

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.5

## О ПРАВИЛЬНЫХ И ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА–ФАУЛера

© 2005 г. А. Л. Гладков, Н. Л. Слепченков

**1. Введение.** Будем рассматривать уравнение

$$u^{(n)}(r) = k(r)f(u), \quad n \geq 2, \quad (1.1)$$

где  $r > 0$ ,  $k(r)$  – неотрицательная локально интегрируемая по Лебегу функция, отличная от нуля на множестве положительной меры,  $f(u)$  – положительная непрерывная функция, с областью определения  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$  или  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ . Здесь  $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$ . Под правильными решениями уравнения (1.1) будем понимать решения, бесконечно продолжимые вправо.

Для уравнения (1.1) изучается задача существования правильных решений, начальные данные которых удовлетворяют неравенствам

$$u^{(i)}(0) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad \sum_{i=0}^{n-1} u^{(i)}(0) > 0 \quad \text{при } \text{dom } f = \mathbf{R}_+, \quad (1.2)$$

$$u^{(n-1)}(0) \geq 0 \quad \text{при } \text{dom } f = \mathbf{R}. \quad (1.3)$$

В работе [1] показано, что для определенного класса функций  $f(u)$  одним из основных условий существования правильных решений уравнения (1.1) является выполнение неравенства

$$\int_0^{\infty} k(s)f(cs^{n-1}) ds < \infty, \quad (1.4)$$

где  $c$  – некоторая положительная константа.

Уравнение (1.1) является обобщением известного уравнения Эмдена–Фаулера

$$u^{(n)} = p(t)|u|^\lambda \text{sign } u, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 1, \quad n \geq 2. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) изучалось в ряде работ (см., например, обзорную статью [2] и приведенную в ней библиографию). В частности, в [3, теорема 16.9] доказано существование правильных решений уравнения (1.5) с локально интегрируемой по Лебегу функцией  $p(t)$ , удовлетворяющей неравенству

$$\int_a^{+\infty} t^{\lambda(n-1)}|p(t)| dt < +\infty,$$

где  $a$  – некоторая положительная постоянная. В [4] получены некоторые достаточные условия отсутствия правильных решений уравнения (1.5) с кусочно-непрерывной функцией  $p(t)$ . В работе [5] для уравнения (1.5) с  $n = 2$  установлено более общее, чем в [4], утверждение об отсутствии неограниченных правильных решений. В частности, из этого утверждения следует отсутствие неограниченных правильных решений уравнения (1.5) с функцией  $p(t) = ct^{-\lambda-1} \ln^\gamma t$ ,  $\gamma > -1$ ,  $c > 0$ .

В работе [6] для уравнения (1.5), где  $p(t)$  – неотрицательная локально интегрируемая по Лебегу функция, отличная от нуля на множестве положительной меры в любой окрестности  $+\infty$ , изучалась проблема существования быстрорастущих решений, т.е. решений уравнения (1.5) с условиями

$$u^{(i)}(t) > 0 \quad (\text{или } u^{(i)}(t) < 0), \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad t \geq a, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |u^{(n-1)}(t)| = +\infty. \quad (1.6)$$

В работе [6] получен ряд признаков отсутствия решений задачи (1.5), (1.6). В частности, доказано, что если коэффициент  $p(t)$  удовлетворяет соотношениям

$$p(t) < ct^{-(n-1)\lambda-1}, \quad t > a, \quad \int_a^{+\infty} p(\tau)\tau^{(n-1)\lambda} d\tau = +\infty \quad (1.7)$$

для некоторых  $c > 0$  и  $a > 0$ , то задача (1.5), (1.6) не имеет решений.

Основной целью настоящей работы является вывод достаточных условий отсутствия правильных решений уравнения (1.1) с начальными данными (1.2) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$  и с начальными данными (1.3) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ .

**2. Условия отсутствия правильных решений.** Введем вспомогательную функцию

$$J_h(\beta) = \int_{\beta}^{+\infty} \left( \int_{\beta}^v (v-u)^{n-2} h(u) du \right)^{-1/n} dv, \quad \beta > 0.$$

**Лемма 2.1.** Пусть для положительной непрерывной функции  $h(u)$  выполняются условия

$$h(u) \text{ не убывает при } u \geq u_0 \text{ для достаточно большого } u_0, \quad (2.1)$$

$$J_h(1) < +\infty. \quad (2.2)$$

Тогда функция  $J_h(\beta)$  не возрастает при  $\beta \geq \beta_0$  для достаточно большого  $\beta_0 > 0$  и  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} J_h(\beta) = 0$ .

**Доказательство.** Из условий (2.1), (2.2) следует, что

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = +\infty. \quad (2.3)$$

После преобразования  $J_h(\beta)$  с помощью замены переменных интегрирования  $u = y + \beta$  и  $v = z + \beta$  получаем

$$J_h(\beta) = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^z (z-y)^{n-2} h(y+\beta) dy \right)^{-1/n} dz.$$

Из этого представления и из (2.1) вытекает, что для достаточно большого  $\beta_0$  функция  $J_h(\beta)$  не возрастает при  $\beta \geq \beta_0$ .

Используя теорему Лебега и соотношение (2.3), получаем

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} J_h(\beta) = \int_0^{\infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \int_0^z (z-y)^{n-2} h(y+\beta) dy \right)^{-1/n} dz = 0.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.2.** Пусть  $u(r)$  – решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$  или с начальными условиями (1.3) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ . Тогда найдется такая положительная константа  $a$ , что  $u^{(i)}(r) > 0$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $r > a$ .

**Доказательство.** Пусть  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$ . В силу условий (1.2) в некоторой правой окрестности нуля  $u(r) > 0$ . Покажем, что  $u(r) > 0$  при любом  $r > 0$ .

Пусть это утверждение неверно, т.е. существует  $r_*$  такое, что  $u(r) > 0$  при  $0 < r < r_*$ , а  $u(r_*) = 0$ . Проинтегрируем уравнение (1.1) последовательно  $n$  раз на отрезке  $[0, r_*]$ . Учитывая начальные данные (1.2), находим, что

$$u(r_*) = \sum_{p=0}^{n-1} u^{(p)}(0) \frac{r_*^p}{p!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{r_*} (r_*-s)^{n-1} k(s) f(u(s)) ds > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что  $u(r) > 0$  при  $r > 0$ . Исходя из представления

$$u^{(i)}(r) = \sum_{p=0}^{n-1-i} u^{(p+i)}(0) \frac{r^p}{p!} + \frac{1}{(n-1-i)!} \int_0^r (r-s)^{n-i-1} k(s) f(u(s)) ds, \quad 0 \leq i \leq n,$$

выводим, что  $u^{(i)}(r) > 0$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $r > a$  для некоторого значения  $a$ .

Пусть  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ . Проинтегрируем (1.1) по отрезку  $[0, r]$ , учитывая неравенство (1.3):

$$u^{(n-1)}(r) \geq \int_0^r k(s) f(u(s)) ds.$$

Из этого соотношения вытекает существование положительных  $u_0$  и  $R$  таких, что  $u^{(n-1)}(r) > u_0$  при  $r \geq R$ . Повторяя процесс интегрирования по отрезку  $[R, r]$ , нетрудно убедиться в том, что выполнены неравенства

$$u^{(i)}(r) \geq \sum_{p=0}^{n-2-i} \frac{u^{(p+i)}(R)}{p!} (r-R)^p + \frac{u_0}{(n-1-i)!} (r-R)^{n-1-i}, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Таким образом, найдется такое значение  $a$ , что  $u^{(i)}(r) > 0$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $r > a$ . Лемма доказана.

В следующих двух утверждениях используются некоторые идеи из работы [7].

**Теорема 2.1.** Пусть функции  $k(r)$  и  $f(u)$  удовлетворяют условиям

$$f(uv) \geq C_f \bar{f}(u) \bar{f}(v) \quad \text{для всех достаточно больших } u > 0 \text{ и } v > 0, \quad (2.4)$$

$$\int_0^{+\infty} k(s) \bar{f}(cs^{n-1}) ds = +\infty \quad \text{для всех } c > 0, \quad (2.5)$$

$$k(r) \text{ не возрастает при } r > R_0 \text{ для некоторого } R_0, \quad (2.6)$$

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} k(r) r \bar{f}(b_0 r^{n-1}) > 0 \quad (2.7)$$

с некоторыми положительными постоянными  $C_f$ ,  $b_0$  и с некоторой положительной непрерывной функцией  $\bar{f}(u)$ , удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.2) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$  и с начальными данными (1.3) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ .

**Доказательство.** Из леммы 2.2 вытекает существование  $c_1 > 0$  и  $R_1^* > 0$  таких, что  $u^{(n-1)}(R_1^*) > 2c_1$ . Применяя процесс интегрирования и выбирая подходящее  $R_1 > R_1^*$ , нетрудно убедиться в том, что для  $r > R_1$  выполнены неравенства

$$u^{(i)}(r) \geq \frac{c_1}{(n-1-i)!} r^{n-1-i} + \frac{1}{(n-1-i)!} \int_{R_1}^r (r-s)^{n-1-i} k(s) f(u(s)) ds, \quad (2.8)$$

где  $0 \leq i \leq n-1$ . Отсюда следует, в частности, что  $u(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Покажем, что для достаточно больших  $r$

$$u(r) \geq C_1 r^{n-1} \int_{R_2}^{r/2} k(s) \bar{f}(C_2 s^{n-1}) ds, \quad (2.9)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $R_2$  – некоторые положительные константы. В силу выполнения для функции  $f(u)$  условия (2.4) можно выбрать  $C_3$  и  $R_2 > R_1$  так, чтобы функция  $f(u(r)) \geq C_f \bar{f}(C_3) \bar{f}(u(r)/C_3)$  и функция  $\bar{f}(u(r)/C_3)$  не убывала по  $u$  при  $u(r) > c_1 R_2^{n-1}/(n-1)!$ . Тогда из неравенств (2.8) при  $r > 2R_2$  имеем

$$\begin{aligned} ((n-1)!)u(r) &\geq \int_{R_2}^r (r-s)^{n-1} k(s) f(u(s)) ds \geq \int_{R_2}^{r/2} (r-r/2)^{n-1} k(s) f(u(s)) ds \geq \\ &\geq \frac{C_f \bar{f}(C_3)}{2^{n-1}} r^{n-1} \int_{R_2}^{r/2} k(s) \bar{f}\left(\frac{c_1 s^{n-1}}{(n-1)!C_3}\right) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, при подходящем выборе  $C_1$  и  $C_2$  получаем неравенство (2.9).

Далее, возьмем  $R > \max\{R_0, 2R_2\}$  и  $r > R$ . Проинтегрируем уравнение (1.1) по отрезку  $[R, r]$ , предварительно умножив его на  $u'(r)$ :

$$\int_R^r u^{(n)}(s) u'(s) ds = \int_R^r k(s) f(u(s)) u'(s) ds. \quad (2.10)$$

Преобразуем (2.10), воспользовавшись формулой интегрирования по частям, леммой 2.2 и свойством (2.6) функции  $k(r)$ :

$$u^{(n-1)}(r) u'(r) \geq k(r) \int_{u(R)}^{u(r)} f(u) du.$$

После умножения последнего неравенства на  $u'(r)$  и интегрирования по отрезку  $[R, r]$  находим, что

$$u^{(n-2)}(r) (u'(r))^2 \geq k(r) \int_{u(R)}^{u(r)} (u(r) - v) f(v) dv.$$

Повторяя этот процесс требуемое количество раз, получаем

$$\left( \int_{u(R)}^{u(r)} (u(r) - v)^{n-2} f(v) dv \right)^{-1/n} u'(r) \geq ((n-2)!)^{-1/n} (k(r))^{1/n}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по отрезку  $[R, r]$ :

$$\int_{u(R)}^{u(r)} \left( \int_{u(R)}^v (v-u)^{n-2} f(u) du \right)^{-1/n} dv \geq ((n-2)!)^{-1/n} \int_R^r (k(s))^{1/n} ds. \quad (2.11)$$

Положим  $\gamma(R) \equiv u(R)/(b_0(2R)^{n-1})$ . Из неравенства (2.9) и условия (2.5) следует, что  $\gamma(R) \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow +\infty$ .

Для оценки сверху левой части неравенства (2.11) последовательно используем замену переменной  $u = b_0(2R)^{n-1}y$ , неравенство (2.4) и затем еще одну замену переменной  $v = b_0(2R)^{n-1}z$ . В результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\int_{u(R)}^{u(r)} \left( \int_{u(R)}^v (v-u)^{n-2} f(u) du \right)^{-1/n} dv \leq \\ &\leq \left( \frac{b_0(2R)^{n-1}}{C_f \bar{f}(b_0(2R)^{n-1})} \right)^{1/n} \int_{\gamma(R)}^{+\infty} \left( \int_{\gamma(R)}^z (z-y)^{n-2} \bar{f}(y) dy \right)^{-1/n} dz. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Полагая  $r = 2R$ , из неравенств (2.11), (2.12) с использованием свойства (2.6) получаем

$$J_{\bar{f}}(\gamma(R)) \geq C_4(2R k(2R) \bar{f}(b_0(2R)^{n-1}))^{1/n},$$

где  $C_4$  – некоторая положительная постоянная. Применяя неравенство (2.7), откуда при подходящем выборе  $R = R_j$ ,  $R_j \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow \infty$ , выводим оценку  $J_{\bar{f}}(\gamma(R)) \geq C_5 > 0$ . Но из леммы 2.1 следует, что  $J_{\bar{f}}(\gamma(R)) \rightarrow 0$  при  $\gamma(R) \rightarrow \infty$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

**Теорема 2.2.** Пусть функции  $k(r)$  и  $f(u)$  удовлетворяют условиям (2.4), (2.5) и соотношению

$$k(r) \leq \frac{C_0}{r\bar{f}(c_0r^{n-1})}, \quad r \geq R_0, \tag{2.13}$$

с некоторыми положительными постоянными  $C_0$ ,  $c_0$  и  $R_0$  и с некоторой положительной непрерывной функцией  $\bar{f}(u)$ , удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.2) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$  и с начальными данными (1.3) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ .

**Доказательство.** Пусть задача (1.1) имеет правильное решение с начальными условиями (1.2) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$  или с начальными условиями (1.3) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ . Из (2.5), (2.8) и (2.9) следует, что

$$u(r) \geq \bar{c}r^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{R_1}^r (r-s)^{n-1} k(s) f(u(s)) ds, \quad r \geq R_1, \quad \frac{u(r)}{r^{n-1}} \rightarrow +\infty \quad \text{при } r \rightarrow +\infty,$$

где  $\bar{c} = c_1/(n-1)!$ . Далее, обозначим  $v(r) = u(r)/(c_0r^{n-1})$ . Тогда с помощью (2.1), (2.4) получим

$$v(r) \geq c_2 + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{R_2}^r \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s) \bar{f}(c_0s^{n-1}) \bar{f}(v(s)) ds, \tag{2.14}$$

где  $c_2 = \bar{c}/c_0$ ,  $r \geq R_2$ ,  $R_2 \geq \max\{R_0, R_1\}$ .

Построим при  $r \geq R_0$  неотрицательную кусочно-непрерывную локально ограниченную функцию  $k^*(r)$ , непрерывную на любом интервале  $(iR_0, (i+1)R_0)$ ,  $i \in \mathbf{N}$ . Кроме этого, функция  $k^*(r)$  должна удовлетворять условиям

$$\int_{R_0}^{\infty} k^*(s) \bar{f}(c_0s^{n-1}) ds = \infty, \tag{2.15}$$

$$\frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{R_0}^r \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} |k^*(s) - k(s)| \bar{f}(c_0s^{n-1}) \bar{f}(v(s)) ds < \frac{c_2}{2} \tag{2.16}$$

для всех  $r > R_0$ . Для удобства обозначим  $f^*(r) \equiv \bar{f}(c_0r^{n-1}) \bar{f}(v(r))$ .

Возьмем произвольные положительные  $\delta$  и  $\varepsilon$ . Построим  $k^*(s)$  сначала на  $(R_0, 2R_0)$ . По теореме Лузина для любого положительного  $\delta_1 < \delta$  найдется непрерывная на  $(R_0, 2R_0)$  функция  $k^*(r)$ , для которой выполняются неравенства (2.13) и  $\mu(\{r \in (R_0, 2R_0) : k^*(r) \neq k(r)\}) < \delta_1$ . Здесь и далее через  $\mu(\Omega)$  обозначается лебегова мера множества  $\Omega$ . Очевидно, что

$$\int_{R_0}^{2R_0} |k^*(s) - k(s)| f^*(s) ds \leq C_0 \delta_1 \max_{r \in [R_0, 2R_0]} \bar{f}(v(r)) < \varepsilon$$

при подходящем выборе  $\delta_1$ .

При аналогичном построении  $k^*(r)$  на  $(iR_0, (i+1)R_0)$ ,  $i \in \mathbf{N}$ ,  $i \geq 2$ , добиваемся выполнения неравенств

$$\int_{(iR_0, (i+1)R_0)} |k^*(s) - k(s)| f^*(s) ds < \varepsilon^i, \quad \mu(\{r \in (iR_0, (i+1)R_0) : k^*(r) \neq k(r)\}) < \delta^i,$$

из которых следует, что

$$\int_{R_0}^{\infty} |k^*(s) - k(s)| f^*(s) ds < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad \mu(\{r \geq R_0 : k^*(r) \neq k(r)\}) < \frac{\delta}{1 - \delta}. \quad (2.17)$$

Таким образом, при подходящем значении  $\varepsilon$  выполняется неравенство (2.16). Так как функция  $v(r) \geq c_2$  при  $r \geq R_2$ , то  $\bar{f}(v(r)) \geq c_3 > 0$  при  $r \geq R_2$ . Из (2.17) получаем

$$\int_{R_2}^{\infty} |k^*(s) - k(s)| \bar{f}(c_0 s^{n-1}) ds < \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)c_3},$$

и, следовательно, выполняется равенство (2.15).

Очевидно, что по  $k^*(r)$  можно построить неотрицательную непрерывную при  $r \geq R_2$  функцию  $\bar{k}(r)$  с сохранением свойств (2.13), (2.15) и (2.16). Поэтому из (2.14) следует неравенство

$$v(r) \geq c_* + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{R_2}^r \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1}) \bar{f}(v(s)) ds, \quad (2.18)$$

где  $c_* = c_2/2$ .

Так как  $\bar{k}(r)$  является непрерывной функцией, то  $\mathbf{A}(R, r) \equiv \{s \in (R, r) : \bar{k}(s) > 0\}$  и  $\mathbf{A}(R, \infty) \equiv \{s \in (R, \infty) : \bar{k}(s) > 0\}$  суть множества, состоящие из объединения конечно-го или счетного числа непересекающихся интервалов. По множествам  $\mathbf{A}(R, r) = \bigcup_i (a_i, b_i)$  и  $\mathbf{A}(R, \infty) = \bigcup_i (\bar{a}_i, \bar{b}_i)$  определим вспомогательные множества  $\mathbf{A}[R, r) = \bigcup_i [a_i, b_i)$  и  $\mathbf{A}[R, \infty) = \bigcup_i [\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ .

Для  $r \in \mathbf{A}[R_0, \infty)$  положим

$$h(r) = \int_{\mathbf{A}[R_0, r)} \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1}) ds. \quad (2.19)$$

Очевидно, что  $h : \mathbf{A}[R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  является взаимно-однозначным отображением. Следовательно, существует обратная  $h$  функция  $g$ . Пусть  $t = h(r)$ ,  $\tau = h(s)$ ,  $v(g(t)) = w(t)$ . Тогда из (2.18) и (2.19) получим

$$\begin{aligned} w(t) &\geq c_* + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{\mathbf{A}[R_2, g(t))} \left(1 - \frac{s}{g(t)}\right)^{n-1} \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1}) \bar{f}(v(s)) ds = \\ &= c_* + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{h(R_2)}^t \left(1 - \frac{g(\tau)}{g(t)}\right)^{n-1} \bar{f}(w(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Функция  $h(r)/r$  является монотонно убывающей на множестве  $\mathbf{A}[R_3, \infty)$  при достаточно большом значении  $R_3 > R_2$ . Действительно, определим вспомогательную функцию  $h^*(r)$  следующим образом:  $h^*(r) = \int_{R_0}^r \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1}) ds$ . В силу (2.13), (2.15) и определения функции  $h^*(r)$  имеем

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{h^*(r)}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \left( r \bar{k}(r) \bar{f}(c_0 r^{n-1}) - \int_{R_0}^r \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1}) ds \right) < 0$$

для достаточно больших значений  $r \geq R_3$ ,  $R_3 \geq R_2$ . Так как функция  $h^*(r)/r$  убывает на множестве  $[R_3, \infty)$ , то и функция  $h(r)/r$  убывает на множестве  $\mathbf{A}[R_3, \infty)$ .

Таким образом, для функции  $g(t)$  справедливо неравенство  $g(\tau)/g(t) \leq \tau/t$ ,  $t \geq \tau \geq h(R_3)$ , в силу которого неравенство (2.20) примет вид

$$w(t) \geq c_* + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{h(R_3)}^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-1} \bar{f}(w(\tau)) d\tau. \tag{2.21}$$

Несложно видеть, что  $w(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Будем рассматривать неравенство (2.21) на отрезке  $T \leq t \leq 2T$ ,  $T > h(R_3)$ . Тогда из (2.21) получим

$$w(t) \geq \beta + \frac{1}{c_0(2T)^{n-1}} \frac{C_f}{(n-1)!} \int_T^t (t-\tau)^{n-1} \bar{f}(w(\tau)) d\tau. \tag{2.22}$$

Здесь

$$\beta = c_* + \frac{1}{c_0(2T)^{n-1}} \frac{C_f}{(n-1)!} \int_{h(R_3)}^T (t-\tau)^{n-1} \bar{f}(w(\tau)) d\tau.$$

Очевидно, что  $\beta \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow \infty$ .

Для того чтобы перейти к дифференциальному уравнению, введем функцию  $z(t)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$z(t) = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{c_0(2T)^{n-1}} \frac{C_f}{(n-1)!} \int_T^t (t-\tau)^{n-1} \bar{f}(z(\tau)) d\tau. \tag{2.23}$$

Покажем, что  $w(t) > z(t)$  для всех  $T \leq t \leq 2T$ . Действительно, так как  $w(T) \geq \beta > \beta/2 = z(T)$ , то существует правая полукрестность точки  $T$  такая, что в ней  $w > z$ . Пусть существует точка  $T_0$  такая, что  $w(t) > z(t)$ ,  $T \leq t < T_0$ ,

$$w(T_0) = z(T_0). \tag{2.24}$$

Однако из соотношений (2.22) и (2.23) при достаточно больших значениях  $T$  имеем

$$w(T_0) - z(T_0) \geq \frac{\beta}{2} + \frac{1}{c_0(2T)^{n-1}} \frac{C_f}{(n-1)!} \int_T^{T_0} (T_0 - \tau)^{n-1} (\bar{f}(w(\tau)) - \bar{f}(z(\tau))) d\tau \geq \frac{\beta}{2} > 0,$$

что противоречит равенству (2.24).

Из уравнения (2.23) для  $z(t)$  находим

$$z^{(n)}(t) = \frac{C_f}{c_0(2T)^{n-1}} \bar{f}(z(t)), \quad z(T) = \frac{\beta}{2}, \quad z^{(i)}(T) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Применяя рассуждения, подобные тем, которые использовались в теореме 2.1, получаем

$$J_{\bar{f}}(z(T)) \geq \left[ \frac{C_f}{c_0(2T)^{n-1}(n-2)!} \right]^{1/n} \int_T^t d\tau.$$

Полагая здесь  $t = 2T$ , приходим к неравенству  $J_{\bar{f}}(z(T)) \geq C_6 T^{1/n}$ , где положительная константа  $C_6$  не зависит от  $T$ . Это противоречит произвольности  $T$ . Следовательно, начиная с некоторого  $T$ , функция  $z(t)$  непродолжима, а значит, и  $w(t)$  непродолжима. Полученное противоречие доказывает теорему.

**Замечание 2.1.** Отметим, что в случае  $\bar{f}(u) = f(u) = u^\lambda$ ,  $\lambda > 1$ , из (2.13) получается неравенство (1.7). Следует отметить также, что при доказательстве теоремы 2.2 был использован метод, отличный от метода доказательства работы [6].

**Следствие 2.1.** Пусть функции  $k(r)$  и  $f(u)$  удовлетворяют условиям (2.4)–(2.6) с некоторой положительной непрерывной функцией  $\bar{f}(u)$ , удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.2) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$  и с начальными данными (1.3) в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ .

**Доказательство.** Следствие очевидно, так как выполнены условия теоремы 2.1 или теоремы 2.2.

**Замечание 2.2.** Для частного вида функции  $f(u)$  можно очевидным образом получить широкий класс функций  $k(r)$ , при которых отсутствуют правильные решения уравнения (1.1) с соответствующими начальными данными. Пусть  $g(u)$  – произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству  $g(u) \geq b > 0$ . Тогда, например, для  $f(u) = u^\lambda g(u)$ ,  $\lambda > 1$ , при  $k(r) \geq C_7 / \{r^{\lambda(n-1)+1} (\ln r) (\ln \ln r) \dots (\ln \dots \ln r)\}$ ,  $C_7 > 0$ ,  $r \geq r_1 > 0$ , уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.2) (см. также [2, 6]), а для  $f(u) = g(u) \exp(\alpha u)$ ,  $\alpha > 0$ , при  $k(r) \geq C_8 / \exp(\beta r^\gamma)$ ,  $C_8 > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma < n - 1$ ,  $r \geq r_2 > 0$ , уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.3). Отметим также, что условия (2.1), (2.2), (2.4) выполнены для  $f(u) = g(u) u \ln^{2\sigma}(u + 1)$ ,  $\sigma > n$ , с  $\bar{f}(u) = u \ln^\sigma(u + 1)$ .

**3. Контрпример к необходимости условия (1.4).** Условие (1.4) теоремы существования является достаточным, но без дополнительных ограничений не является необходимым для существования правильных решений задач (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3). В работе [4] для  $f(u) = u^\lambda$ ,  $\lambda > 1$ , приведен пример функции  $k(r)$ , обладающей свойством (2.5) и такой, что уравнение (1.1) имеет бесконечно много правильных решений с начальными данными (1.2). Аналогичный пример указан в [8] для случая  $n = 2$ .

Модифицировав метод работы [8], построим для некоторого класса функций  $f(u)$  гладкую функцию  $k(r)$ , удовлетворяющую условию (2.5), с которой уравнение (1.1) будет иметь бесконечно много правильных решений с начальными данными (1.2). Кроме того, построенное нами решение будет также демонстрировать оптимальность дополнительного к (2.5) условия отсутствия правильных решений (2.13).

В этом пункте будем предполагать, что функция  $f(u)$  удовлетворяет условиям

$$f(u) \text{ не убывает для достаточно больших значений } u, \quad (3.1)$$

$$f(cu) \leq \varphi(c)f(u) \text{ для всех достаточно больших } u > 0 \text{ и } c > 0, \quad (3.2)$$

где  $\varphi(c)$  – положительная непрерывная функция.

Будем считать, что  $g(r)$  – произвольная положительная неубывающая непрерывная функция такая, что  $g(r) \rightarrow \infty$  и  $g(r)/r \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\{a_i\}_{i=1}^\infty$  и  $\{r_i\}_{i=1}^\infty$  – последовательности, обладающие следующими свойствами:

$$a_1 = 2\alpha, \quad a_{i+1} = a_i + 2\varphi(a_i), \quad (3.3)$$

$$r_1 > \beta, \quad \left(1 - \frac{r_i}{\bar{r}_i}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2} \frac{a_i}{\varphi(a_i)}, \quad (3.4)$$

$$g(r_i) \geq 4(n-1)!, \quad \bar{r}_i < r_{i+1}, \quad (3.5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые достаточно большие положительные постоянные, а  $\bar{r}_i \equiv r_i + 4(n-1)!r_i[g(r_i)]^{-1}$ , и через  $k(r)$  обозначим гладкую функцию, удовлетворяющую соотношениям

$$0 \leq k(r) \leq \frac{g(r)}{rf(c_0 r^{n-1})} \text{ при } r_i \leq r < \bar{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

$$k(r) = 0 \text{ при } 0 \leq r < r_i \text{ и } \bar{r}_i \leq r < r_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{r_i}^{r_{i+1}} k(s)f(c_0s^{n-1}) ds = 1, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{3.8}$$

где  $c_0$  – произвольная положительная постоянная.

Пусть  $w(r)$  – кусочно-непрерывная функция, определяемая явной формулой

$$w(r) = \begin{cases} (1/2)a_1 & \text{при } 0 \leq r < r_1, \\ a_i c_0 r^{n-1} & \text{при } r_i \leq r < \bar{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \\ (1/2)a_{i+1} c_0 r^{n-1} & \text{при } \bar{r}_i \leq r < r_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3.9}$$

Введем обозначение

$$Tu = \alpha + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^r \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)f(u(s)) ds. \tag{3.10}$$

**Лемма 3.1.** Пусть функция  $f(u)$  обладает свойствами (3.1), (3.2) и функция  $u(r)$  удовлетворяет неравенствам

$$\alpha \leq u(r) \leq w(r). \tag{3.11}$$

Тогда  $Tu(r) \leq w(r)$ .

**Доказательство.** Пусть сначала  $0 \leq r \leq r_1$ . Вследствие (3.7), (3.9) и (3.10)  $Tu(r) = \alpha \leq w(r)$ .

Предположим теперь, что  $r_i \leq r < \bar{r}_i$ . Используя (3.1)–(3.10), находим

$$\begin{aligned} Tu &= \frac{1}{2}a_1 + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^{i-1} \int_{r_j}^{\bar{r}_j} \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)f(u(s)) ds + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \int_{r_i}^r \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)f(u(s)) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2}a_1 + r^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \varphi(a_j) + \varphi(a_i) \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 - \frac{r_i}{\bar{r}_i}\right)^{n-1} \int_{r_i}^{\bar{r}_i} k(s)f(c_0s^{n-1}) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2}a_i r^{n-1} + \varphi(a_i) \left(1 - \frac{r_i}{\bar{r}_i}\right)^{n-1} r^{n-1} \leq \frac{1}{2}a_i r^{n-1} + \varphi(a_i) \frac{1}{2} \frac{a_i}{\varphi(a_i)} r^{n-1} = a_i r^{n-1} = w(r). \end{aligned}$$

При  $\bar{r}_i \leq r < r_{i+1}$  получим

$$Tu = \frac{1}{2}a_1 + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^i \int_{r_j}^{\bar{r}_j} \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)f(u(s)) ds \leq \frac{1}{2}a_1 + r^{n-1} \sum_{j=1}^i \varphi(a_j) = \frac{1}{2}a_{i+1} r^{n-1} = w(r).$$

Лемма доказана.

С помощью теоремы Шаудера–Тихонова о неподвижной точке аналогично тому, как это сделано в работе [8], теперь несложно завершить доказательство следующей теоремы.

**Теорема 3.1.** Пусть функция  $f(u)$  удовлетворяет условиям (3.1), (3.2),  $k(r)$  – гладкая функция, удовлетворяющая соотношениям (3.6)–(3.8). Тогда для функции  $k(r)$  выполняется условие (2.5) и уравнение (1.1) имеет бесконечно много правильных положительных решений, удовлетворяющих неравенствам (1.2) и (3.11).

**Замечание 3.1.** Построенный пример показывает оптимальность условия (2.13) для определенного класса функций  $f(u)$ . В частности, несложно проверить, что неравенства (3.1), (3.2) справедливы для  $f(u) = u^\lambda$ ,  $\lambda > 1$ , например с  $\varphi(c) = c^\lambda$ . Таким образом, как следует из (3.6), условие (1.7) является оптимальным для отсутствия правильных решений задачи (1.5), (1.2).

**4. Условия отсутствия целых решений.** В этом пункте будем рассматривать целые решения уравнения (1.1) при  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbf{N}$ . Под целыми решениями уравнения (1.1) будем понимать функции, удовлетворяющие уравнению (1.1) в  $\mathbf{R}$ . Относительно функций  $k(r)$ ,  $r \in \mathbf{R}$ , и  $f(u)$  делаются те же предположения, что и во введении.

Определим среднюю для  $u(r)$  функцию  $\bar{u}(r) = (u(r) + u(-r))/2$ ,  $r \geq 0$ , и вспомогательную функцию  $\bar{k}(r) = \min\{k(r), k(-r)\}$ ,  $r \geq 0$ .

С помощью определений средней и вогнутой функций несложно доказывается

**Лемма 4.1.** Пусть

$$f(u) \text{ вогнута в области определения.} \quad (4.1)$$

Тогда если  $u(x)$  – целое решение уравнения (1.1), то его средняя функция  $\bar{u}(r)$  удовлетворяет следующим соотношениям:  $\bar{u}^{(2m)}(r) \geq \bar{k}(r)f(\bar{u}(r))$ ,  $\bar{u}^{(2i)}(0) = u^{(2i)}(0)$ ,  $\bar{u}^{(2i+1)}(0) = 0$ ,  $0 \leq i \leq m - 1$ .

С помощью лемм 2.1, 4.1 аналогично тому, как это сделано в теоремах 2.1, 2.2 и в следствии 2.1, выводим следующие результаты.

**Теорема 4.1.** Пусть в уравнении (1.1)  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , выполнены условия (2.4), (4.1) и

$$\int_0^{+\infty} \bar{k}(s)\bar{f}(cs^{n-1}) ds = +\infty \text{ для всех } c > 0, \quad (4.2)$$

$\bar{k}(r) \leq C_0/(r\bar{f}(c_0r^{n-1}))$ ,  $r \geq R_0$ , с некоторыми положительными постоянными  $C_0$ ,  $c_0$  и  $R_0$  и с некоторой положительной непрерывной функцией  $\bar{f}(u)$ , удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет целых решений в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}$  и целых положительных решений в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$ .

**Теорема 4.2.** Пусть в уравнении (1.1)  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbf{N}$ ,  $f(u)$  обладает свойством (4.1),  $\bar{k}(r)$  не возрастает при  $r > R_0$  для некоторого  $R_0$ , и выполнены условия (2.4), (4.2) с некоторой положительной непрерывной функцией  $\bar{f}(u)$ , удовлетворяющей (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет целых решений в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}$  и целых положительных решений в случае  $\text{dom } f = \mathbf{R}_+$ .

**Замечание 4.1.** В работе [7] для уравнения (1.1) с  $f(u) = \exp(2u)$  и  $n = 2$  установлено отсутствие целых решений с функцией  $\bar{k}(r)$ , удовлетворяющей неравенству  $\bar{k}(r) \geq C_9/r^\alpha$  при  $r \geq r_3 > 0$  и некоторых положительных  $C_9$  и  $\alpha$ . Из теоремы 4.2, в частности, следует отсутствие целых решений для этого же уравнения с функцией  $\bar{k}(r)$ , удовлетворяющей неравенству  $\bar{k}(r) \geq C_{10}/\exp(\beta r^\gamma)$ , где  $C_{10} > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma < 1$ ,  $r \geq r_4 > 0$ .

**Замечание 4.2.** Все результаты об отсутствии правильных и целых решений, полученные в теоремах 2.1, 2.2, 4.1, 4.2 и следствии 2.1, будут верны и для неравенства  $u^{(n)}(r) \geq k(r)f(u)$ ,  $n \geq 2$ , где функции  $k(r)$  и  $f(u)$  обладают свойствами, требуемыми соответствующими утверждениями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kiguradze I.T., Kvinikadze G.G. // Ann. Mat. Pura Appl. 1982. V. 130. P. 67–87.
2. Изобов Н.А., Рабцевич В.А. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 1999. Т. 2. С. 73–91.
3. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990.
4. Изобов Н.А. // Мат. заметки. 1984. Т. 35. Вып. 6. С. 829–839.
5. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 311–316.
6. Рабцевич В.А. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 678–683.
7. Cheng K.-S., Lin J.-T. // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 304. № 2. P. 639–668.
8. Lin J.-T., Cheng K.-S. // Chinese J. Math. 1987. V. 15. № 1. P. 43–59.

Витебский государственный университет

Поступила в редакцию  
12.05.2004 г.