

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров, В. Г. Данилов, С. Ю. Доброхотов, Пример вычисления траектории “глаза” тайфуна на основе гипотезы В. П. Маслова, *Докл. РАН*, 1994, том 338, номер 1, 102–105

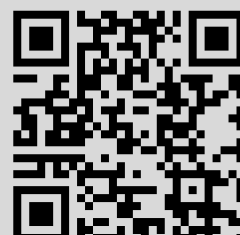
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

25 января 2025 г., 20:23:28



УДК 551.515.2

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ “ГЛАЗА” ТАЙФУНА НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ В. П. МАСЛОВА

© 1994 г. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров, В. Г. Данилов, С. Ю. Доброхотов

Представлено академиком В.П. Масловым 12.05.94 г.

Поступило 12.05.94 г.

В 1980 г. В.П. Маслов высказал гипотезу о поведении тайфунов, основанную на его теореме о структуре особенностей решений квазилинейных гиперболических уравнений [1]. Эта теорема утверждает, что в отличие от линейных уравнений, решения которых, по крайней мере в малом, наследуют тип особенности начального условия, для нелинейных уравнений в общем положении распространяться с сохранением структуры могут только особенности трех типов.

В том случае, когда особенность сосредоточена на поверхности (подмногообразии коразмерности единица), это могут быть разрывы первого рода, разрывы первого рода со степенным поведением в окрестности разрыва (показатель степени 1/2) и бесконечно узкие солитоны [2]. Решениям указанного вида были сопоставлены [1] (см. также [3]) ударные волны, волны детонации и волны цунами соответственно. Гипотеза В.П. Маслова состояла в том, что тайфунам отвечают решения с точечной особенностью для уравнений гидродинамики, описывающих атмосферу Земли в геострофическом приближении [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho \mathbf{U}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}, \nabla) \dot{\mathbf{U}} + \nabla \rho - 2\omega_0 T \mathbf{U} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{U} – скорость, ρ – плотность, ω_0 – параметр Кориолиса, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и для слабых особенностей в точке возможна единственная слабая особенность типа \sqrt{S} , $S \geq 0$, $\text{Hess } S|_{S=0} > 0$ [1, 4]. Таким образом, гипотеза В.П. Маслова опиралась на апробированный для других природных явлений замечательный факт, что решения системы (1) могут описывать крупномасштабные явления в ат-

мосфере, а также на теорему о единственности решений типа слабой особенности [1, 4]. Значит, если система (1) может описывать распространение тайфунов и если тайфунам отвечают решения, негладкие в точке, то, в силу теоремы единственности “устойчивой” особенности общего положения, траектория глаза тайфуна должна быть близка к траектории этой особенности.

Для вычисления траектории распространения слабой особенности мы используем аналогичную [6] цепочку необходимых условий, возникающих при подстановке в уравнения (1) решения с особенностью указанной структуры. Напомним, что необходимыми условиями существования решений типа ударных волн являются условия Гюгонио. С современной точки зрения [6] эти условия – первые из цепочки соотношений, возникающих при построении асимптотики решения по гладкости в окрестности разрыва. Вся совокупность необходимых условий в одномерном случае представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты рядов Тейлора в окрестности разрыва. Эта система не замкнута в том смысле, что первые N уравнений содержат более чем N неизвестных, и в силу этого ее решения не приводят, вообще говоря, к однозначному определению положения особенности. Замыкание этой системы возможно только с учетом глобальных свойств решения [7] или дополнительных предположений [6 - 8]. В.П. Маслов [6] получил замкнутую систему уравнений, в которой “лишние” (последние) неизвестные равны нулю, в предположении малости амплитуды разрыва. Для этой же системы Ф. Прасад [9] с помощью численного анализа установил, что она с достаточно хорошей точностью описывает положение носителя особенности (разрыва) и без предположения о малости амплитуды скачка.

Результаты Ф. Прасада позволили предположить, что траектория слабой особенности для системы (1) также может быть вычислена из аналогичной цепочки необходимых условий, в которой “лишние” неизвестные положены равными нулю.

В настоящей работе для системы (1) двумерных нелинейных уравнений гидродинамики,

учитывающей вращение Земли, получена цепочка уравнений, содержащая такое число неизвестных, которое позволяет получить зацепление функций, определяющих главный член асимптотического представления решения. По сравнению с [4] мы, во-первых, учли в уравнении слагаемые, описывающие влияние вращения Земли, и, во-вторых, выписали недостающие уравнения цепочки для получения системы с нужным числом неизвестных. Замыкание полученной цепочки обыкновенных уравнений проводилось аналогично [9]. Как предполагалось В.П. Масловым, положение слабой особенности, вычисленное на основе асимптотического представления решения исходной нелинейной системы, может моделировать траекторию движения тайфуна во вращающейся атмосфере Земли. Проведенное сравнение траектории движения центра точечной слабой особенности, полученной на основе численного расчета системы дифференциальных уравнений, и реальной траектории движения тайфуна показало их достаточно хорошее качественное совпадение. Кроме того, как показал численный анализ, рассчитанная траектория движения центра особенности слабо зависит от некоторых начальных условий, т.е. фактически положение центра особенности может определяться из системы, состоящей из существенно меньшего числа уравнений.

Необходимые условия существования решения со слабой особенностью в точке. Решение системы уравнений (1) со слабой особенностью в точке в силу теоремы В.П. Маслова [1, 4] ищем в виде

$$U = U^0 + \sqrt{S}U^1, \quad \rho = R^0 + \sqrt{S}R^1, \quad (2)$$

где

$$S(x, y, t) \in C^\infty, \quad S(x, y, t) \geq 0, \\ \text{Hess } S > 0, \quad S = 0,$$

функции R^0, R^1, U^0, U^1 бесконечно гладкие. Обозначим $x(t), y(t)$ координаты точки, в которой функция S обращается в нуль. Переходя в подвижную систему координат с центром в этой точке, перепишем систему (1) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + \nabla \rho + \mathbf{V} - \omega \Gamma(\mathbf{u} + \mathbf{V}) = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{V}, \mathbf{V} = (dx/dt, dy/dt), \omega = 2\omega_0$.

Подставляя (2) в (3), аналогично [4] получаем

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + (\nabla, \rho^0 \mathbf{u}^0) + (\nabla, S \rho^1 \mathbf{u}^1) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} + (\mathbf{u}^0, \nabla) \mathbf{u}^0 + \nabla \rho^0 + \mathbf{V} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}^1, \nabla S) \mathbf{u}^1 +$$

$$+ S(\mathbf{u}^1, \nabla) \mathbf{u}^1 - \omega \Gamma(\mathbf{u}^0 + \mathbf{V}) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u}^0, \nabla S) \right) \rho^1 + \rho^0 (\mathbf{u}^1, \nabla S) \right) + \\ + S \left(\frac{\partial \rho^1}{\partial t} + (\nabla, \rho^1 \mathbf{u}^1) \right) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(\rho^1 \nabla S + \left(\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u}^0, \nabla S) \right) \mathbf{u}^1 \right) + S \left(\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial t} + \nabla \rho^1 + (\mathbf{u}^0, \nabla) \mathbf{u}^1 + (\mathbf{u}^1, \nabla) \mathbf{u}^0 - \omega \Gamma \mathbf{u}^1 \right) = 0.$$

Решение (4) ищется в виде тейлоровских разложений по степеням x, y

$$\mathbf{u}^{0,1} = \mathbf{u}_0^{0,1} + \mathbf{u}_1^{0,1} + \mathbf{u}_2^{0,1} + \dots, \\ \rho^{0,1} = \rho_0^{0,1} + \rho_1^{0,1} + \rho_2^{0,1} + \dots, \quad (5) \\ S = S_2 + S_3 + \dots,$$

где каждая функция

$$\Phi_k \equiv (S_k, \mathbf{u}_k^{0,1}, \rho_k^{0,1}), \quad \mathbf{u}_k^{0,1} = (v_k^{0,1}, w_k^{0,1})$$

представляет собой однородный по переменным x, y полином с гладкими по t коэффициентами $\Phi_{ij}(t)$,

$$\Phi_k = \Phi_{k0}(t)x^k + \Phi_{k-1}(t)x^{k-1}y + \dots + \Phi_{0k}(t)y^k,$$

причем $S_2 \neq \alpha(t)(x^2 + y^2)$. Тогда подстановка (5) в (4) дает следующую систему дифференциальных уравнений и равенств:

$$\mathbf{u}_0^0 = 0, \quad \mathbf{u}_0^1 = 0, \quad \rho_0^1 = 0, \quad \rho_1^1 = 0, \\ v_{10}^0 = w_{01}^0 \equiv q(t), \quad (6)$$

$$v_{01}^0 = -w_{10}^0 \equiv p(t),$$

$$\rho_{20}^0 = \rho_{02}^0 \equiv r(t),$$

$$\rho_{11}^0 = 0;$$

$$\dot{\rho}_0^0 = -2q\rho_0^0,$$

$$\dot{V}_x = \omega V_y - \rho_{10}^0,$$

$$\dot{V}_y = -\omega V_x - \rho_{01}^0,$$

$$\dot{\rho}_{10}^0 = -3q\rho_{10}^0 + p\rho_{01}^0 - \rho_0^0 (w_{11}^0 + 2v_{20}^0), \quad (7)$$

$$\dot{\rho}_{01}^0 = -3q\rho_{01}^0 - p\rho_{10}^0 - \rho_0^0 (v_{11}^0 + 2w_{02}^0),$$

$$\dot{q} = -q^2 + p^2 - \omega p - 2r,$$

$$\dot{p} = -2pq + \omega q,$$

$$\dot{r} = -4qr - \rho_{10}^0 (3v_{20}^0 + w_{11}^0) - \rho_{01}^0 w_{20}^0,$$

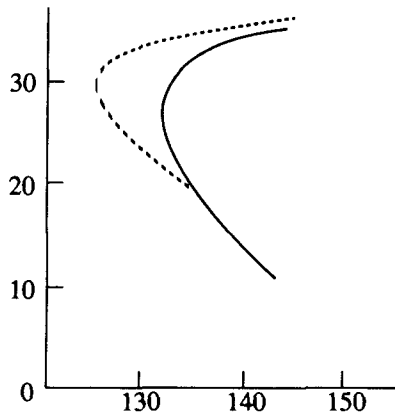


Рис. 1.

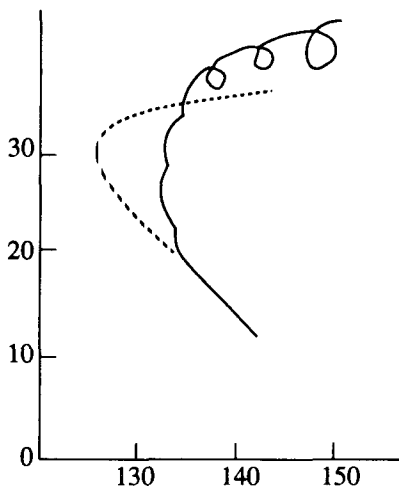


Рис. 2.

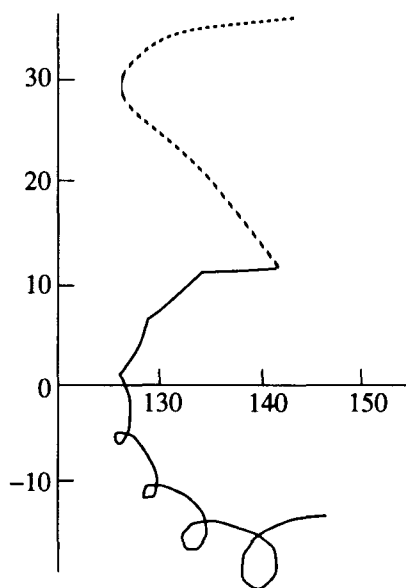


Рис. 3.

$$\dot{v}_{20}^0 = -3qv_{20}^0 + p(v_{11}^0 - w_{20}^0) + \omega w_{20}^0,$$

$$\dot{v}_{11}^0 = -3qv_{11}^0 + p(2v_{02}^0 - 2v_{20}^0 - w_{11}^0) + \omega w_{11}^0,$$

$$\dot{v}_{02}^0 = -3qv_{02}^0 - p(v_{11}^0 + w_{02}^0) + \omega w_{02}^0,$$

$$\dot{w}_{20}^0 = -3qw_{20}^0 + p(w_{11}^0 + v_{20}^0) - \omega v_{20}^0, \quad (7)$$

$$\dot{w}_{11}^0 = -3qw_{11}^0 + p(-2w_{20}^0 + 2w_{02}^0 + v_{11}^0) - \omega v_{11}^0,$$

$$\dot{w}_{02}^0 = -3qw_{02}^0 - p(w_{11}^0 - v_{02}^0) - \omega v_{02}^0;$$

здесь точка означает дифференцирование по времени.

Соотношения (6) – алгебраические условия существования решений с особенностью типа \sqrt{S} , справедливые и для начальных условий, – были получены В.П. Масловым [1] и В.Н. Жихаревым [4] (в форме, используемой в данной статье). Система (7) соответствует второму приближению в разложениях (5) и получается путем приравнивания нулю всех коэффициентов при однородных полиномах степени больше двух и подстановки (5) в (4).

Численный анализ. Для сравнения результатов вычисления траектории особенности в силу системы уравнений (7) с траекторией глаза реального тайфуна были использованы результаты наблюдения за тайфуном “FORREST”, проведенные в течение 250 ч с 21 по 31 сентября 1983 г. в Тихом океане [10]. Отметим, что все начальные условия для системы уравнений (7) невозможно определить из экспериментальных данных, полученных при измерениях в атмосфере. Реально удалось определить начальные значения для координат глаза, скорости его распространения и первые коэффициенты $\rho_{00}^0, \rho_{10}^0, \rho_{01}^0$ разложения плотности в точке глаза тайфуна. Таким образом, начальные данные для функций $p, q, v_{20}^0, v_{11}^0, v_{02}^0, w_{20}^0, w_{11}^0, w_{02}^0, r$ из экспериментальных данных определить не удалось, и задача состояла в подборе их таким образом, чтобы рассчитанная в силу системы (7) траектория движения глаза тайфуна была близка реальной.

Эту задачу удалось решить. На рис. 1 – 3 штриховой линией изображена траектория движения глаза тайфуна (по оси абсцисс отложена долгота в градусах, по оси ординат – широта). Сплошной линией на рис. 1 представлена численно рассчитанная траектория центра точечной особенности. Как видно из рис. 1, численно рассчитанная траектория движения центра точечной слабой особенности, действительно, на интервале времени существования тайфуна порядка 250 ч качественно верно может описывать реальную динамику глаза тайфуна в атмосфере.

Численный анализ показал также, что рассчитанная траектория достаточно слабо зависит от

начальных значений некоторых функций, таких, например, как $v_{20}^0, v_{11}^0, v_{02}^0, w_{20}^0, w_{11}^0, w_{02}^0$, и в то же время сильно зависит от начальных значений функций p, q, r (рис. 2, 3). Численные эксперименты показали, что для начальных значений функций $v_{20}^0, v_{11}^0, v_{02}^0, w_{20}^0, w_{11}^0, w_{02}^0$, которые не определены из натуральных измерений, существуют такие интервалы, что рассчитанная траектория будет сильно отличаться от реальной, если начальные значения этих функций лежат вне таких интервалов. При изменении начальных значений этих функций в пределах таких интервалов численно рассчитанные траектории качественно близки между собой и качественно верно описывают реально измеренную траекторию (рис. 2). В то же время сравнительно малые изменения начальных значений функции r (коэффициенты при второй степени тейлоровского разложения плотности в (5)) достаточно сильно влияют на рассчитанные траектории (рис. 3).

Авторы благодарны В.П. Маслову за ряд важных замечаний.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 93-013-17702, 93-011-16560).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В.П. // УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 252 - 253.
2. Маслов В.П., Омелянов Г.А. // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24. № 5. С. 172 - 182.
3. Маслов В.П., Данилов В.Г., Субочев П.Ю. Асимптотические по гладкости решения квазилинейных гиперболических уравнений. Деп. ВИНТИ 2.01.89. М., 1989.
4. Жихарев В.Н. О необходимых условиях существования и единственности типа решения со слабой распространяющейся особенностью, сосредоточенной в точке для уравнений газодинамики в случае двух пространственных переменных. Деп. ВИНТИ, 8148-В86. М., 1986.
5. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981.
6. Маслов В.П. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1977. Т. 8. С. 199 - 271.
7. Маслов В.П., Цулин В.А. Там же. С. 273 - 308.
8. Гринфельд М.А. // ПММ. 1978. Т. 42. № 5. С. 883 - 898.
9. Prasad P. // Appl. Math. Lett. 1990. V. 3. № 3. P. 107 - 109.
10. Шмерлин Б.Я. Использование гидродинамической модели для описания перемещений тропических циклонов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Обнинск: Ин-т экспериментальной метеорологии НПО "Тайфун", 1990.