квазигиперболических дифференциальных уравнений с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов. II,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 527–537

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 527–537

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛНЫХ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ. II

© 2005 г. **Ф. Е. Ломовцев**

Настоящая работа является завершением работы [1]. Здесь продолжается нумерация пунктов, утверждений, замечаний и формул из [1].

4. Существование сильных решений. Разрешимость граничных задач (1), (2) в сильном смысле для $\forall f \in \hat{F}^{-(m-1)}$ дает

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 из [1], условия II, IV и производные* $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H, W^{m-j}(t)))$, $2 \le j \le m-1$. *Тогда для каждых* $\lambda_m \in \tilde{\Lambda}_m$, *где* $\tilde{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_1$ *при* $m = 1$ *и* $\tilde{\Lambda}_m = [\tilde{\lambda}_m, +\infty[$, $\tilde{\lambda}_m \ge \hat{\lambda}_m$, *при* $m > 1$, *и* $f \in \hat{F}^{-(m-1)}$ *сильное решение* $u \in E^m$ *граничных задач (1), (2) существует, единственно и*

$$|||u|||_m \le c_0(m)\langle\|f\|\rangle_{-(m-1)}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

Доказательство. Поскольку из априорных оценок (28) следует замкнутость множеств значений $R(\overline{L_m}(\lambda_m))$ операторов $\overline{L_m}(\lambda_m)$ в $\hat{F}^{-(m-1)}$, то для разрешимости граничных задач (1), (2) в сильном смысле $\forall f \in \hat{F}^{-(m-1)}$ достаточно доказать плотность множеств значений $R(L_m(\lambda_m))$ операторов $L_m(\lambda_m)$ в $\hat{F}^{-(m-1)}$. Для этого в связи с рефлексивностью пространств $\hat{F}^{-(m-1)}$ достаточно показать, что $v = 0$, если только для некоторой функции $v \in \hat{E}^{m-1}$

$$\int_0^T (L_m(\lambda_m)u, v)dt = 0 \quad \forall u \in D(L_m), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{37}$$

Тождества (37) допускают $(m-1)$-кратное интегрирование по частям:

$$\int_0^T \left(\frac{d^{m+1}u}{dt^{m+1}}, \frac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}}\right)dt + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k \int_0^T \left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^k v}{dt^k}\right)dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\left[A_1(t)\frac{d}{dt} + \lambda_m A_0(t)\right]u, v\right)dt = 0.$$

Распространяем последние тождества предельным переходом на все $u \in \mathcal{H}$, такие, что $d^{m+1}u/dt^{m+1}, A_s(t)d^{[(s+1)/2]}u/dt^{[(s+1)/2]} \in \mathcal{H}$, $s = \overline{0, 2m-1}$, $d^k u/dt^k \in \mathcal{H}^{m-k}$, $k = \overline{1, m}$, и u удовлетворяют граничным условиям (2), полагаем $u = A_0^{-1}(t)h$ $\forall h \in \mathcal{H}$ таких, что $d^k h/dt^k \in \mathcal{H}$, $k = \overline{1, m+1}$, и h удовлетворяют граничным условиям (2), и получаем равенства

$$\int_0^T \left(\frac{d^{m+1}h}{dt^{m+1}}, A_0^{-1}(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right)dt = -\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{dA_0^{-1}(t)h}{dt} + \lambda_m h, J(t)w\right)dt -$$

$$
-\sum_{i=1}^{m+1} C_{m+1}^i \int\limits_0^T \left(\frac{d^i A_0^{-1}(t)}{dt^i} \frac{d^{m+1-i}h}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}[e^{c(T-t)}J(t)w] \right) dt -
$$

$$
-\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \int\limits_0^T \left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + A_{2k}(t) \right] \frac{d^k A_0^{-1}(t)h}{dt^k}, \frac{d^k}{dt^k}[e^{c(T-t)}J(t)w] \right) dt, \tag{38}
$$

где w – решение в $\mathcal{H}$ задачи Коши $J(t)w = e^{c(t-T)}v$, $w(0) = 0$. Из равенств $d^{i+1}w/dt^{i+1} = (T-t)^{-1}d^i(e^{c(t-T)}v)/dt^i - (m-1-i)(T-t)^{-1}d^iw/dt^i$, $0 \le i \le m-1$, вытекает, что по крайней мере $w \in \mathcal{W}^m = \{w \in \mathcal{H} : d^kw/dt^k \in \mathcal{H},\ 1 \le k \le m;\ (d^iw/dt^i)|_{t=0} = (d^jw/dt^j)|_{t=T} = 0,\ 0 \le i \le m-1,\ 0 \le j \le m-2\}$.

Из равенств (38) заключаем, что функции $A_0^{-1}(t)(T-t)d^mw/dt^m$ имеют производную из $\mathcal{H}$ и обращаются в нуль при $t = T$. В (38) проинтегрируем еще один раз по частям, распространим полученные равенства предельным переходом на все $h \in \mathcal{W}^m$, положим $h = w$, возьмем удвоенную вещественную часть и найдем равенства

$$
-2\,\mathrm{Re} \int\limits_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t) e^{c(T-t)} (T-t) \frac{d^m w}{dt^m} \right] \right) dt =
$$

$$
= 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i \int\limits_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t) \frac{d^i e^{c(T-t)}}{dt^i} \frac{d^{m-1-i}J(t)w}{dt^{m-1-i}} \right] \right) dt -
$$

$$
-2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{m+1} C_{m+1}^i \int\limits_0^T \left(\frac{d^i A_0^{-1}(t)}{dt^i} \frac{d^{m+1-i}w}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}[e^{c(T-t)}J(t)w] \right) dt -
$$

$$
-2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \int\limits_0^T \left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + A_{2k}(t) \right] \frac{d^k A_0^{-1}(t)w}{dt^k}, \frac{d^k}{dt^k}[e^{c(T-t)}J(t)w] \right) dt -
$$

$$
-2\,\mathrm{Re} \int\limits_0^T e^{c(T-t)} \left(A_1(t) \frac{dA_0^{-1}(t)w}{dt} + \lambda_m w, J(t)w \right) dt. \tag{39}
$$

Здесь для интегрирования по частям воспользуемся следующей леммой [2].

Лемма 8. *Пусть E_1, F_1 и G_1 – банаховы пространства, $T_1 : E_1 \to F_1$ – линейный ограниченный оператор и $S_1 : F_1 \to G_1$ – линейный замкнутый оператор с плотной областью определения. Если область определения произведения $S_1 \cdot T_1$ операторов T_1 и S_1 плотна в E_1, то его сопряженный оператор $(S_1 \cdot T_1)^*$ равен слабому замыканию произведения $T_1^* \cdot S_1^*$ их сопряженных операторов T_1^* и S_1^* соответственно.*

Применив лемму 8 в $E_1 = F_1 = \mathcal{H}$ и $G_1 = \mathcal{H} \times H$ к операторам $T_1u = A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)u$ и $S_1g = \{dg/dt, g(0)\}$ с областью определения $D(S_1) = \{g \in \mathcal{H} : dg/dt \in \mathcal{H},\ g(T) = 0\}$ в первых двух членах выражений

$$
-\int\limits_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t) e^{c(T-t)} (T-t) \frac{d^m w}{dt^m} \right] \right) dt -
$$

$$
-Te^{cT}\left(\frac{d^m w}{dt^m}, A_0^{-1}(t)\frac{d^m w}{dt^m} \right)\Bigg|_{t=0} + Te^{cT}\left| A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m} \right|^2\Bigg|_{t=0}, \tag{40}
$$

убеждаемся в том, что выражения (40) равны

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m}\right], \frac{d^m w}{dt^m}\right)dt -$$

$$-\int_0^T \left(\left(\frac{d}{dt}[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)]\right)\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d^m w}{dt^m}\right)dt + Te^{cT}\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2\Bigg|_{t=0}, \quad (41)$$

так как $T_1^* = T_1$, $S_1^*(\{p, p(0)\}) = -dp/dt$, $D(S_1^*) = \{\{p, p(0)\} \in G_1 : dp/dt \in \mathcal{H}\}$ и

$$\overline{T_1^* \cdot S_1^*}\,\frac{d^m w}{dt^m} = -\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m}\right] + \left(\frac{d}{dt}[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)]\right)\frac{d^m w}{dt^m},$$

где $\overline{T_1^* \cdot S_1^*}$ – замыкание произведения $T_1^* \cdot S_1^*$. То, что $d^m w/dt^m \in D((S_1 \cdot T_1)^*)$ – область определения оператора $(S_1 \cdot T_1)^*$, следует из равенств (38), которые можно записать в виде

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m h}{dt^m}\right], \frac{d^m w}{dt^m}\right)dt = \int_0^T \left(\left(\frac{d}{dt}[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)]\right)\frac{d^m h}{dt^m}, \frac{d^m w}{dt^m}\right)dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i \int_0^T \left(\frac{d^m h}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)\frac{d^i e^{c(T-t)}}{dt^i}\frac{d^{m-1-i}J(t)w}{dt^{m-1-i}}\right]\right)dt -$$

$$-\sum_{i=1}^{m+1} C_{m+1}^i \int_0^T \left(\frac{d^i A_0^{-1}(t)}{dt^i}\frac{d^{m+1-i}h}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}[e^{c(T-t)}J(t)w]\right)dt -$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k \int_0^T \left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + A_{2k}(t)\right]\frac{d^k A_0^{-1}(t)h}{dt^k}, \frac{d^k}{dt^k}[e^{c(T-t)}J(t)w]\right)dt -$$

$$-\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{dA_0^{-1}(t)h}{dt} + \lambda_m h, J(t)w\right)dt.$$

Таким образом, в силу (39)–(41) имеем равенства

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2 dt + Te^{cT}\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2\Bigg|_{t=0} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\sum_{i=2}^{m-1} C_{m-1}^i \int_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)\frac{d^i e^{c(T-t)}}{dt^i}\frac{d^{m-1-i}J(t)w}{dt^{m-1-i}}\right]\right)dt -$$

$$-(2m-2)c\,\mathrm{Re}\int_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}\frac{d^{m-2}J(t)w}{dt^{m-2}}\right] - A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m}\right)dt -$$

$$-2\,\mathrm{Re}\sum_{i=2}^{m+1} C_{m+1}^i \int_0^T \left(\frac{d^i A_0^{-1}(t)}{dt^i}\frac{d^{m+1-i}w}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}[e^{c(T-t)}J(t)w]\right)dt -$$

$$
-(2m+2)\operatorname{Re}\int_0^T\left(\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}[e^{c(T-t)}J(t)w]-e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m}\right)dt-
$$

$$
-(2m+1)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d^m w}{dt^m}\right)dt-\Phi^{(2)}(w,w)-\Phi^{(1)}(w,w)-
$$

$$
-(2m-1)c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2 dt-\lambda_m\int_0^T[c(T-t)+2m-1]e^{c(T-t)}|w|^2\,dt, \qquad (42)
$$

где формы

$$
\Phi^{(l)}(w,w)=2\operatorname{Re}\sum_{s=l}^{2m-l}(-1)^{[s/2]}\left\{\left[\frac{s+1}{2}\right]\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_s(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{[(s-1)/2]}w}{dt^{[(s-1)/2]}}, \frac{d^{[(s+2)/2]}w}{dt^{[(s+2)/2]}}\right)dt+\right.
$$

$$
+\left[\frac{s+1}{2}\right]\int_0^T\left(A_s(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{[(s-1)/2]}w}{dt^{[(s-1)/2]}}, \left(\frac{d^{[s/2]}}{dt^{[s/2]}}[e^{c(T-t)}J(t)w]-e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^{[(s+2)/2]}w}{dt^{[(s+2)/2]}}\right)\right)dt+
$$

$$
+\sum_{j=2}^{[(s+1)/2]}C^j_{[(s+1)/2]}\int_0^T\left(A_s(t)\frac{d^jA_0^{-1}(t)}{dt^j}\frac{d^{[(s+1)/2]-j}w}{dt^{[(s+1)/2]-j}}, \frac{d^{[s/2]}}{dt^{[s/2]}}[e^{c(T-t)}J(t)w]\right)dt+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{[s/2]}C^i_{[s/2]}\int_0^T\left(A_s(t)A_0^{-1}(t)\frac{d^{[(s+1)/2]}w}{dt^{[(s+1)/2]}}, \frac{d^ie^{c(T-t)}}{dt^i}\frac{d^{[s/2]-i}J(t)w}{dt^{[s/2]-i}}\right)dt+
$$

$$
\left.+\sum_{j=0}^{1}\int_0^T e^{c(T-t)}\left((1-j)\left(m-1-\left[\frac{s}{2}\right]\right)+j(T-t)\right)\left(A_s(t)A_0^{-1}(t)\frac{d^{[(s+1)/2]}w}{dt^{[(s+1)/2]}}, \frac{d^{[s/2]+j}w}{dt^{[s/2]+j}}\right)dt\right\}, \quad l=2;1. \qquad (43)
$$

Причем в (43) суммирование при $l=2$ ведется только по четным s и при $l=1$ – только по нечетным s. Для тех операторов $A_{2k}(t)$, $k>0$, и $A_{2k+1}(t)$, $k\geq 0$, которые не удовлетворяют неравенству (8) при $j=1$, в первых интегралах этих форм интегрируем один раз по частям:

$$
\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_s(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{[(s-1)/2]}w}{dt^{[(s-1)/2]}}, \frac{d^{[(s+2)/2]}w}{dt^{[(s+2)/2]}}\right)dt=
$$

$$
=-\sum_{j=0}^{1}\int_0^T\frac{d^je^{c(T-t)}(T-t)}{dt^j}\left(A_s(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{[(s+1)/2]-j}w}{dt^{[(s+1)/2]-j}}, \frac{d^{[s/2]}w}{dt^{[s/2]}}\right)dt-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{2}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{d^{2-i}A_s(t)}{dt^{2-i}}\frac{d^iA_0^{-1}(t)}{dt^i}\frac{d^{[(s-1)/2]}w}{dt^{[(s-1)/2]}}, \frac{d^{[s/2]}w}{dt^{[s/2]}}\right)dt \qquad (44)
$$

и в (44) для нечетных s используем симметричность операторов $A_s(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)$ в H.

При $m=1$ правая часть равенства (42) оценивается сверху выражением

$$
(c_0^{(2)}+3c_0^{(1)}+\tilde c_1^{(1)}+2\tilde c_1-c)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{dw}{dt}\right|^2dt+
$$

$$+\left[(c_0^{(2)}+\tilde{c}_1^{(1)}-c\lambda_1)(T-t)-\lambda_1\right]\int\limits_0^T e^{c(T-t)}|w|^2dt \tag{45}$$

благодаря неравенствам (4), примененным в третьем, (3) – в пятом, (9) – в двенадцатом, (7) – в четырнадцатом и пятнадцатом, (13) – в пятнадцатом интегралах, и либо неравенству (8) при $j=1$, примененному в одиннадцатом интеграле правой части равенства (42), либо неравенствам (8) при $j=2$ и (9), (10), примененным в равенстве (44) при $s=1$. Видим, что выражение (45) неположительно при $\forall c\ge c_4=c_0^{(2)}+3c_0^{(1)}+\tilde{c}_1^{(1)}+2\tilde{c}_1$ и $\forall\lambda_1\ge 1$.

При $m>1$ правые части равенств (42) оцениваются сверху выражениями

$$\int\limits_0^T (T-t)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1}c_{i,j}\left|\frac{d^iw}{dt^i}\right|_{-i,t}\left|\frac{d^jw}{dt^j}\right|_{-j,t}-c\lambda_m|w|^2\right)dt+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{c}_{i,j}\left\|\frac{d^iw}{dt^i}\right\|_{-i}\left\|\frac{d^jw}{dt^j}\right\|_{-j}-$$

$$-(2m-1)\lambda_m\|w\|_0^2+\left[(2m+1)c_0^{(1)}-(2m-1)c\right]\int\limits_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{d^mw}{dt^w}\right|^2_{-m,t}dt \tag{46}$$

благодаря неравенствам (14) при $\alpha=1/2$ и $\beta=1/(2m)$, примененным в первом, втором и четвертом, (4) – в третьем, (3) – в пятом, (9) – в седьмом и двенадцатом, (8) – в восьмом и тринадцатом, (7) – в девятом, десятом, четырнадцатом и пятнадцатом, (12) – в десятом, (13) – в пятнадцатом интегралах, и либо неравенству (8) при $j=1$, примененному в шестом и одиннадцатом интегралах правых частей равенств (42), либо неравенствам (8) при $j=2$ и (9)–(11), примененным в равенствах (44). Считаем, что в правых частях равенств (42) содержится всего семнадцать интегралов. Постоянные $c_{i,j},\tilde{c}_{i,j}\ge 0$ зависят лишь от c, m, T и постоянных из условий I–IV. Если в (46) применим δ-неравенство и оценки (18) и (19), то сначала найдем $c_{2m+11}\ge(2m+1)c_0^{(1)}/(2m-1)$, а затем $\tilde{\lambda}_m\ge\hat{\lambda}_m$ такие, что при $c=c_{2m+11}$ и $\forall\lambda_m\ge\tilde{\lambda}_m$ выражения (46) будут не больше $(1-c_{2m+12})\|d^mw/dt^m\|^2_{-m}$, $c_{2m+12}>0$.

Для завершения доказательства остается левые части равенств (42), взятых при $c=c_4$ и $\forall\lambda_1\ge 1$ для $m=1$ и при $c=c_{2m+11}$ и $\forall\lambda_m\ge\tilde{\lambda}_m$ для $m>1$, оценить снизу через $\|d^mw/dt^m\|^2_{-m}$, их правые части – сверху через $(1-c_{2m+12})\|d^mw/dt^m\|^2_{-m}$, привести подобные члены и получить, что $w=0$ и, значит, $v=0$. Неравенства (36) следуют из неравенств (28).

Замечание 2. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большими $c_0(m)$ и $\hat{\lambda}_m$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 (возможно, с большими $\tilde{\lambda}_m$) распространяются на уравнения с младшими членами

$$L_m(\lambda_m)u+\sum_{k=0}^{2m-1}B_k(t)\frac{d^ku}{dt^k}=f,\quad t\in]0,T[,\quad m=1,2,\ldots,$$

где линейные неограниченные операторы $B_k(t)\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(W^{2m-k-1}(t),H))$, $0\le k\le 2m-1$, с зависящими от t областями определения $D(B_k(t))\supset D(A_0(t))$ при всех $t\in[0,T]$ имеют в H сильные производные $d^jB_k(t)/dt^j\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(W^{2m-k+j-1}(t),H))$, $1\le j\le k-m$, $0\le k\le$ $\le 2m-1$, такие, что $\forall u,v\in D(A_0(t))$

$$\left|\left(\frac{d^jB_k(t)}{dt^j}u,v\right)\right|\le\begin{cases}c_{2m+13}^{(0)}|u|_{m-k,t}|v|_{m-1,t}, & 0\le k\le m,\\ c_{2m+13}^{(j)}|u||v|_{2m-k+j-1,t}, & 1\le j\le k-m,\quad m<k\le 2m-1,\end{cases}$$

где постоянные $c_{2m+13}^{(j)}\ge 0$ не зависят от u, v и t.

5. Примеры задач. Для каждого $m=1,2,\ldots$ построим новые корректные краевые задачи для полных "гиперболических" дифференциальных уравнений с частными производными гладких по времени t переменных порядков по $x\in\mathbb{R}^n$, которые иллюстрируют достаточные условия существования и единственности сильных решений граничных задач (1), (2) в теоремах 1 и 2. Сначала укажем операторные коэффициенты дифференциальных уравнений (1).

Пусть в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, при каждом $t \in [0,T]$ действуют дифференциальные операторы

$$A_0(t) = (I - \Delta_x)^{p(t)}, \quad p(t) > n/2, \quad p(t) \in C[0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{47}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с зависящими от t областями определения

$$D(A_0(t)) = \{u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : (I - \Delta_x)^{p(t)} u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}, \tag{48}$$

и дифференциальные операторы

$$\begin{gathered} A_s(t) = (-1)^{[s/2]}(I - \Delta_x)^{p(t)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)}, \quad 0 < \varepsilon_{2k} < 1/(2m), \quad k = \overline{1, m-1}; \\ \varepsilon_{2k+1} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \end{gathered} \tag{49}$$

с зависящими от t областями определения

$$D(A_s(t)) = \{u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : (I - \Delta_x)^{p(t)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)} u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}, \quad s = \overline{1, 2m-1}. \tag{50}$$

Здесь частные производные дробных порядков определяются с помощью прямого и обратного преобразований Фурье–Планшереля в $L_2(\mathbb{R}^n)$ [3, с. 108]

$$F[g](\xi) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|<R} g(x) e^{i(\xi,x)} dx, \quad F^{-1}[g](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|<R} g(\xi) e^{-i(x,\xi)}\, d\xi,$$

а именно: $A_s(t)u(x) = (-1)^{[s/2]} F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{p(t)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)} F[u](\xi)](x)$ и $D(A_s(t)) = \{u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{p(t)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)} F[u](\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$, $s > 0$ [3, с. 135–136; 4, с. 38], и аналогично определяются операторы $A_0(t)$ с областями определения $D(A_0(t))$ (см. далее (57) при $\alpha = 2m$). Краевые задачи, получающиеся из задач (1), (2) с дифференциальными операторными коэффициентами (47)–(50), будем обозначать через $(1')$, $(2')$.

Теперь по операторам (47)–(50) так же, как в п. 3, строим пространства сильных решений краевых задач $(1')$, $(2')$ – гильбертовы пространства $\mathcal{E}^m = \mathcal{E}^m([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ как пополнения соответствующих для операторов (47)–(50) множеств $\mathcal{D}(L_m)$ по эрмитовым нормам $|||u|||_{\mathcal{E}^m} = (\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (|\partial^m u(t,x)/\partial t^m|^2 + |(I - \Delta_x)^{p(t)/2} u(t,x)|^2)\, dx\, dt)^{1/2}$ и пространства правых частей уравнений $(1')$ – банаховы пространства $\hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)} = \hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$ как пополнения множества $L_2(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$ по нормам

$$\langle\|f\|\rangle_{\hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}} = \sup_v \left\{ \left| \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t,x)\overline{v(t,x)}\, dx\, dt \right| \Big/ \langle\|v\|\rangle_{m-1} \right\}, \quad v \in \hat{\mathcal{E}}^{m-1} = \hat{\mathcal{E}}^{m-1}([0,T] \times \mathbb{R}^n),$$

где $\hat{\mathcal{E}}^{m-1}$ – пополнения множеств $\hat{\mathcal{D}}^m = \{v \in L_2(]0,T[\times\mathbb{R}^n) : \partial^k v/\partial t^k \in D(A_0^{(m-k)/(2m)}(t))$, $t \in [0,T]$; $A_0^{(m-k)/(2m)}(t)\partial^k v/\partial t^k \in L_2(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$, $k = \overline{0,m}$; $\partial^i v/\partial t^i|_{t=0} = \partial^i v/\partial t^i|_{t=T} = 0$, $i = \overline{0, m-1}\}$ по эрмитовым нормам

$$\langle\|v\|\rangle_{m-1} = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} (T-t)^{-2} \left| A_0^{(m-1-k)/(2m)}(t) \frac{\partial^k v}{\partial t^k} \right|^2 dx\, dt \right)^{1/2}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Если $n/2 < p(t) \in C^{(m+1)}[0,T]$ и производная $p'(t) \leq 0$, $t \in [0,T]$, то существуют постоянные $\widetilde{c}_0(m) > 0$ и множества $\widetilde{\Lambda}_1 = [1, +\infty[$ при $m = 1$ и $\widetilde{\Lambda}_m = [\widetilde{\lambda}_m, +\infty[$ при $m > 1$ такие, что для каждых $\lambda_m \in \widetilde{\Lambda}_m$ и $f \in \hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}$ сильное решение $u \in \mathcal{E}^m$ краевых задач (1′), (2′) существует, единственно и справедливы неравенства*

$$|||u|||_{\mathcal{E}^m} \leq \widetilde{c}_0(m)\langle\|f\|\rangle_{\hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{51}$$

Доказательство. Покажем выполнимость всех предположений теоремы 2 в случае краевых задач (1′), (2′).

I′. Операторы $A_0(t)$ $\forall t$ самосопряжены в $L_2(\mathbb{R}^n)$, так как они симметричны на $D(A_0(t))$ и имеют на $L_2(\mathbb{R}^n)$ ограниченные обратные $A_0^{-1}(t)g = F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}] * g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ $\forall g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ [3, с. 182–185], если $p(t) > n/2$ $\forall t$ согласно оценке свертки $\|h * g\|_{L_2} \leq \|h\|_{L_1}\|g\|_{L_2}$ [3, с. 62]. Симметричность операторов $A_0(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ вытекает из равенств

$$\langle A_0(t)u, v\rangle = \langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)}F[u]], v\rangle = (2\pi)^{-n}\langle(1+|\xi|^2)^{p(t)}F[u], F[v]\rangle =$$
$$= (2\pi)^{-n}\langle F[u], (1+|\xi|^2)^{p(t)}F[v]\rangle = \langle u, F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)}F[v]]\rangle = \langle u, A_0(t)v\rangle$$

$\forall u, v \in D(A_0(t)) = \{u \in L_2(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{p(t)}F[u](\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$, $t \in [0,T]$, полученных благодаря известным равенству Парсеваля [3, с. 108]

$$\langle h, g\rangle = (2\pi)^{-n}\langle F[h], F[g]\rangle \quad \forall h, g \in L_2(\mathbb{R}^n) \tag{52}$$

для скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|\cdot\|$ и формулам обращения [3, с. 102]

$$F^{-1} \cdot F[g] = F \cdot F^{-1}[g] = g \quad \forall g \in L_2(\mathbb{R}^n). \tag{53}$$

В частности, из полученных выше равенств при $v = u$ имеем

$$\langle A_0(t)u, u\rangle = (2\pi)^{-n}\|(1+|\xi|^2)^{p(t)/2}F[u]\|^2 \geq (2\pi)^{-n}\|F[u]\|^2 = \|u\|^2 \quad \forall u \in D(A_0(t)), \quad \forall t,$$

что означает положительную определенность операторов $A_0(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $c_0(t) = 1$.

В силу непрерывности F^{-1} в $L_2(\mathbb{R}^n)$ дифференцированием по t устанавливаем существование сильной производной $(dA_0^{-1}(t)/dt)g = -p'(t)(F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)] * g)$, ограниченность которой в $L_2(\mathbb{R}^n)$ для $\forall t$, $\forall g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ следует из неравенств

$$\left\|\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}g\right\|^2 = (p'(t))^2\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)] * g\|^2 =$$
$$= \frac{(p'(t))^2}{(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)F[g]\|^2 \leq (2\pi)^{-n}(\rho e)^{-2}(p'(t))^2\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)+\rho}F[g]\|^2 \leq$$
$$\leq (2\pi)^{-n}(\rho e)^{-2}(p'(t))^2\|F[g]\|^2 = (\rho e)^{-2}(p'(t))^2\|g\|^2,$$

в которых, кроме соотношений (52) и (53), использованы еще при $i = 1$ и любом достаточно малом показателе $\rho > 0$ оценки

$$\ln^i z \leq (i/(\rho e))^i z^\rho \quad \forall z \geq 1, \quad \forall \rho > 0, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{54}$$

Аналогично выводятся неравенства $\|A_0^{-1}(t)g\|^2 \leq \|g\|^2$ $\forall g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $\forall t$.

В силу $p'(t) \leq 0$ $\forall t$ с помощью (52), (53) и формулы преобразования свертки [3, с. 105]

$$F[h * g] = F[h] \cdot F[g] \quad \forall h \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad \forall g \in L_2(\mathbb{R}^n) \tag{55}$$

убеждаемся в том, что при $c_0^{(1)} = 0$ $\forall t$ справедливо неравенство (3):

$$-\langle(dA_0^{-1}(t)/dt)g, g\rangle = p'(t)\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)] * g, g\rangle =$$

$$= (2\pi)^{-n} p'(t) \langle (1+|\xi|^2)^{-p(t)} \ln(1+|\xi|^2) F[g], F[g] \rangle \le 0 \quad \forall g \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

В дальнейшем при выводе равенств и неравенств мы часто будем использовать свойства (52), (53), (55) и условимся не оговаривать это каждый раз.

II$'$. На основании непрерывности F^{-1} в $L_2(\mathbb{R}^n)$ дифференцированием по t находим вторую сильную производную $\forall g \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{d^2 A_0^{-1}(t)}{dt^2} g = -p''(t) F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)} \ln(1+|\xi|^2)] * g + (p'(t))^2 F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)} \ln^2(1+|\xi|^2)] * g$$

и затем последовательно вычисляем сильные производные $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j$, $3 \le j \le m+1$, так как $p(t) \in C^{(m+1)}[0,T]$. Их ограниченность в $L_2(\mathbb{R}^n)$ устанавливается аналогично ограниченности $dA_0^{-1}(t)/dt$. Они при $0 < \rho \le \min\limits_{[0,T]} p(t)/(2m) \le (j-1) \min\limits_{[0,T]} p(t)/(2m)$, $j = \overline{2, m+1}$, в (54) $\forall t$, $\forall g$, $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют неравенствам (4):

$$|\langle (d^j A_0^{-1}(t)/dt^j) g, v \rangle| \le \sum_{i=1}^{j} c_i(t) |\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)} \ln^i(1+|\xi|^2)] * g, v \rangle| \le$$

$$\le \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{i}{\rho e}\right)^i c_i(t) \|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/2+\rho} F[g]\| \, \|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/2} F[v]\| \le$$

$$\le \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{i}{\rho e}\right)^i c_i(t) \|(1+|\xi|^2)^{-p(t)(m+1-j)/(2m)} F[g]\| \, \|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/2} F[v]\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{i}{\rho e}\right)^i c_i(t) \|A_0^{-(m-j+1)/(2m)}(t) g\| \, \|A_0^{-1/2}(t) v\| = \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{i}{\rho e}\right)^i c_i(t) |g|_{-(m+1-j),t} |v|_{-m,t},$$

где функции $c_i(t)$ выражаются через $p(t)$ и ее производные не выше порядка $j-i+1$. Здесь мы воспользовались представлением отрицательных дробных степеней операторов $A_0(t)$:

$$A_0^{-\alpha/(2m)}(t) g = F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)\alpha/(2m)}] * g, \quad \alpha > 0. \tag{56}$$

III$'$. Операторы $A_s(t)$, $s > 0$, удовлетворяют оценке (5), поскольку $\forall t$, $\forall u$, $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$|\langle A_s(t) u, v \rangle| = |\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)} F[u]], v \rangle| =$$

$$= (2\pi)^{-n} |\langle (1+|\xi|^2)^{p(t)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)} F[u], F[v] \rangle| =$$

$$= (2\pi)^{-n} |\langle (1+|\xi|^2)^{p(t)(1/2-[(s+1)/2]/(2m)-\varepsilon_s)} F[u], (1+|\xi|^2)^{p(t)(1/2-[s/2]/(2m))} F[v] \rangle| \le$$

$$\le \|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1/2-[(s+1)/2]/(2m))} F[u]]\| \, \|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1/2-[s/2]/(2m))} F[v]]\| =$$

$$= |u|_{m-[(s+1)/2],t} |v|_{m-[s/2],t}.$$

Здесь использованы представления положительных дробных степеней операторов $A_0(t)$:

$$A_0^{\alpha/(2m)}(t) u = F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)\alpha/(2m)} F[u]], \quad \alpha > 0. \tag{57}$$

Докажем, что операторы $A_s(t)$ сильно дифференцируемы по t в $L_2(\mathbb{R}^n)$ на множествах $D(A_0^{1-s/(2m)-\varepsilon_s+\eta}(t))$ для любого малого $\eta > 0$, и вычислим их сильную производную $dA_s(t)/dt$ с зависящими от t областями определения $D(A_s(t))$, $s > 0$, по определению 1. Для каждых $t_0 \in [0,T]$ и $u(t_0) \in D(A_0^{1-s/(2m)-\varepsilon_s+\eta}(t_0)) \subset D(A_s(t_0))$ существует $g_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такое, что $u(t_0) = A_0^{-(1-s/(2m)-\varepsilon_s+\eta)}(t_0) g_0$. Тогда существуют $u(t) = A_0^{-(1-s/(2m)-\varepsilon_s)}(t) A_0^{-\eta}(t_0) g_0 \in D(A_s(t))$,

$t \neq t_0$, причем $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t_0)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)}]*A_0^{-\eta}(t_0)g_0 = A_0^{-(1-s/(2m)-\varepsilon_s+\eta)}(t_0)g_0 = u(t_0)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ ввиду (56), непрерывности F^{-1} в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и $p(t)$ по t. Согласно непрерывности F^{-1} в $L_2(\mathbb{R}^n)$, также устанавливаем существование производной

$$u'(t_0) = -(1-s/(2m)-\varepsilon_s)p'(t_0)(F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t_0)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)]*A_0^{-\eta}(t_0)g_0) \in D(A_s(t_0)),$$

если в (54) показатель $0 < \rho \le \eta \min\limits_{[0,T]} p(t)$, где $\eta > 0$. При этом существует производная $h'(t_0) = (A_s u)'_t(t_0) = (-1)^{[s/2]}(A_0^{-\eta}(t_0)g_0)'_t(t_0) = 0$. Поэтому с помощью (57) отсюда по определению 1 получаем, что при $s>0$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ существует сильная производная

$$(dA_s(t_0)/dt)u(t_0) = h'(t_0) - A_s(t_0)u'(t_0) = -(-1)^{[s/2]}F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t_0)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)}F[u'(t_0)]] =$$
$$= (-1)^{[s/2]}(1-s/(2m)-\varepsilon_s)p'(t_0)F^{-1}[\ln(1+|\xi|^2)F[A_0^{-\eta}(t_0)g_0]] =$$
$$= (-1)^{[s/2]}(1-s/(2m)-\varepsilon_s)p'(t_0)F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t_0)(1-s/(2m)-\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)F[u(t_0)]]. \qquad (58)$$

Поскольку $p(t) \in C^{(m+1)}[0,T]$, то аналогичным образом вычисляются сильные производные высших порядков $d^iA_s(t)/dt^i$ такие, что

$$(d^iA_s(t)/dt^i)A_0^{-(1-s/(2m)+\tau/(2m))}(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))), \quad \tau>0, \quad i=\overline{1,[s/2]}, \quad s=\overline{1,2m-1}.$$

Симметричность $A_s(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и справедливость неравенств (6) при $i=0$ и $s=2k+1$, $k=\overline{0,m-1}$, вытекают из самосопряженности $A_0(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Справедливость же неравенств (6) при $i=1$ и $s=2k$, $k=\overline{1,m-1}$, благодаря (58) и неравенству $p'(t)\le 0$ $\forall t$ вытекает из

$$(-1)^k\langle (dA_{2k}(t)/dt)u,u\rangle = (1-k/m-\varepsilon_{2k})p'(t)\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1-k/m-\varepsilon_{2k})}\ln(1+|\xi|^2)F[u]],u\rangle =$$
$$= (2\pi)^{-n}(1-k/m-\varepsilon_{2k})p'(t)\langle (1+|\xi|^2)^{p(t)(1-k/m-\varepsilon_{2k})}\ln(1+|\xi|^2)F[u],F[u]\rangle \le 0 \quad \forall u\in D(A_0(t)), \quad \forall t.$$

IV′. Ввиду (56) и (57) все операторы $A_s(t)$, $s>0$, $\forall t$ удовлетворяют неравенствам (7):

$$|\langle A_s(t)A_0^{-1}(t)g,v\rangle| = |\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/(2m)+\varepsilon_s)}F[g],v\rangle| =$$
$$= (2\pi)^{-n}|\langle (1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/(2m)+\varepsilon_s)}F[g],F[v]\rangle| \le$$
$$\le (2\pi)^{-n}\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)[(s+1)/2]/(2m)}F[g]\|\,\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)[s/2]/(2m)}F[v]\| =$$
$$= \|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)[(s+1)/2]/(2m)}]*g\|\,\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)[s/2]/(2m)}]*v\| =$$
$$= |g|_{-[(s+1)/2],t}|v|_{-[s/2],t} \quad \forall g,v\in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Ограниченность операторов $A_s(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)$, $s>0$, в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при всех t следует из

$$\|A_s(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g\|^2 = (p'(t))^2\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/(2m)+\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)F[g]]\|^2 =$$
$$= \frac{(p'(t))^2}{(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/(2m)+\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)F[g]\|^2 \le \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{\rho-p(t)s/(2m)}F[g]\|^2 \le$$
$$\le (2\pi)^{-n}(\rho e)^{-2}(p'(t))^2\|F[g]\|^2 = (\rho e)^{-2}(p'(t))^2\|g\|^2 \quad \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если $0<\rho\le \min\limits_{[0,T]} p(t)/(2m)$ в (54). Аналогично показывается, что $A_s(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$, $j=\overline{2,[(s+1)/2]}$, $s=\overline{1,2m-1}$, $s>0$.

С учетом (56) устанавливается, что для $A_s(t)$, $s>0$, при $0<\rho\le\min\limits_{[0,T]} p(t)/(2m)$ в (54) выполняется неравенство (8) при $j=2$, так как для всех t

$$|\langle A_s(t)(d^2A_0^{-1}(t)/dt^2)g,v\rangle| =$$

$$= (2\pi)^{-n}|\langle(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/(2m)+\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)\{p''(t)-(p'(t))^2\ln(1+|\xi|^2)\}F[g],F[v]\rangle| \le$$

$$\le (2\pi)^{-n}\sum_{i=1}^{2} b_i(t)\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)([(s+1)/2]-1)/(2m)+\rho}F[g]\|\,\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)([s/2]+1)/(2m)}F[v]\| \le$$

$$\le (2\pi)^{-n}\sum_{i=1}^{2} b_i(t)\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)([(s+1)/2]-2)/(2m)}F[g]\|\,\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)([s/2]+1)/(2m)}F[v]\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} b_i(t)\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)([(s+1)/2]-2)/(2m)}]*g\|\,\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)([s/2]+1)/(2m)}]*v\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} b_i(t)|g|_{-[(s+1)/2]+2,t}|v|_{-[s/2]-1,t} \quad \forall g,v\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

где $b_i(t)=(i/(\rho e))^i c_i(t)$, $c_1(t)=|p''(t)|$ и $c_2(t)=(p'(t))^2$. Аналогично проверяются неравенства (8) при $3\le j\le[(s+1)/2], s>0$. Неравенство (8) для $s=2k+1>0$ не выполняется при $j=1$, хотя в силу $\varepsilon_{2k}>0$ можно доказать выполнимость (8) для $s=2k>0$ при $j=1$, но (8) для $\forall s>0$ выполняется при $j=2$ с другой правой частью из условия IV. Согласно (58), для всех $A_s(t)$, $s>0$, t и $g,v\in L_2(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство (10):

$$|\langle(dA_s(t)/dt)(dA_0^{-1}(t)/dt)g,v\rangle| =$$

$$= (1-s/(2m)-\varepsilon_s)(p'(t))^2|\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/(2m)+\varepsilon_s)}\ln^2(1+|\xi|^2)F[g]],v\rangle| =$$

$$= (2\pi)^{-n}(1-s/(2m)-\varepsilon_s)(p'(t))^2|\langle(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/(2m)+\varepsilon_s)}\ln^2(1+|\xi|^2)F[g],F[v]\rangle| =$$

$$= (2\pi)^{-n}(1-s/(2m)-\varepsilon_s)(p'(t))^2\times$$

$$\times|\langle(1+|\xi|^2)^{-(p(t)/(2m))([(s-1)/2]+1+2m\varepsilon_s)}\ln^2(1+|\xi|^2)F[g],(1+|\xi|^2)^{-(p(t)/(2m))[s/2]}F[v]\rangle| \le$$

$$\le (2\pi)^{-n}(1-s/(2m)-\varepsilon_s)(2p'(t))^2(\rho e)^{-2}\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)[(s-1)/2]/(2m)}F[g]\|\times$$

$$\times\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)[s/2]/(2m)}F[v]\| = (1-s/(2m)-\varepsilon_s)(2p'(t))^2(\rho e)^{-2}|g|_{-[(s-1)/2],t}|v|_{-[s/2],t},$$

если $0<\rho\le\min\limits_{[0,T]}p(t)/(2m)$ в (54). Аналогично проверяется неравенство (9).

С помощью (57) осуществляется проверка $\forall t$ неравенств (11):

$$(-1)^k\,\mathrm{Re}\langle A_{2k}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g,g\rangle = -p'(t)\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)(k/m+\varepsilon_{2k})}\ln(1+|\xi|^2)F[g]],g\rangle =$$

$$= -\frac{p'(t)}{(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{-(p(t)/2)(k/m+\varepsilon_{2k})}\sqrt{\ln(1+|\xi|^2)}\,F[g]\|^2 \le$$

$$\le \frac{|p'(t)|}{\rho e(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{-(p(t)/2)(k/m+\varepsilon_{2k})+\rho/2}F[g]\|^2 \le \frac{|p'(t)|}{\rho e(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)k/(2m)}F[g]\|^2 =$$

$$= \frac{|p'(t)|}{\rho e}\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)k/(2m)}F[g]]\|^2 = \frac{|p'(t)|}{\rho e}|g|^2_{-k,t} \quad \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если в (54) показатель $0<\rho\le\varepsilon_{2k}\min\limits_{[0,T]}p(t)$, где $\varepsilon_{2k}>0$, $k>0$. Нетрудно убедиться в симметричности произведения $A_{2k+1}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)$ симметричных и, как оказывается, коммутирующих операторов $A_{2k+1}(t)$ и $dA_0^{-1}(t)/dt$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Выполнимость неравенств (12) следует из коммутируемости $A_{2k}(t)$, $k>0$, с $A_0(t)$, а выполнимость неравенств (13) – из коммутируемости $A_{2k+1}(t)$ с $A_0(t)$ и неравенств (6) при $s=2k+1$, $k\ge0$.

Проверим остальные предположения теоремы 2. Производная $A_0^{1-1/(2m)}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt) \in$ $\in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$ при $m>1$, так как $\forall t$

$$\|A_0^{1-1/(2m)}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g\|^2 = (p'(t))^2\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)/(2m)}\ln(1+|\xi|^2)F[g]]\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2(2\pi)^n}\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/(2m)+\rho}F[g]\|^2 \leq \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2(2\pi)^n}\|F[g]\|^2 = \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2}\|g\|^2 \quad \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если $0<\rho\leq \min\limits_{[0,T]} p(t)/(2m)$ в (54). Аналогично проверяется, что $A_0^{-1/(2m)}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)A_0(t)\in$ $\in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$ при $m>1$. В теореме 2 условие $A_0^{(m-j)/(2m)}(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j) \in$ $\in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$, $2\leq j\leq m-1$, очевидным образом вытекает из доказанных выше включений $A_s(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)\in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$, $2\leq j\leq [(s+1)/2]$, $s>0$, в IV$'$.

Множество $C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ содержится в $\hat{\mathcal{D}}^m$ [4, с. 18] и плотно в $L_2(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$ и, значит, $\hat{\mathcal{D}}^m$ плотны в $L_2(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$. Замыкаемость операторов $L_m(\lambda_m)$, соответствующих краевым задачам (1$'$), (2$'$), будет следовать из леммы 7, если еще показать, что $A_0^{1-j/(2m)}(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)\in$ $\in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$, $2\leq j\leq m-1$. При $j=1$ это уже доказано выше. Требуемое включение при $j=2$ $\forall t$ следует из неравенств

$$\left\|A_0^{1-1/m}(t)\frac{d^2A_0^{-1}(t)}{dt^2}g\right\|^2 = \|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)/m}\ln(1+|\xi|^2)\{p''(t)-(p'(t))^2\ln(1+|\xi|^2)\}F[g]]\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{2}{(2\pi)^n}\sum_{i=1}^{2} c_i^2(t)\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/m}\ln^i(1+|\xi|^2)F[g]\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{2}{(2\pi)^n}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{i}{\rho e}\right)^{2i} c_i^2(t)\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/m+\rho}F[g]\|^2 \leq \frac{2}{(2\pi)^n}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{i}{\rho e}\right)^{2i} c_i^2(t)\|F[g]\|^2 =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{i}{\rho e}\right)^{2i} c_i^2(t)\|g\|^2 \quad \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если $0<\rho\leq \min\limits_{[0,T]} p(t)/m$ в (54). Требуемые включения для оставшихся $3\leq j\leq m-1$ доказываются аналогично. Энергетические неравенства (51) соответствуют неравенствам (36).

Все предположения теоремы 2 выполняются. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Анализ приведенных доказательств показывает, что всем предположениям теоремы 2 удовлетворяют также операторы $a_s(t)A_s(t)$, полученные умножением операторов $A_s(t)$ краевых задач (1$'$), (2$'$), которые указаны в п. 5, на любые функции $a_s(t)\in C^{([s/2])}[0,T]$, $s>0$. В силу замечания 2 корректность краевых задач (1$'$), (2$'$) сохранится, если к левым частям уравнений (1$'$) прибавить младшие члены $\sum_{k=0}^{2m-1}\sum_{|\alpha(t)|\leq p_k(t)} b_{\alpha(t),k}(t,x)D_x^{\alpha(t)}D_t^k$, где $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_n(t))$, $|\alpha(t)|=\alpha_1(t)+\ldots+\alpha_n(t)$, $\alpha_i(t)\geq 0$, $p_k(t)\leq 2p(t)(1-(k+1)/(2m))$, $b_{\alpha(t),k}(t,x)\in C^{(0,|\alpha(t)|-p(t)(1-k/m))}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ для $0\leq k\leq m$ и $b_{\alpha(t),k}(t,x)\in C^{(k-m,|\alpha(t)|)}([0,T]\times$ $\times\mathbb{R}^n)$ для $m<k\leq 2m-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 258–267.
2. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873–886.
3. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
19.03.2004 г.