

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Петров, И. И. Потапов, Постановка и решение задачи об устойчивости несвязного дна канала, *Прикл. мех. техн. физ.*, 2010, том 51, выпуск 1, 62–74

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

25 января 2025 г., 23:21:21



УДК 532.545

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСВЯЗНОГО ДНА КАНАЛА

А. Г. Петров, И. И. Потапов\*

Институт прикладной механики РАН, 119526 Москва

\* Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск

E-mail: petrovipmech@gmail.com

Сформулирована задача устойчивости песчаного дна канала прямоугольной формы относительно одномерных по пространству возмущений. Задача устойчивости русла решена с использованием уточненной формулы расхода наносов, в которой учтено влияние возмущений свободной поверхности на перенос наносов. При малых значениях числа Фруда получены аналитические зависимости скорости движения донных возмущений от времени. Аналитически найдены длины волн для наиболее быстро растущих донных возмущений и решена задача эволюции одиночного донного возмущения.

Ключевые слова: расход наносов, песчаное дно канала, устойчивость русла.

**Введение.** В настоящей работе развивается теория движения наносов, предложенная в [1, 2]; уточняется формула расхода наносов, в линеаризованной форме решается одна из фундаментальных задач русловой динамики — задача устойчивости русла. Заметим, что попытки решения указанной задачи с использованием феноменологических моделей движения наносов предпринимались во многих работах, в которых изучались различные механизмы переноса наносов в каналах (см., например, [3–12]). В данной работе используются и обобщены полученные ранее уравнения русловых деформаций, что позволило при малых числах Фруда получить аналитические зависимости скорости движения донных возмущений от времени, длину волны для наиболее быстро растущих донных возмущений и решить в аналитическом виде задачу движения и эволюции одиночного донного возмущения.

**1. Уравнения гидродинамики.** Рассматривается задача о размыве песчаного дна реки или канала турбулентным потоком жидкости. Для определения осредненного по глубине поля скорости жидкости принимаются стандартные уравнения гидравлики [12, 13], называемые уравнениями плановой задачи. В этих уравнениях гидродинамики в приближении мелкой воды учитываются зависимость массовых сил от среднего уклона русла и квадратичный закон сопротивления. Кроме того, в уравнения входит вязкое напряжение с коэффициентом турбулентного обмена. Поскольку профиль дна изменяется медленно, используются стационарные уравнения движения. Рассматриваются одномерные по координате  $x$  уравнения. Направление оси  $x$  совпадает с направлением скорости потока  $V(x)$ , осредненной по глубине, декартова координата  $z$  направлена вертикально вверх (рис. 1). Пусть  $\zeta(t, x)$  — отметка дна,  $\eta(t, x) = h + \zeta(t, x)$  — отметка свободной поверхности,  $h$  —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-99035 р-офи) и в рамках ведомственной целевой аналитической программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (код проекта 2.1.1/3604).

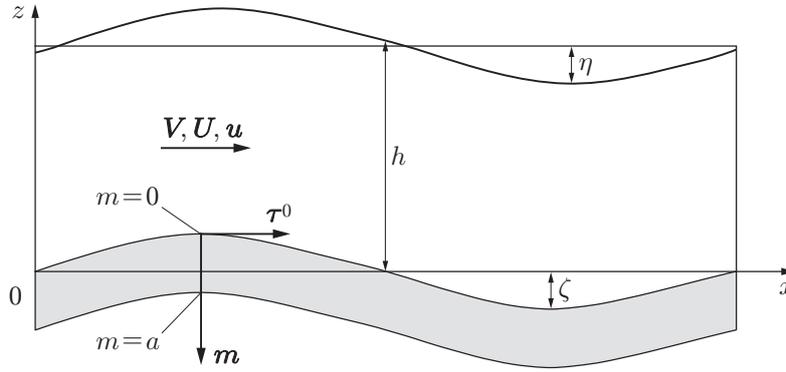


Рис. 1. Схема задачи

средняя глубина канала. Начало координат канала выбирается таким образом, чтобы средние по координате  $x$  функции  $\zeta(x)$  и  $\eta(x)$  были равны нулю:  $\langle \zeta(x) \rangle = 0$ ,  $\langle \eta(x) \rangle = 0$ . Уравнение движения имеет вид

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = gJ - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\lambda V^2}{h + \eta - \zeta} + \nu_t \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Это уравнение отличается от принятого в гидравлике [12] наличием слагаемого  $\nu_t \partial^2 V / \partial x^2$ . Аналогичное слагаемое входит в уравнение Навье — Стокса, в котором вместо коэффициента турбулентного обмена  $\nu_t$  используется существенно меньший коэффициент молекулярной вязкости  $\nu$ . Для длин волн, превышающих глубину  $h$  или сравнимых с ней, вклад этого слагаемого пренебрежимо мал, поэтому им можно пренебречь. В теории устойчивости этот член играет важную роль, так как он ограничивает рост амплитуды очень коротких волн.

Преобразуем уравнение движения, добавив к нему уравнение сохранения расхода  $Q$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} - gJ + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\lambda V^3}{Q} - \nu_t \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0; \tag{1.1}$$

$$Q = (h + \eta - \zeta)V. \tag{1.2}$$

Здесь  $J$  — средний уклон русла;  $\lambda$  — коэффициент гидравлического сопротивления;  $g$  — ускорение свободного падения. Для решения задачи устойчивости необходима линеаризация этих уравнений. В случае ровного дна ( $\zeta = 0$ ) решением уравнений (1.1), (1.2) является течение со скоростью  $U$ , имеющее ровную свободную поверхность  $\eta = 0$ . Скорость  $U$  определяется из баланса сил сопротивления и произведения уклона дна и силы тяжести:

$$U = Q/h = \sqrt{ghJ/\lambda}. \tag{1.3}$$

Линеаризуем уравнения (1.1), (1.2) по малым возмущениям  $u = V - U$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Тогда выражения для разных степеней  $V$  имеют вид

$$V = \frac{Q}{h + \eta - \zeta} = \frac{Q}{h} + \frac{Q}{h^2} (\zeta - \eta),$$

$$V^2 = \frac{Q^2}{h^2} + 2 \frac{Q^2}{h^3} (\zeta - \eta), \quad V^3 = \frac{Q^3}{h^3} + 3 \frac{Q^3}{h^4} (\zeta - \eta).$$

Подставив эти выражения в уравнения (1.1), с помощью (1.3) получим

$$\frac{\text{Fr} - 1}{\text{Fr}} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3\lambda}{h} (\eta - \zeta) - h\nu_q \frac{\partial^2 (\eta - \zeta)}{\partial x^2} = 0, \quad (1.4)$$

$$\text{Fr} = \frac{U^2}{gh}, \quad \nu_q = \frac{\nu_t}{Q}.$$

Здесь  $\text{Fr}$ ,  $\nu_q$  — безразмерные число Фруда и коэффициент турбулентного обмена.

**2. Уравнение эрозии донной поверхности и формулы расхода наносов.** Изменение отметки дна можно найти из уравнения сохранения массы песка [12]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s(1 - \varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\rho_s$  — плотность частиц песка;  $\varepsilon$  — коэффициент пористости песчаного дна.

Для замыкания системы уравнений необходима зависимость вектора расхода наносов  $\mathbf{G}$  от векторов напряжения жидкости на дне, локальных уклонов донной и свободной поверхностей.

Ранее при расчете вектора расхода наносов изменение свободной поверхности не учитывалось [1, 2]. Сформулирована модель водогрунтовой смеси, движущейся в тонком слое вблизи дна. Реологический закон смеси учитывает закон Кулона для трения частиц и закон турбулентного трения Прандтля для жидкости. В результате решения краевой задачи для движущегося слоя частиц в [1, 2] получена следующая формула расхода наносов:

$$G = G_0 V^3 \left( 1 + \frac{1}{\text{tg } \varphi} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^{-1}; \quad (2.2)$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s \rho_w \lambda^{3/2}}{\varkappa(\rho_s - \rho_w)g \text{tg } \varphi} \quad (2.3)$$

( $\rho_w$  — плотность воды;  $\varkappa$  — постоянная Кармана;  $\varphi$  — угол внутреннего трения песка). В случае ровного дна формула (2.2) аналогична наиболее распространенной эмпирической формуле Мейер-Петера и Мюллера (см. [14]), которую можно получить интегрированием закона распределения частиц по глубине, приведенного в работе [15]. Однако для построения решения задачи устойчивости русла этих формул недостаточно. Нужна зависимость (2.2) от функции  $\zeta(t, x)$ , определяющей рельеф донной поверхности, которая может быть получена методами механики сплошной среды.

Таким образом, уравнения (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) образуют замкнутую систему уравнений. Полученная модель согласуется с общепринятыми эмпирическими теориями, обобщается на случай двумерной донной поверхности и достаточно точно описывает размыв берегов канала с откосом [1, 2]. Однако в задаче устойчивости плоской донной поверхности возмущения донной и свободной поверхностей сравнимы по величине. Без учета дополнительного слагаемого в уравнении движения малые возмущения горизонтальной донной поверхности со временем убывают и образования гряд не происходит, тогда как его учет позволяет описать режимы, при которых донные возмущения с определенными длинами волн со временем увеличиваются.

**3. Уточнение формулы расхода наносов.** В работе [1] предложена модель водогрунтовой смеси в тонком придонном слое. Математическая постановка задачи для удельного массового расхода твердых частиц, движущихся в активном придонном слое, включает следующие уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial m} = \rho g, \quad \rho = f \rho_s - (1 - f) \rho_w; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial m} = 0; \quad (3.2)$$

$$\tau = -(\tau_s + \tau_w) \frac{\partial w}{\partial m} / \left| \frac{\partial w}{\partial m} \right| = \tau_s + \tau_w; \quad (3.3)$$

$$\tau_w = \rho_w \kappa^2 (a - m)^2 \left| \frac{\partial w}{\partial m} \right|^2, \quad \tau_s = f(\rho_s - \rho_w) g m \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность смеси твердых частиц и жидкости;  $f$  — объемная концентрация твердых частиц;  $p(m)$ ,  $\tau(m)$ ,  $\rho(m)$ ,  $w(m)$  — функции давления, касательного напряжения, плотности и скорости смеси. Координата  $m$ , направленная вертикально вниз, отсчитывается от верхней границы активного слоя:  $m = 0$  на верхней границе  $z = \zeta(x, t)$  и  $m = a$  на нижней границе (см. рис. 1).

Касательное напряжение смеси  $\tau(m)$  является суммой касательных напряжений жидкой ( $\tau_w(m)$ ) и твердой ( $\tau_s(m)$ ) фаз, для которых приняты соответственно закон Прандтля для турбулентного течения и закон трения Кулона.

Краевые условия можно получить из условия непрерывности скорости и напряжения в результате следующих рассуждений [1, 2].

На верхней границе слоя твердые частицы оказываются во взвешенном состоянии, при этом  $\tau_s = 0$ . Толщина слоя  $a$  мала, поэтому ею можно пренебречь. Следовательно, величина  $\tau(0)$  такая же, как для чистой жидкости на дне, и вычисляется из решения гидродинамической задачи (в отсутствие твердых частиц)  $\tau^0 = \lambda \rho_w V^2$ . Отсюда при  $m = 0$  получаем граничные условия

$$\begin{aligned} \tau(0) &= \tau^0 = \lambda \rho_w V^2; \\ p(0) &= p^0 = \rho_w g (\eta + h - \zeta), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $p^0$  — давление на поверхности  $z = \zeta$ , найденное из решения задачи гидростатики.

При  $m \geq a$  среда покоится:  $w(a) = 0$ . Касательное напряжение не превышает кулоновского трения:  $\tau \leq p_s \operatorname{tg} \varphi$ . В движущейся среде ( $m < a$ ) согласно реологическому закону (3.3)  $\tau = p_s \operatorname{tg} \varphi + \tau_w$ , причем  $\tau_w \geq 0$ . Непрерывность  $\tau$  в точке  $z = a$  возможна только при условии  $\tau_w = 0$ . Таким образом, получаем условие

$$\tau(a) = \tau_s(a) = p_s \operatorname{tg} \varphi, \quad p_s = (\rho_s - \rho_w) g a \quad (3.6)$$

и условие прилипания

$$w(a) = 0.$$

Условие (3.6) рассматривалось в работе [16] в качестве критерия начала движения частиц на нижней границе активного слоя.

Следует отметить существенное различие распределений скорости в рассматриваемой задаче и в задаче в отсутствие частиц, несмотря на идентичность законов турбулентного трения. В случае чистой жидкости вблизи стенки  $\tau_w \approx \operatorname{const}$ , откуда следует логарифмический закон распределения скорости. В случае смеси  $\tau_w$  возрастает пропорционально расстоянию от стенки, поэтому при  $z \approx 0$  закон распределения скорости является линейным.

Из уравнения (3.1) и условия (3.5) следуют выражения для давления  $p$  в активном слое и его производной:

$$p = \rho_w g (\eta + h - \zeta) + m \rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_w g \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right).$$

Из этих выражений получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} + (f \rho_s + \rho_w (1 - f)) g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \rho_w g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(\rho_s - \rho_w) g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) уравнение (3.2) преобразуем к виду

$$\frac{\partial \tau}{\partial m} + \rho_w g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(\rho_s - \rho_w)g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (3.8)$$

Интегрируя по  $m$  уравнение (3.8) с учетом граничного условия (3.6), получим распределение касательного напряжения по толщине активного слоя

$$\tau(m) = \tau^0 - m \left( \rho_w g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(\rho_s - \rho_w)g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

(касательное напряжение на донной поверхности  $\tau^0$  следует определять из уравнений гидродинамики). Согласно принятой модели (1.1), (1.2)  $\tau^0 = \lambda \rho_w V^2$ . Тогда из (3.3), (3.4) следует, что зависимости  $\tau(m)$ ,  $\tau_s(m)$ ,  $\tau_w(m)$  являются линейными. Так как  $\tau_w(0) = \tau^0$ ,  $\tau_w(a) = 0$ , то

$$\tau_w(m) = \tau^0(1 - m/a). \quad (3.9)$$

Используя (3.8) и граничное условие (3.6), найдем толщину активного слоя

$$a = \tau^0 / \left[ \rho_w g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(\rho_s - \rho_w)g \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right]. \quad (3.10)$$

С помощью формул (3.4), (3.9) найдем распределение  $\partial w / \partial m$  по толщине активного слоя

$$\frac{\partial w}{\partial m} = \frac{\sqrt{\tau_w}}{\varkappa \sqrt{\rho_w} (a - m)} = \sqrt{\frac{\tau^0}{\varkappa^2 \rho_w a (a - m)}}. \quad (3.11)$$

В работе [2] показано, что величина расхода  $G$  слабо зависит (а в ряде случаев не зависит [17]) от характера распределения концентрации твердых частиц  $f$  по глубине активного слоя, поэтому значение параметра  $f$  можно принять постоянным. В этом случае удельный массовый расход наносов можно рассчитать с помощью интегрирования по частям, аналогично тому как это выполнено в работе [1]:

$$G = \rho_s f \int_0^a w \, dm = -\rho_s f \int_0^a m \frac{\partial w}{\partial m} \, dm. \quad (3.12)$$

Подставляя в выражение (3.12) формулу (3.11) и интегрируя по толщине активного слоя, получаем выражение для удельного массового расхода наносов

$$G = \rho_s f a \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\tau^0}{\varkappa^2 \rho_w}}. \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) выражение (3.10), окончательно имеем зависимость

$$G = \rho_s \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\tau^0}{\varkappa^2 \rho_w}} \tau^0 f / \left[ \rho_w g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(\rho_s - \rho_w)g \operatorname{tg} \varphi \left( 1 + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Полагая величины  $\partial \zeta / \partial x$ ,  $\partial \eta / \partial x$  малыми, раскладывая по ним уравнение (3.14) и отбрасывая члены, имеющие порядок выше первого, находим

$$G = \rho_s \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\tau^0}{\rho_w}} \frac{\tau^0}{\varkappa(\rho_s - \rho_w)g \operatorname{tg} \varphi} \left( 1 - \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\rho_w \operatorname{ctg} \varphi}{f(\rho_s - \rho_w)} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Подставляя в выражение для  $G$  квадратичный закон  $\tau^0 = \rho_w \lambda V^2$  и линеаризуя его, получаем выражение для удельного массового расхода наносов

$$G = G_0 U^3 \left( 1 + 3 \frac{\zeta - \eta}{h} - \text{ctg} \varphi \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\text{ctg} \varphi}{s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad (3.15)$$

где  $s = f\gamma$ ;  $\gamma = (\rho_s - \rho_w)/\rho_w$ .

В активном слое концентрация песка  $f \approx 0,1$ . Из (3.15) следует, что учет возмущения свободной поверхности дает поправку с весьма значительным коэффициентом  $1/s \approx 10$ .

Подставляя (3.15) в (2.1), получаем линеаризованное уравнение для отметки дна

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + C_0 \sqrt{\frac{g}{h}} \text{Fr}^{3/2} \left( 3h \text{tg} \varphi \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - h^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{h^2}{s} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (3.16)$$

где

$$C_0 = \frac{4}{3} \frac{\lambda^{3/2}}{\varkappa(1 - \varepsilon)\gamma \text{tg}^2 \varphi}. \quad (3.17)$$

**4. Линейная задача развития донных возмущений с использованием уточненной формулы расхода наносов.** Уравнения (1.4), (3.16) образуют замкнутую линейную задачу о развитии малых возмущений донной и свободной поверхностей. Возмущения донной и свободной поверхностей потока  $\zeta$ ,  $\eta$  примем в виде

$$\zeta = \zeta_0 \exp(\sigma t + ikx), \quad \eta = \eta_0 \exp(\sigma t + ikx). \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в уравнения (1.4), (3.16), находим

$$\begin{aligned} (ikh + 3\lambda + \nu_q k^2 h^2) \zeta_0 + (ikh/\text{Fr} - 3\lambda - ikh - \nu_q k^2 h^2) \eta_0 &= 0, \\ (\sigma \sqrt{h/g}/(C_0 \text{Fr}^{3/2}) + 3ikh \text{tg} \varphi + k^2 h^2) \zeta_0 + (k^2 h^2/s - 3ikh \text{tg} \varphi) \eta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Приравнявая к нулю определитель однородной системы (4.2), получаем дисперсионное соотношение

$$\frac{\sigma(k, \text{Fr})}{k^2 h^2 C_0 \text{Fr}^{3/2}} \sqrt{\frac{h}{g}} = -1 + \frac{3s \text{tg} \varphi + (khi + 3\lambda + \nu_q k^2 h^2) \text{Fr}}{s(khi(1 - \text{Fr}) - (3\lambda + \nu_q k^2 h^2) \text{Fr})},$$

которое можно представить в форме

$$\sigma(k, \text{Fr}) = \sigma_d + i\sigma_m,$$

где

$$\frac{\sigma_d}{k^2 h^2 C_0 \text{Fr}^{3/2}} \sqrt{\frac{h}{g}} = -\frac{1+s}{s} - \frac{s \text{Fr} \text{tg} \varphi (9\lambda + 3\nu_q k^2 h^2) - 4k^2 h^2 (1 - \text{Fr})}{sB}; \quad (4.3)$$

$$\frac{\sigma_m}{k^3 h^3 C_0 \text{Fr}^{3/2}} \sqrt{\frac{h}{g}} = -\frac{(3s(1 - \text{Fr}) \text{tg} \varphi + \text{Fr} (3\lambda + \nu_q k^2 h^2))}{sB}, \quad (4.4)$$

$$B = (3\lambda + \nu_q k^2 h^2)^2 \text{Fr}^2 + k^2 h^2 (1 - \text{Fr})^2.$$

Решение (4.3), (4.4), найденное для линеаризованной постановки задачи устойчивости (4.2), позволяет получить следующие важные результаты: без использования дополнительных гипотез определить области формирования и смыва донных форм для различных физико-механических характеристик донных материалов, а также области распространения волн на донной поверхности вниз по потоку (дюны) или против потока (антидюны)

в зависимости от значения числа Фруда и волнового числа  $k$ ; определить характерные длины волн и скорости движения донных возмущений.

Из (4.3) следует, что при  $Fr > 1$  знак “минус” у  $\sigma_m$  меняется на “плюс”. Иными словами, режим дюн, движущихся по направлению потока, меняется на режим антидюн, движущихся против направления потока, что подтверждается в экспериментах при смене гидродинамических режимов потока. Однако при числах Фруда, близких, равных или больших единицы, донные возмущения всегда являются затухающими, поэтому антидюны могут существовать только в ограниченном интервале времени.

**5. Анализ области устойчивости. Длины волн донных возмущений.** Равнинным речным потокам, переносящим песок и мелкий гравий, как правило, соответствуют числа Фруда  $Fr = 0,01 \div 0,10$ , для переноса песка и мелкого гравия в лабораторных лотках требуется течение, которому соответствуют числа Фруда  $Fr = 0,05 \div 0,20$  [12]. Следовательно, представляет интерес асимптотическое разложение решения (4.3) по малому параметру  $Fr$ . Для упрощения анализа этого разложения в выражение для  $\sigma_d$  подставим безразмерное волновое число  $X = k^2 h^2$ . В результате получим

$$\begin{aligned}\sigma_d &= -C_0 Fr^{3/2} \sqrt{g/h} (\sigma_d^0 + Fr \sigma_d^1 + Fr^2 \sigma_d^2 + O(Fr^3)), \\ \sigma_d^0 &= X, \quad \sigma_d^1 = 3X\nu_q \operatorname{tg} \varphi + 9\lambda \operatorname{tg} \varphi - X/s, \\ \sigma_d^2 &= (X\nu_q + 3\lambda)^2/s + 6 \operatorname{tg} \varphi (3\lambda + X\nu_q) - X/s.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Следуя работе [12], будем полагать, что фактически реализуются донные волны с такими волновыми числами, при которых начальная скорость роста амплитуды имеет максимум. Для определения максимальной скорости роста амплитуды найдем производную по  $X$  от  $\sigma_d$  и, приравняв ее к нулю:

$$\frac{\partial \sigma_d}{\partial X} = s + Fr (3s\nu_q \operatorname{tg} \varphi - 1) + Fr^2 (2(X\nu_q^2 + 3\lambda\nu_q) + 6s \operatorname{tg} \varphi \nu_q - 1) = 0,$$

определим максимальное значение безразмерного волнового числа

$$X_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{(1 + 3\nu_q \operatorname{tg} \varphi Fr (1 + 2Fr))s + Fr(6Fr\nu_q\lambda - Fr - 1)}{Fr^2 \nu_q^2}.\quad (5.2)$$

Используя (5.2) и выполняя замену  $X_{\max} = 4\pi^2 h^2/l^2$ , получим асимптотическую оценку длины волны при малых числах Фруда

$$l = \frac{2\sqrt{2} \pi h \nu_q Fr}{\sqrt{Fr(1+Fr) - (1 + 3\nu_q \operatorname{tg} \varphi Fr (1 + 2Fr))s + 6Fr^2 \nu_q \lambda}}.\quad (5.3)$$

Проведено сравнение зависимости (5.3) с экспериментальными данными Хаманна в виде зависимостей длины волны донных возмущений от скорости гидродинамического потока, полученных в лотках (см. [15]). Поскольку Хаманн не указал значения параметров  $\varphi$ ,  $\nu_t$ ,  $\lambda$  для выполненных экспериментов, выбирались значения данных параметров, характерные для песчаных материалов:  $\operatorname{tg} \varphi = 1/2$ ,  $\nu_q = 0,35$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $s = 0,1$ . Сравнение теоретических и экспериментальных данных проводилось для канала глубиной  $h = 0,075$  м в диапазоне скоростей потока  $0,3 \text{ м/с} < U < 0,6 \text{ м/с}$ .

На рис. 2 приведены экспериментальные данные Хаманна (точки) и расчетная кривая, построенная с использованием решения (5.3). В силу того что максимальное различие теоретической асимптотической зависимости (5.3) и экспериментальных данных Хаманна не превышает 6 % при систематической ошибке экспериментальных данных, составляющей 5 % [15], можно утверждать, что полученное асимптотическое решение согласуется с экспериментальными данными не только качественно, но и количественно.

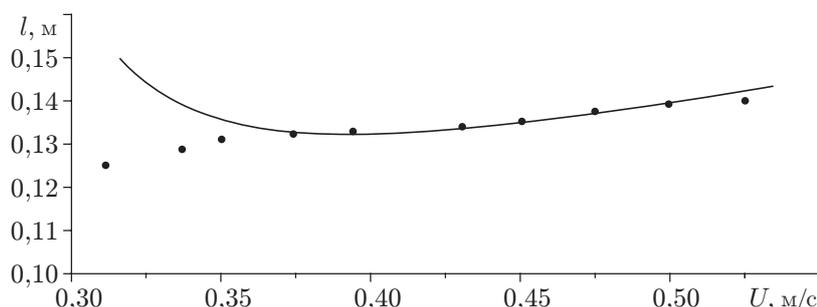


Рис. 2. Экспериментальная (точки) и расчетная (линия) зависимости критической длины волны от скорости потока ( $\lambda = 0,02$ ,  $\nu_* = 0,35$ )

Следует отметить, что в диапазоне скоростей потока  $0,30 \text{ м/с} < U < 0,35 \text{ м/с}$  полученное решение и экспериментальные данные различаются. Это обусловлено тем, что уравнение для удельного массового расхода наносов (3.15) и полученное на его основе уравнение русловых деформаций (3.16) справедливы только для скоростей потока, существенно превышающих скорость начала движения частиц. Таким образом, при скоростях, близких к скорости начала движения частиц, которая согласно данным [15] равна  $U = 0,28 \text{ м/с}$ , расчет по формуле (5.3) должен давать существенные погрешности (см. рис. 2). Полученные результаты свидетельствуют об адекватности сформулированной математической модели (4.2) и сделанного уточнения формулы удельного массового расхода (3.15).

Необходимо сделать замечание относительно параметра безразмерной вязкости  $\nu_q = \nu_t/Q$ . Принимая простую алгебраическую модель речной турбулентности  $\nu_t = \nu_*Q$  [14], можно показать, что параметр безразмерной вязкости является постоянной величиной

$$\nu_q = \nu_*Q/Q = \nu_*$$

определяемой экспериментально. Из анализа функции (5.1) следует, что для чисел Фруда, меньших единицы, имеется спектр длин донных волн, при которых существует область неустойчивости. В длинноволновой части спектра на длины волн растущих возмущений накладывается ограничение  $\sigma_d < 0$ , однако в естественных условиях для рек и каналов, вероятно, существует более жесткое ограничение, связанное с характерным масштабом русла реки. Устойчивость коротких волн существенно зависит от турбулентной вязкости  $\nu_t$  и коэффициента гидравлического сопротивления  $\lambda$ : чем меньше гидравлическое сопротивление и вязкость потока, тем более коротковолновые возмущения донной поверхности могут возникать.

Поскольку величины  $Fr$ ,  $\lambda$ ,  $s$ , входящие в формулу (5.3), малы, ее можно упростить:

$$l = Kh. \tag{5.4}$$

Здесь

$$K = 2\sqrt{2} \pi \nu_q Fr / \sqrt{Fr + Fr^2 - s(1 + 3\nu_q \text{tg } \varphi Fr)}.$$

Формула (5.4) аналогична ряду известных эмпирических зависимостей [18], например формулам Б. Ф. Смищенко и З. Д. Копалиани

$$l = 4,2h, \tag{5.5}$$

К. В. Гришанина

$$l = (2/\lambda)^{1/3}h, \tag{5.6}$$

А. В. Караушева

$$l = 0,44\sqrt{1,4/\lambda + \sqrt{2/(g\lambda)}} h. \tag{5.7}$$

Так как при заданных выше характерных параметрах  $s$ ,  $\nu_q$ ,  $\varphi$  и числе Фруда  $\text{Fr} \simeq s(1 + 3\nu_q \text{tg } \varphi \text{Fr}) - \text{Fr}^2$  диапазон значений коэффициента  $K$  в формуле (5.4) включает весь диапазон значений эмпирических множителей при  $h$ , можно предположить, что формула (5.4) является обобщением формул (5.5)–(5.7).

В случае выполнения условия  $\text{Fr} \gg s(1 + 3\nu_q \text{tg } \varphi \text{Fr}) - \text{Fr}^2$  зависимость (5.4) можно представить в виде

$$l = 2\sqrt{2} \pi \nu_q \sqrt{\text{Fr}} h = 2\sqrt{2} \pi \nu_q \sqrt{\text{Fr}} h = 2\sqrt{2} \pi \nu_q U \sqrt{h/g}$$

или

$$l = K_s U \sqrt{h/g}, \quad (5.8)$$

где  $K_s = 2\sqrt{2} \pi \nu_q$ . При значениях скорости потока, существенно превышающих скорость начала движения частиц, формула (5.8) согласуется с формулой, полученной в работе [15] из теории размерностей:

$$l = C_s (\gamma g d^3 / \nu^2)^{0,1} U \sqrt{h/g}.$$

Здесь  $C_s$  — экспериментально определяемый параметр;  $d$  — диаметр частиц;  $\nu$  — вязкость жидкости.

**6. Определение скорости движения донных возмущений.** Скорость движения донных возмущений  $W = -\sigma_m/k$  определяется из (4.4). Сохраняя в (4.4) только главный член разложения по числу Фруда, получим зависимость, определяющую скорость донных возмущений:

$$W = 3C_0 \text{tg } \varphi \text{Fr}^{3/2} \sqrt{gh} = 3C_0 \text{tg } \varphi U \text{Fr}. \quad (6.1)$$

С учетом (3.17) формулу (6.1) преобразуем к виду

$$W = \frac{4\lambda^{3/2}}{\gamma \varkappa (1 - \varepsilon) \text{tg } \varphi} U \text{Fr}. \quad (6.2)$$

В случае

$$\frac{4\lambda^{3/2}}{\gamma \varkappa (1 - \varepsilon) \text{tg } \varphi} = 0,0188 \quad (6.3)$$

асимптотическая формула (6.2), справедливая при значениях скорости потока, существенно превышающих скорость начала движения частиц, совпадает с известной формулой [19]

$$W = 0,0188 U \text{Fr}, \quad (6.4)$$

результаты расчета по которой согласуются с многочисленными экспериментальными данными [20]. Заметим, что равенство (6.3) выполняется при стандартных средних значениях физико-механических параметров донного материала  $\text{tg } \varphi = 0,5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 0,4$ ,  $\varkappa = 0,4$ ,  $\lambda = 0,0068$ . Однако очевидно, что в реальных потоках значения физико-механических параметров (которые часто даже не фиксируются в экспериментах) могут существенно изменяться, что приводит к существенным отклонениям от эмпирической зависимости (6.4).

Определим зависимость коэффициента гидравлического сопротивления потока  $\lambda$  от числа Фруда  $\text{Fr}$  по приведенной в [12, 21] зависимости со степенным феноменологическим показателем  $n$ , учитывая при этом только гидравлическое сопротивление, вызываемое донными волнами:

$$\lambda^{3/2} = 0,0052 \text{Fr}^{3n/4}. \quad (6.5)$$

Тогда, подставляя (6.5) в (6.2), получим зависимость скорости движения донных волн от физико-механических параметров в общем виде

$$W = \frac{0,0208}{\gamma \varkappa (1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \varphi} U \operatorname{Fr}^{(3n/4)+1},$$

из которой, выбирая значение степенного коэффициента  $n$ , можно получить различные эмпирические формулы (см. [12, 19–21]). Таким образом, асимптотическая формула (6.2), справедливая при малых числах Фруда и значениях скорости потока, существенно превышающих скорость начала движения донных частиц, является обобщением известных эмпирических формул, что подтверждает адекватность сформулированной математической модели.

**7. Моделирование движения одиночного возмущения при малых числах Фруда.** С использованием метода Фурье построим решение задачи о развитии во времени одиночного донного возмущения. С помощью формул (1.3), (4.3) решения задачи представим в виде интеграла Фурье

$$\zeta = \frac{b^2 h}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{b^2 h^2 k^2}{4}\right) \exp((\sigma_d + i\sigma_m)t + ikx) dk. \quad (7.1)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  форма одиночного возмущения описывается зависимостью

$$\zeta = \frac{b^2 h}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{b^2 h^2 k^2}{4}\right) \cos(kx) dk = b \exp\left(-\frac{x^2}{b^2 h^2}\right),$$

где  $b$  — безразмерный коэффициент, определяющий амплитуду единичного возмущения. В силу сложности структуры формул (4.3), (4.4), определяющих параметры  $\sigma_d$  и  $\sigma_m$ , интеграл (7.1) в общем случае можно вычислить только численно. Однако, как отмечено выше, равнинным речным потокам, переносящим песок и мелкий гравий, как правило, соответствуют числа Фруда  $\operatorname{Fr} = 0,01 \div 0,10$ , а для переноса песка и мелкого гравия в лабораторных лотках требуются числа Фруда  $\operatorname{Fr} = 0,05 \div 0,20$  [12]. Следовательно, представляет интерес получение асимптотического решения (7.1) при малых числах Фруда. Разложим решения (4.3), (4.4) в ряд по малым числам Фруда, оставляя в них соответственно два члена ряда

$$\sigma_d = -C_0 \sqrt{g/h} \operatorname{Fr}^{3/2} (3s \operatorname{Fr} \operatorname{tg} \varphi (\nu_q k^2 h^2 + 3\lambda) - k^2 h^2 (\operatorname{Fr} - s)) / s \quad (7.2)$$

и один член ряда

$$\sigma_m = -3C_0 k \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Fr}^{3/2} \sqrt{gh}. \quad (7.3)$$

Используя асимптотики (7.2), (7.3) и интегрируя уравнение (7.1), получим следующее решение:

$$\zeta = b^2 \exp(-9\lambda \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Fr} \tau - (x/h - 3 \operatorname{tg} \varphi \tau)^2 / Z) / \sqrt{Z}. \quad (7.4)$$

Здесь  $\tau = C_0 \operatorname{Fr}^{3/2} \sqrt{g/h} t$  — безразмерное время;  $Z$  — характеристический знаменатель, определяющий тип эволюции донной волны (затухание или рост):

$$Z = b^2 + 4\tau(1 + 3\nu_q \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Fr} - \operatorname{Fr} / s). \quad (7.5)$$

Полагая  $3\nu_q \operatorname{tg} \varphi \ll 1/s$ , выражение (7.5) можно упростить:

$$Z = b^2 + 4\tau(1 - \operatorname{Fr} / s). \quad (7.6)$$

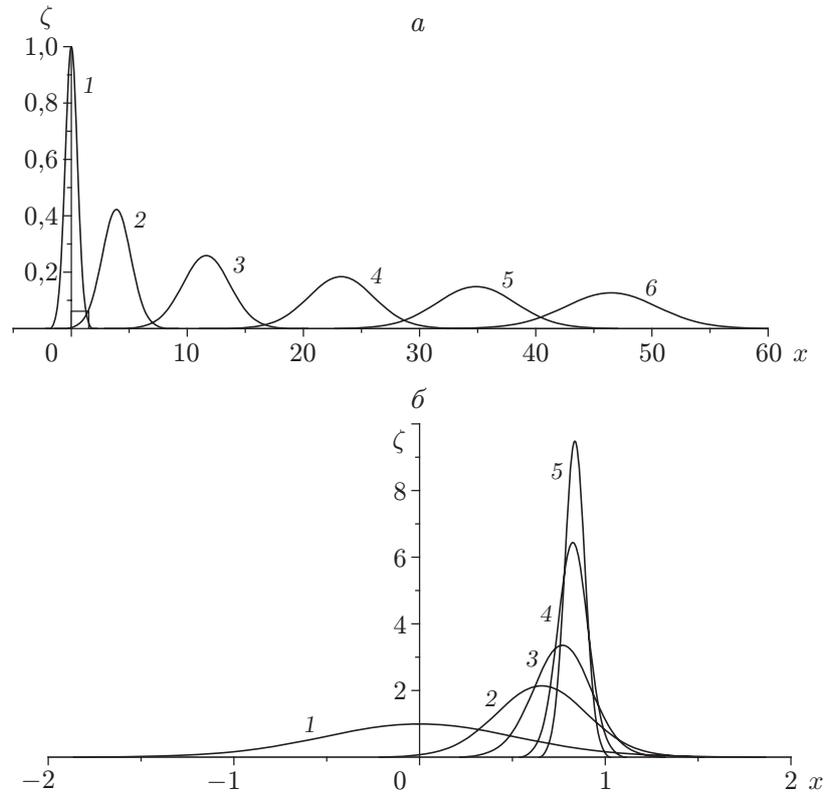


Рис. 3. Эволюция единичного донного возмущения:  
 а —  $Fr = 0,045$  (1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = 100$  с; 3 —  $t = 300$  с; 4 —  $t = 600$  с; 5 —  $t = 900$  с;  
 6 —  $t = 1200$  с); б —  $Fr = 0,09$  (1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = 6$  с; 3 —  $t = 7$  с; 4 —  $t = 7,5$  с; 5 —  
 $t = 7,6$  с)

Из (7.6) следует, что характер эволюции донной волны в основном определяется массовой концентрацией донных наносов  $s$ . Из (7.6) также следует, что донное возмущение является затухающим, если выполняется условие

$$Fr < s,$$

и растущим в случае

$$Fr > s. \quad (7.7)$$

Безусловно, при  $s \approx Fr$  необходимо использовать более точное условие устойчивости

$$Fr \leq (1 + 3\nu_q \operatorname{tg} \varphi Fr)s.$$

На рис. 3 показана эволюция единичного донного возмущения при  $b = 1$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = 1/2$ ,  $s = 0,1$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $h = 1$ ,  $C_0 = 1$ ,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup> и различных значениях числа Фруда. Видно, что при  $Fr = 0,045$  единичное возмущение, распространяющееся в направлении движения гидродинамического потока, затухает (см. рис. 3, а). При этом коротковолновые моды возмущения затухают быстрее длинноволновых, характерная длина волны возмущения увеличивается, вследствие чего размыв донного возмущения асимптотически замедляется. Иная картина наблюдается при выполнении условия (7.7) в случае  $Fr = 0,9$  (см. рис. 3, б). Из (7.4) следует, что скорость роста возмущения пропорциональна квадратному корню гиперболической функции  $Z$ , т. е. очень высока. В реальных ситуациях (см. [10]), когда значение коэффициента  $C_0$  находится в диапазоне  $0,0001 \leq C_0 \leq 0,0100$ , значение скорости формирования возмущений находится в диапазоне от нескольких минут до нескольких

часов; в то же время затухание или установление донных волн происходит существенно медленнее (в диапазоне от нескольких десятков до нескольких тысяч часов).

**Заключение.** В работе сформулирована одномерная задача устойчивости песчаного дна канала прямоугольной формы относительно одномерных по пространству возмущений, в которой использовано уравнение удельного расхода наносов, не содержащее эмпирических параметров.

Проведено обобщение известной формулы расхода наносов, что позволяет учесть влияние возмущений свободной поверхности на перенос наносов.

Решение задачи устойчивости в линеаризованной постановке позволило получить следующие важные результаты. Без использования в модели дополнительных гипотез и эмпирических параметров впервые получены аналитические решения, позволяющие определить области формирования и смыва донных форм при различных физико-механических характеристиках донных материалов, а также области распространения волн на донной поверхности вниз по потоку (дюны) или вверх по потоку (антидюны) в зависимости от значения числа Фруда и волнового числа.

В силу сложности полученного аналитического решения при сравнении его с экспериментальными данными использовались различные асимптотические приближения. Сравнительный анализ асимптотик полученных зависимостей для длин донных волн, начальная скорость роста амплитуды которых имеет максимальное значение, показал, что полученное решение хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Анализ аналитического решения, определяющего скорость движения донных возмущений, показал, что уже первый член ряда в асимптотической формуле для скорости, полученной при малых числах Фруда, обобщает ряд известных эмпирических формул для скорости движения донных возмущений. Таким образом, можно утверждать, что полученная асимптотическая формула подтверждается большим объемом экспериментальных данных, что свидетельствует об адекватности сформулированной математической модели и полученного аналитического решения.

Для малых чисел Фруда построено аналитическое решение задачи об эволюции единичного донного возмущения, из которого получен простой критерий устойчивости донных форм.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров П. Г.** Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 72–75.
2. **Петров А. Г., Петров П. Г.** Вектор расхода наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 102–112.
3. **Лохтин В. М.** О механизме речного русла. Казань: Тип. Домбровского, 1895.
4. **Bingham E. C.** Fluidity and plasticity. N. Y.: McGraw Hill Book Co, 1923.
5. **Франкль Ф. И.** О движении песчаных волн // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89, № 1. С. 29–32.
6. **Маккавеев Н. И.** Русло реки и эрозия в ее бассейне. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
7. **Kennedy J. F.** The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels // J. Fluid Mech. 1963. V. 16, N 4. P. 521–544.
8. **Hayashi T.** Formation of dunes and antidunes in open channels // J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1970. V. 96, N 6. P. 357–366.
9. **Engelund F., Fredsoe J.** Sediment ripples and dunes // Annu. Rev. Fluid Mech. 1982. N 14. P. 13–37.
10. **Католиков В. М., Копалиани З. Д.** Побочни в руслах рек: условия образования и их динамика // Вод. ресурсы. 2001. Т. 28, № 5. С. 579–586.

11. **Taki K., Parker G.** Transportational cyclic steps created by flow over an erodible bed // J. Hydrodynamic Res. 2006. V. 132, N 4. P. 437–438.
12. **Гришанин К. В.** Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
13. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидродинамика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1, 2.
14. **Гришанин К. В.** Теория руслового процесса. М.: Транспорт, 1972.
15. **Шуляк Б. А.** Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М.: Наука, 1971.
16. **Bagnold R. A.** An approach to the sediment transport problem from general physics: US Geolog. Survey Prof. Paper 422-I. S. 1., 1966.
17. **Потапов И. И.** О замыкании уравнения русловых деформаций для несвязного дна. Хабаровск, 2008. (Препр. / ДВО РАН. Вычисл. центр; № 117).
18. **Бутаков А. Н.** Гидравлика развития мезоформ речного русла. М.: Изд-во РУНД, 1999.
19. **Корчоха Ю. М.** Исследования грядового движения наносов на р. Поломети // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1968. Вып. 161. С. 98–122.
20. **Пушкарев В. Ф.** Движение влекаемых наносов // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1948. Вып. 8. С. 93–110.
21. **Никора В. И.** Спектры песчаных волн в поступательном потоке // Метеорология и гидрология. 1983. № 5. С. 92–102.

*Поступила в редакцию 30/I 2009 г.,  
в окончательном варианте — 11/III 2009 г.*

---