О. М. Мартынов, Об относительных проекционных константах некоторых классов подпространств пространства l_∞^{2n}, *Функц. анализ и его прил.*, 2020, том 54, выпуск 4, 98–101

DOI: 10.4213/faa3755

УДК 513.88

Об относительных проекционных константах некоторых классов подпространств пространства l_∞^{2n}

© 2020. О. М. Мартынов

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3755

Пусть Y — замкнутое подпространство банахова пространства X. Линейный ограниченный оператор $\pi\colon X\to Y$ называется оператором проектирования (проекцией) пространства X на Y, если $\pi y=y$ для любого $y\in Y$. Множество всех операторов проектирования пространства X на подпространство Y будем обозначать через $\pi(X,Y)$. Относительной проекционной константой подпространства Y в пространстве X называется число $\lambda(X,Y)=\inf\{\|\pi\|,\ \pi\in\pi(X,Y)\}$. Среди операторов проектирования особый интерес представляют те, нормы которых совпадают с относительной проекционной константой. Если такие проекции существуют, то они называются минимальными.

Пусть Y_{2n-2} есть $(2n-2)$-мерное подпространство пространства $X=l_\infty^{2n}$, $2n$-мерного линейного нормированного пространства элементов $x=(x_i)_1^{2n}$ с нормой

$$\|x\|=\max_{1\leqslant i\leqslant 2n}|x_i|.$$

Известно [1], что любой оператор проектирования $\pi\colon l_\infty^{2n}\to Y_{2n-2}$ имеет вид

$$\pi_{\alpha,\beta}x=x-\alpha f(x)-\beta g(x),$$

где $\alpha\in l_\infty^{2n}$, $\beta\in l_\infty^{2n}$, f и g — линейные функционалы, определенные на l_∞^{2n}, причем

$$f(\alpha)=g(\beta)=1,\qquad f(\beta)=g(\alpha)=0. \tag{1}$$

Гиперплоскости пространства l_∞^{2n} имеют вид

$$f^{-1}(0)=\biggl\{x\in l_\infty^{2n}\biggm| f(x)=\sum_{i=1}^{2n}f_ix_i=0\biggr\},$$
$$g^{-1}(0)=\biggl\{x\in l_\infty^{2n}\biggm| g(x)=\sum_{i=1}^{2n}g_ix_i=0\biggr\},$$

а $Y_{2n-2}=f^{-1}(0)\cap g^{-1}(0)$.

Норма оператора π вычисляется по формуле

$$\|\pi\|=\max_{1\leqslant i\leqslant 2n}T_i,\quad \text{где } T_i=\sum_{j=1}^{2n}|\delta_{ij}-\alpha_if_j-\beta_ig_j|.$$

Найдем относительные проекционные константы некоторых классов подпространств коразмерности два пространства l_∞^{2n}.

Функционалы f и g зададим следующим образом:

$$f = (\underbrace{1,\dots,1}_{k},\underbrace{r,\dots,r}_{n-k},\underbrace{0,\dots,0}_{n}), \qquad g = (\underbrace{0,\dots,0}_{n},\underbrace{r,\dots,r}_{n-k},\underbrace{1,\dots,1}_{k}), \tag{2}$$

где $r > 0$, $n \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Тогда соотношения (1) примут вид

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + r \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i = 1, \qquad g(\alpha) = r \sum_{i=n+1}^{2n-k} \alpha_i + \sum_{i=2n-k+1}^{2n} \alpha_i = 0,$$
$$f(\beta) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i + r \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i = 0, \qquad g(\beta) = r \sum_{i=n+1}^{2n-k} \beta_i + \sum_{i=2n-k+1}^{2n} \beta_i = 1. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть $\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}$ — минимальный оператор проектирования пространства l_∞^{2n} на подпространство Y_{2n-2}, определяемое функционалами (2). Тогда*

(i) *если $2 \leqslant k \leqslant n-2$, то*

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = 1 + \frac{(a-2)(a-2r)}{k(a-2r) + (n-k)r(a-2)},$$

где $a = k + (n-k)r$;

(ii) *если $k = 1$, то*

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = 1, \quad \text{если } 0 < r \leqslant \frac{1}{n-1}$$

и

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = \frac{2(n-1)(n-2)r^2}{(n-1)^2r^2 - 2r + 1}, \quad \text{если } r > \frac{1}{n-1};$$

(iii) *если $k = n-1$, то*

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = 1, \quad \text{если } r \geqslant n-1$$

и

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}\| = \frac{2(n-1)(n-2)}{r^2 - 2r + (n-1)^2}, \quad \text{если } 0 < r < n-1.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Найдем значения $T_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{2n} |\delta_{ij} - \alpha_i^{(0)} f_j - \beta_i^{(0)} g_j|$ $(i = 1,\dots,2n)$. Имеем

$$T_1^{(0)} = |1 - \alpha_1^{(0)}| + (a-1)|\alpha_1^{(0)}| + a|\beta_1^{(0)}|, \dots,$$
$$T_k^{(0)} = |1 - \alpha_k^{(0)}| + (a-1)|\alpha_k^{(0)}| + a|\beta_k^{(0)}|,$$
$$T_{k+1}^{(0)} = |1 - r\alpha_{k+1}^{(0)}| + (a-r)|\alpha_{k+1}^{(0)}| + a|\beta_{k+1}^{(0)}|, \dots,$$
$$T_n^{(0)} = |1 - r\alpha_n^{(0)}| + (a-r)|\alpha_n^{(0)}| + a|\beta_n^{(0)}|,$$

$$
\begin{gathered}
T_{n+1}^{(0)} = a|\alpha_{n+1}^{(0)}| + |1 - r\beta_{n+1}^{(0)}| + (a-r)|\beta_{n+1}^{(0)}|, \dots, \\
T_{2n-k}^{(0)} = a|\alpha_{2n-k}^{(0)}| + |1 - r\beta_{2n-k}^{(0)}| + (a-r)|\beta_{2n-k}^{(0)}|, \\
T_{2n-k+1}^{(0)} = a|\alpha_{2n-k+1}^{(0)}| + (a-1)|\beta_{2n-k+1}^{(0)}| + |1 - \beta_{2n-k+1}^{(0)}|, \dots, \\
T_{2n}^{(0)} = a|\alpha_{2n}^{(0)}| + (a-1)|\beta_{2n}^{(0)}| + |1 - \beta_{2n}^{(0)}|.
\end{gathered}
$$

Воспользуемся тем, что $|\alpha_i^{(0)}| \geqslant 0$ $(i = n+1, \dots, 2n)$, $|\beta_i^{(0)}| \geqslant 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_1^{(0)} \geqslant |1 - \alpha_1^{(0)}| + (a-1)|\alpha_1^{(0)}| \geqslant 1 - |\alpha_1^{(0)}| + (a-1)|\alpha_1^{(0)}| \\
&\qquad = 1 + (a-2)|\alpha_1^{(0)}|, \ \dots, \ \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_k^{(0)} \geqslant 1 + (a-2)|\alpha_k^{(0)}|, \\
&\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_{k+1}^{(0)} \geqslant 1 + (a-2r)|\alpha_{k+1}^{(0)}|, \ \dots, \ \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_n^{(0)} \geqslant 1 + (a-2r)|\alpha_n^{(0)}|, \\
&\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_{n+1}^{(0)} \geqslant 1 + (a-2r)|\beta_{n+1}^{(0)}|, \ \dots, \ \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_{2n-k}^{(0)} \geqslant 1 + (a-2r)|\beta_{2n-k}^{(0)}|, \\
&\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_{2n-k+1}^{(0)} \geqslant 1 + (a-2)|\beta_{2n-k+1}^{(0)}|, \ \dots, \ \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant T_{2n}^{(0)} \geqslant 1 + (a-2)|\beta_{2n}^{(0)}|.
\end{aligned}
$$

Для дальнейшей оценки снизу величины $\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\|$ из полученных неравенств достаточно использовать первые n неравенств. Получим

$$
\begin{aligned}
k \cdot \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| &\geqslant \sum_{i=1}^{k} T_i^{(0)} \geqslant k + (a-2)\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i^{(0)}| \geqslant k + (a-2)\left|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(0)}\right| \\
&= k + (a-2)\left|1 - r\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i^{(0)}\right| \geqslant k + (a-2)\left(1 - r\left|\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i^{(0)}\right|\right), \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(n-k) \cdot \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| &\geqslant \sum_{i=k+1}^{n} T_i^{(0)} \geqslant n - k + (a-2r)\sum_{i=k+1}^{n} |\alpha_i^{(0)}| \\
&\geqslant n - k + (a-2r)\left|\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i^{(0)}\right|. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Сложим неравенства (4) и (5) почленно, предварительно умножив неравенство (5) на $r(a-2)/(a-2r) > 0$. Получим

$$
\left(k + (n-k) \cdot \frac{r(a-2)}{a-2r}\right)\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant k + (a-2) + (n-k) \cdot \frac{r(a-2)}{a-2r}.
$$

Отсюда следует, что

$$
\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| \geqslant 1 + \frac{(a-2)(a-2r)}{k(a-2r) + (n-k)r(a-2)}\,.
$$

Положим

$$\alpha_1^{(0)} = \dots = \alpha_k^{(0)} = \beta_{2n-k+1}^{(0)} = \dots = \beta_{2n}^{(0)} = \frac{a-2r}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)},$$
$$\alpha_{k+1}^{(0)} = \dots = \alpha_n^{(0)} = \beta_{n+1}^{(0)} = \dots = \beta_{2n-k}^{(0)} = \frac{a-2}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)},$$

$\alpha_i^{(0)} = 0$ $(i = n+1, \dots, 2n)$, $\beta_i^{(0)} = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, при этом условия (3) выполняются.

Тогда

$$\begin{aligned}
T_1^{(0)} &= \dots = T_k^{(0)} = T_{2n-k+1}^{(0)} = \dots = T_{2n}^{(0)} = |1-\alpha_1^{(0)}| + (a-1)|\alpha_1^{(0)}| \\
&= \left|1 - \frac{a-2r}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)}\right| + \frac{(a-1)(a-2r)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)} \\
&= \frac{(k-1)(a-2r)+(n-k)r(a-2)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)} + \frac{(a-1)(a-2r)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)} \\
&= 1 + \frac{(a-2)(a-2r)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)}, \\
T_{k+1}^{(0)} &= \dots = T_n^{(0)} = T_{n+1}^{(0)} = \dots = T_{2n-k}^{(0)} = |1-r\alpha_n^{(0)}| + (a-r)|\alpha_n^{(0)}| \\
&= \left|1 - \frac{r(a-2)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)}\right| + \frac{(a-r)(a-2)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)} \\
&= \frac{k(a-2r)+(n-k-1)r(a-2)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)} + \frac{(a-r)(a-2)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)} \\
&= 1 + \frac{(a-2)(a-2r)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)}\,.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lambda(Y_{2n-2}, l_\infty^{2n}) = \|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| = 1 + \frac{(a-2)(a-2r)}{k(a-2r)+(n-k)r(a-2)}\,.$$

Второе утверждение теоремы доказано в [2], третье доказывается аналогично второму.

Теорема доказана. □

Литература

[1] J. Blätter, E. W. Cheney, Ann. Mat. Pura ed Appl., **101** (1974), 215–227.
[2] О. М. Мартынов, Функц. анализ и его прил., **53**:3 (2019), 33–44.

О. М. Мартынов
Военная академия воздушно-космической обороны имени Маршала Советского союза Г. К. Жукова, Тверь, Россия
E-mail: olegmartynov@yandex.ru

Поступила в редакцию
20 января 2020 г.
После доработки
20 января 2020 г.
Принята к публикации
30 мая 2020 г.