А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 5
Выпуск 5 Руководитель А.И.Мальцев 1966 г.

О ПОРЯДКЕ РОСТА ТОЧНЫХ ВРЕМЕННЫХ СИГНАЛИЗИРУЮЩИХ ДЛЯ ТЬЮРИНГОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Р.В.Фрейвалд

При оценке сложности тьюринговых вычислений можно применять временные сигнализирующие следующих двух типов:

I) $t_m(p)$ - число шагов в процессе вычисления машины $\mathfrak{M}$, если в начальной конфигурации на ленте записано (стандартным образом) слово p;

2) $t_m(n) \overset{df}{=} \max t_m(p)$ (по всем словам длины n). Введем понятия точных сигнализирующих обоих типов, а именно: о функции $f(p)(g(n))$ будем говорить, что она является точной сигнализирующей типа $t(p)(t(n))$, если существует предикат, удовлетворяющий двум условиям:

I) он вычислим на подходящей машине Тьюринга с временной сигнализирующей $t(p) = f(p)$ (соответственно $t(n) = g(n)$);

2) любое тьюрингово вычисление этого предиката имеет временную сигнализирующую $t(p) \geqslant const_1 \cdot f(p)$ (соответственно $t(n) \geqslant const_2 \cdot g(n)$); Иначе говоря, точная сигнализирующая является временной сигнализирующей для некоторого оптимального тьюрингова вычисления [6].

Функции $n, n\log n, n^2$ являются точными сигнализирующими [I], [3]. Б.А.Трахтенброт показал [I], что нет точных сигнализирующих $g(n)$, таких, что $n < g(n) < n\log n$. Это может дать повод для предположения что, возможно, существует и "третья по счету" точная сигнализирующая $h(n)$ такая, что $n\log n = o(h(n))$, и нет сигнализирующих

$$n\log n < g(n) < h(n).$$

В данной работе показывается, что это не так. Именно (§ I), описывается "плотный" класс точных сигнализирующих функций $\{f_i(n)\}$, где $n<f_i(n)<n^2$. Кроме того (§2), приводится нетривиальный пример точной сигнализирующей типа $t(p)$.

§ I

Зафиксируем некоторую числовую функцию $f(n)\leqslant\frac{n}{4}$. Рассмотрим следующий предикат, определенный на множестве слов над алфавитом $\{0,1\}$. Каждое слово $p=a_1a_2\ldots a_{|p|}$ разделяется на куски:

$$a_1a_2\ldots a_{f(|p|)}a_{f(|p|)+1}\ldots a_{2f(|p|)}\ldots$$

(Здесь, как и всюду ниже, через $|p|$ обозначена длина слова p).

Предикат $\pi_{f(n)}$ истинен в том и только в том случае, если все куски одинаковы (кроме, быть может, последнего - последний может оказаться короче; тогда последний кусок должен совпадать с началом других кусков).

ТЕОРЕМА I. Каждая машина T, вычисляющая предикат $\pi_{f(n)}$ имеет некоторую константу C_T такую, что временная сигнализирующая этой машины

$$t_T(n)\geqslant C_T\cdot n\cdot f(n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть слово p записано на первых $|p|$ ячейках ленты машины. Будем говорить, что точка*) i ленты находится в средней части слова p, если $i\geqslant f(|p|)$ и $i\leqslant|p|-2f(|p|)$.

Рассмотрим для каждого n множество $\mathfrak{M}_n$ всех таких слов R длины n, что $\pi_{f(n)}(R)$ истинен. Очевидно, $\mathfrak{M}_n$ состоит из $2^{f(n)}$ слов. Покажем, что в каждой точке i из средней части слова различные слова из множества $\mathfrak{M}_n$ имеют различные следы.

Предположим от противного, что слова $P_1\in\mathfrak{M}_n$ и $P_2\in\mathfrak{M}_n$ имеют в точке i одинаковые следы, но $P_1\neq P_2$. По лемме о замещениях [I] предикат $\pi_{f(n)}$ от слова P_1iP_2, составленного из первых i букв слова P_1 и последних $|p|-i$ букв слова P_2, был истинен, а по определению $\pi_{f(n)}(P_1iP_2)$ ложен.

Подсчитаем сумму

$$\sum=\sum_{p\in\mathfrak{M}_n}\ \sum_{i\in\text{средней части }p}\sigma_i(p)$$

длин следов всех слов из $\mathfrak{M}_n$ во всех точках средних частей слов.

Рассмотрим

$$\sum_i=\sum_{p\in\mathfrak{M}_n}\sigma_i(p).$$

*) Определение см. [I] .

В каждой точке средней части слова разные слова из $\mathfrak{M}_n$ имеют разные следы, поэтому

$$\sum_i \geqslant c' \cdot f(n) \cdot 2^{f(n)},$$

где c' – некоторая константа, не зависящая от n. Таких точек i всего $n-3f(n)$, поэтому

$$\sum \geqslant c f(n) 2^{f(n)} n,$$

где c – опять некоторая константа.

В среднем на одно слово из $\mathfrak{M}_n$ сумма длин следов составляет

$$\frac{\sum}{2^{f(n)}} \geqslant c \cdot n \cdot f(n).$$

Так как сумма длин следов не меньше числа тактов до остановки машины, то тем самым теорема I доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что машина Тьюринга унарно вычисляет числовую функцию $f(|p|)$, если каждое слово p в алфавите $\{0,1\}$ машина перерабатывает в слово, состоящее из $f(|p|)$ букв 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что числовая функция $f(n)$ L-вычислима, если $f(n) \leqslant \frac{n}{4}$ и $f(|p|)$ унарно вычислима с логарифмическим замедлением, то есть существует машина Тьюринга, унарно вычисляющая $t(|p|)$ за $|p| \log |p|$ тактов.

ТЕОРЕМА 2. Если $f(n)$ L-вычислима и $f(n) \geqslant \log n$, то предикат $\pi_f(n)$ имеет точную сигнализирующую

$$t(n) \asymp n f(n) + n \log n \asymp n \cdot \max\{f(n), [\log_2 n]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижняя оценка временной сигнализирующей следует из теоремы I и работы [I].

Для нахождения верхней оценки рассмотрим работу конкретной машины, вычисляющей $\pi_{f(n)}$. Ниже одна такая машина T описана в терминах так называемых "многоэтажных" лент. На самом деле, у машины с многоэтажной лентой имеется обычная лента, только для удобства описания машины алфавит ленты рассматривается как декартово произведение алфавитов "первого этажа", "второго этажа",..., "k-го этажа". (Число этажей всегда конечно и не зависит от длины слова). Данное слово считывается записанным на первом этаже ленты.

Работу машины T можно условно разделить на два этапа. На первом этапе машина за $|p| \log |p|$ тактов, не меняя записей первого этажа, унарно вычисляет на втором этаже функцию $f(|p|)$ и ста-

вит вычисленное слово из $f(|p|)$ единиц над первыми $f(|p|)$ буквами слова p. На втором этапе машина сравнивает первую и $f(p)+1$ -ую букву слова p; отыскание сравнимых букв обеспечивается наличием записи на втором этаже (рис. 1).

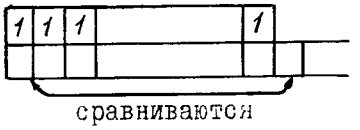

Рис. I

Если сравнимые буквы не совпадают, предикат ложен, а если совпадают, машина передвигает единицы второго этажа на одну ячейку вправо и сравнивает вторую букву слова p с $f(|p|)+2$-ой (рис.2). В случае несовпадения букв предикат ложен,

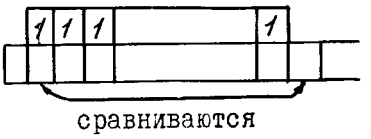

Рис. 2

в случае совпадения - снова передвигаются единицы второго этажа. Такое сравнение продолжается до тех пор, пока конец записи второго этажа не сдвинется до конца записи первого этажа (рис. 3).

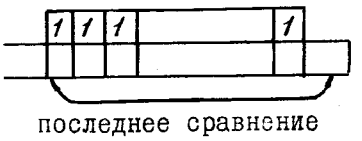

Рис. 3

Второй этап занимает $\asymp |p| f(|p|)$ тактов, а вся работа машины $\asymp |p| f(|p|)+|p| \log |p|$ тактов, что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы займемся исследованием вопроса, насколько широк класс L -вычислимых функций. Будет показано, что он включает достаточно много функций, и, следовательно, согласно теореме 2 мы получим широкий класс точных сигнализирующих функций.

Обозначим через $\langle n \rangle$ двоичную запись числа n. Если же p -двоичная запись некоторого числа, то через $\|p\|$ обозначим унарную запись того же числа.

Заметим сначала, что функции $\langle |p| \rangle$ и $|\langle |p| \rangle|$ вычислимы за $|p| \log |p|$ тактов, а функция $\|p\|$ за $\|p\| \log \|p\|$ тактов.

Из этих замечаний легко вытекает

ТЕОРЕМА 3. Если некоторая словарная

функция $\varphi(p)$ в алфавите $\{0,1\}$ вычислима на машине Тьюринга с временной сигнализирующей $t(n)\leq n\cdot 2^n$, то функция $f(n)=\min(|\varphi(\langle n\rangle)|,[\frac{n}{4}])$ является L-вычислимой, а если, кроме того, $f(n)\geq \log n$, то $n\cdot f(n)$ совпадает по порядку с некоторой точной сигнализирующей

Несколько сложнее доказывается следующая

ТЕОРЕМА 4. Если функции $f(n)$ и $g(n)$ L-вычислимы, то функции

$$h_1(n)\overset{dt}{=}f(g(n));$$

$$h_2(n)\overset{dt}{=}\min\{f(n)\cdot g(n),[\tfrac{n}{4}]\};$$

$$h_3(n)\overset{dt}{=}\left[\frac{f(n)}{g(n)}\right];$$

$$h_4(n)\overset{dt}{=}\max\left\{\left[\frac{f(n)}{g(n)}\right],\left[\frac{g(n)}{f(n)}\right]\right\};$$

$$h_5(n)\overset{dt}{=}\mu i\,(\underbrace{f(f(\dots(f}_{i+1\text{ раз}}(n))\dots)=0)$$

также L -вычислимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $h_1(n)<g(n)\leq\frac{n}{4}$ Машина, унарно вычисляющая $h_1(|p|)$ за $\leq|p|\log|p|$ тактов, есть композиция соответствующих машин, унарно вычисляющих $g(|p|)$ и $f(|p|)$;

б) $f(|p|)\cdot g(|p|)$ можно вычислить унарно, последовательно вычисляя: унарно $f(|p|)$, унарно $g(|p|)$, $\langle f(|p|)\rangle$, $\langle g(|p|)\rangle$, двоично перемножая $\langle f(|p|)\rangle$ и $\langle g(|p|)\rangle$ и строя унарное слово длины, равной этому произведению. Аналогично вычисляются $\left[\frac{f(n)}{g(n)}\right]$ и $\left[\frac{g(n)}{f(n)}\right]$.

в) При вычислении $h_5(n)$ результат накапливается на втором этаже ленты. На первом этаже унарно вычисляется $p_1=\|f(|p|)\|$. Если $f(|p|)>0$, то на второй этаж заносится одна единица и дальше вычисляется $p_2=\|f(|p|)\|$. Если $f(|p_1|)>0$, то на втором этаже дабавляется одна единица и далее вычисляется

$$p_3=\|f(|p_2|)\| \qquad \text{и т.д.}$$

Для оценки временной сигнализирующей используем: I) оценку $f(n)\leq\frac{n}{4}$; 2) оценку сигнализирующей для машины, вычисляю -

лей $f(|p|): t(|p|) \leq c\cdot|p|\cdot\log|p|$. Общее число затраченных тактов

$$\leq c\cdot|p|\log_2|p|+c\cdot|p_1|\cdot\log_2|p_1|+c\cdot|p_2|\cdot\log_2|p_2|+\ldots\leq$$

$$\leq c\cdot\log_2|p|\left(|p|+\frac{|p|}{4}+\frac{|p|}{16}+\cdots\right)\leq 2c|p|\log|p|,$$

что и требовалось доказать. Из теоремы 4 вытекает L - вычислимость следующих функций $\varepsilon_1(n), \varepsilon_2(n), \ldots$

$$\varepsilon_1(n) \overset{dt}{=} [\log_2 n] \quad (\varepsilon_1(0) \overset{dt}{=} 0),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_{k+1}(n) \overset{dt}{=} \mu i\,(\underbrace{\varepsilon_k(\varepsilon_k\cdots\varepsilon_k}_{i+1\ раз}(n)\ldots)=0),$$

так как $\varepsilon_k(n) \leq \frac{n}{4}$ (для всех k и n, кроме $k=1$, и n от 2 до II). Легко заметить, что $\varepsilon_{k+1}(n) \leq \varepsilon_k(n)$, причем равенство имеет место только если $\varepsilon_k(n)=0$.

Доказательство, аналогичное доказательству Аккермана (см.[2]), показывает, что для любой примитивно-рекурсивной функции $\rho(n)$ можно найти такое k, что функция, обратная к $\varepsilon_k(n)$, растёт быстрее, чем $\rho(n)$. Это показывает, что $\{\varepsilon_k(n)\}$ - последовательность очень медленно растущих функций.

Пусть $t(n) \overset{dt}{=} \max\limits_{|p|=n} t(p)$ - произвольная сигнализирующая функция (не обязательно точная). Тогда справедливо следующее утверждение А:

А. функция $t(n)$ унарно вычислима с сигнализирующей, не превосходящей $2^n\cdot t(n)\cdot\log t(n)$.

Докажем это утверждение. Известно [4], что по машине Тьюринга T с сигнализирующей $t(n)$ можно построить машину T_2 со счетом тактов, вычисляющую в двоичной системе для каждого слова p число $t_{T_1}(p)$ тактов, затрачиваемых машиной T_1 при переработке слова p; при этом машина T_2 работает не более чем $t_{T_1}(p)\cdot\log t_{T_1}(p)$ тактов. Ясно, что с такой же верхней оценкой можно получить и унарную запись числа $t(p)$. Унарное вычисление функции $t(n)$ сводится к перебору вычислений указанного типа для 2^n слов длины n. Этим утверждение доказано.

Рассмотрим теперь L -вычислимую функцию $f(n) \geq const\,[\log n]$. Мы знаем, что $n\cdot f(n)$ по порядку совпадает с некоторой точной сигнализирующей. Предположим, что нам дана еще некоторая неубывающая неограниченная функция $g(n) \leq n$, такая, что $n\cdot f(n)\cdot g(n)$ является временной сигнализирующей (не обязательно точной). При этих условиях имеет

место следующая

ЛЕММА I. Функция $g([\log_2[\log_2 n]])$ L - вычислима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанная функция очевидным образом не превосходит $n/4$. Вместе с тем, взяв $t(n)=n\cdot f(n)\cdot g(n)$, мы из утверждения А легко усматриваем вычислимость с логарифмическим замедлением функции $t([\log[\log n]])$, равной

$$[\log[\log n]]f([\log[\log n]])g([\log[\log n]]).$$

(Напомним, что в нашем случае $t(n)<n^3$). Поскольку

$$g([\log[\log n]])=\frac{t([\log[\log n]])}{[\log[\log n]]f([\log[\log n]])},$$

то $g([\log[\log n]])$ унарно вычислима с логарифмическим замедлением.

Обратимся теперь к существованию "третьей по счету" точной сигнализирующей. Докажем, далее, теорему, из которой следует не только отсутствие ближайшей сверху точной сигнализирующей для $n\log n$ и ближайшей снизу для n^2, но также отсутствие ближайших сверху и снизу соседних точных сигнализирующих для всех функций $n\cdot f(n)$, где $f(n)$ - любая L -вычислимая функция, такая что $\log n<f(n)<n$. Из теоремы 5 вытекает также, что ко всем указанным функциям $n\cdot f(n)$ другие точные сигнализирующие подходят (как сверху, так и снизу) в некотором естественном смысле одинаково близко.

ТЕОРЕМА 5. Пусть даны L - вычислимая функция $f(n)$ и неубывающая неограниченная функция $g(n)$, такая что

I) $g(n)\leq n$,

2) функция $n\cdot f(n)\cdot g(n)$ является временной сигнализирующей (не обязательно точной). Тогда для любого натурального k существует функция $h_k(n)=O(\varepsilon_k(g(n)))$, такая что функции $h_1(n)=\min\{n^2, nf(n)\cdot h_k(n)\}$ и $h_2(n)=\max\{n[\log n][\frac{nf(n)}{g(n)}]\}$ по порядку совпадают с некоторыми точными сигнализирующими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве $h_k(n)$ возьмем функцию

$$\varepsilon_{k+1}(g(\log\log n))),$$

которая является L -вычислимой (см. теорему 4 и лемму I).

ПРИМЕЧАНИЕ I. Теорема 5 сохраняет силу, если условие 2) за-

менить на следующее условие: 2′) функция $\left[\frac{nf(n)}{g(n)}\right]$ является временной сигнализирующей.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. В работе Хенни [5] доказывается, что всякая степенная функция $n^{1+p/g}$, где p/g – правильная дробь, совпадает по порядку с некоторой точной сигнализирующей. Из теорем 2 и 4 настоящей работы вытекает более сильный результат, в частности, любая функция $f(n)$ следующего вида совпадет по порядку с некоторой точной сигнализирующей, если только

$$f(n)=n^{1+\frac{p}{q}}\,(\varepsilon_1(n))^{\pm\frac{p_1}{q_1}}\cdot(\varepsilon_1(\varepsilon_1(n)))^{\pm\frac{p_2}{q_2}}\ldots(\varepsilon_2(n))^{\pm\frac{p_4}{q_4}}(\varepsilon_1(\varepsilon_2(n)))^{\pm\frac{p_5}{q_5}},$$

где $p\geq 0$ p/q – правильная дробь, p_i/q_i – рациональные числа. Как следует из теоремы 3, множество всех точных сигнализирующих (даже больших $n\log n$ и меньших n^2) этим не исчерпывается.

§ 2.

До сих пор мы рассматривали временную сигнализирующую в смысле

$$t(n)=\max_{|p|=n} t(p).$$

Если, например, $t(n)\asymp n^2$, то это означает, что существуют константы C_1 и C_2, такие что для каждого n найдется слово p длины n, такое что машина перерабатывает p за $t(p)$ тактов. Здесь

$$C_1|p|^2\leq t(p)\leq C_2|p|^2.$$

В этом параграфе мы будем рассматривать временную сигнализирующую типа $t(p)$. Для рассмотренных выше предикатов $\pi_{f(n)}$ (а также предикатов симметрии) далеко не для всех слов нужно $t(p)=t(|p|)$ тактов. Например, для слов $00\ldots0, 11\ldots1$ и других истинность указанных предикатов независимо от длины слова можно проверить за $t(p)=|p|$ тактов.

Ниже приводится пример предиката π, для вычисления всех слов которого необходимо $\asymp |p|\log|p|$ тактов.

Предикат π зависит только от длины слова $\pi(p)=1$, если двоичная запись длины слова p имеет нечетное число цифр, и от $\pi(p)=0$ – в противном случае.

Предикат π от любого слова в данном алфавите можно вычислить за $\asymp |p|\log|p|$ тактов. Действительно, двоичную запись длины слова можно вычислить за $\asymp |p|\log|p|$ тактов, а устано-

вить четность числа цифр этой записи можно еще быстрее - за $\log|p|$ тактов.

Чтобы доказать необходимость для сигнализирующей $\asymp |p| \log |p|$ тактов, рассмотрим следующую последовательность $\{z_n\}$ единиц и нулей, где $z_n = \pi$ (от слов длины n).

ЛЕММА 2. Если $n_1, n_2, n_3, \ldots$ - арифметическая прогрессия, то $z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots$ содержит и нули и единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что $\{z_n\}$ состоит из монотонно удлиняющихся кусков нулей и единиц (каждый новый кусок в два раза больше предыдущего). Поэтому, если разность арифметической прогрессии равна d , то $z_{n_1}, z_{n_2}, z_{n_3}, \ldots$ содержит элементы всех кусков, начиная по крайней мере с d -ого.

ЛЕММА 3. Каждая машина Тьюринга вычисляющая предикат π, на любом слове в различных точках использованной части ленты имеет различные следы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при вычислении предиката от некоторого слова p имеются одинаковые следы в различных точках i и j . Обозначим через $p_{нач}$ подслово, состоящее из первых i букв слова p , через $p_{ср}$ - подслово, состоящее из $(i+1)$ -ой, $(i+2)$-ой, $\ldots, j$ -ой букв слова p , и через $p_{кон}$ -подслово, состоящее из последних $|p|-j$ букв слова p .

Кроме слова $p = p_{нач} p_{ср} p_{кон}$, рассмотрим слова

$$p_{нач} p_{ср} p_{ср} p_{кон}, \; p_{нач} p_{ср} p_{ср} p_{ср} p_{кон}, \; \ldots .$$

По лемме о замещениях [I] машина вычисляет на всех этих словах одинаковые результаты. Это противоречит нашей лемме 2 , так как длины рассматриваемых слов составляют арифметическую прогрессию.

Поступила в редакцию
26.VI.1966 г.

Литература

I. Б.А.Трахтенброт. Тьюринговы вычисления с логарифмическим замедлением.- Алгебра и логика. Семинар. Новосибирск, 1964, т. 3, вып. 4, стр. 33-48.

2. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. Наука, 1965 г.

3. Я.М.Барздинь. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга.-Проблемы кибернетики, вып. I5,I965, стр. 245-248.

4. С.Г.Матвеева. К теореме Рабина о сложности вычислимых функций.- СМЖ, 6 (I965), № 3, стр. 546-555.

5. Hennie J.C. "One - tape, off-line Turing machine computations" Inf.and Contr., v.8.N6,1965,553-578.

6. Б.А.Трахтенброт. Оптимальные вычисления и частотное явление Яблонского. - Алгебра и логика. Семинар. Ново - сибирск, I965, т. 4, вып. 5, стр.