СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XX, № 6 НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ 1979

ОТДЕЛ ЗАМЕТОК

УДК 517.11 : 518.5

С. Г. ДВОРНИКОВ

О ПРЕДПОЛНО НУМЕРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Все сведения из теории нумераций, необходимые для понимания этой заметки, можно найти в [1]. Так, известно, что если нумерованное множество $\mathfrak{S}$ предполно, то $P(\mathbf{N}, \mathfrak{S})$, т. е. существует главная вычислимая нумерация семейства морфизмов из $\mathbf{N}$ в $\mathfrak{S}$. Нумерованные множества $\mathfrak{S}$, для которых $P(\mathbf{N}, \mathfrak{S})$, изучались Д. Лакомбом [2] и получили название автогенных. Оказалось, что они обладают многими свойствами, доказанными для предполно нумерованных множеств. В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема. *Если $P(\mathbf{N}, \mathfrak{S})$, то $\mathfrak{S}$ — предполно.*

Таким образом, понятия автогенного и предполно нумерованного множества совпадают. Это является также ответом на вопрос книги [1], с. 328.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mathfrak{S} = (S, \nu)$ — нумерованное множество такое, что $P(\mathbf{N}, \mathfrak{S})$; $\nu_1 : \mathbf{N} \to \mathrm{Mor}(\mathbf{N}, \mathfrak{S})$ — главная вычислимая нумерация; общерекурсивная функция (орф) $f(n, x)$ такова, что $[\nu_1(n)](x) = \nu f(n, x)$.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы, не содержащиеся в [1].

Лемма 1 (*Теорема о неподвижной точке*). *Для любой орф $h(n)$ существует n_0 такое, что $\nu(n_0) = \nu h(n_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим орф $g(x) \leftrightharpoons h(f(x, x))$. Она определяет морфизм $\mu : \mathbf{N} \to \mathfrak{S}$, $\mu(x) = \nu g(x)$, поэтому должно существовать a такое, что $\nu_1(a) = \mu$, или $\nu f(a, x) = \nu g(x)$ для всех x. Положим $n_0 \leftrightharpoons f(a, a)$. Имеем $\nu(n_0) = \nu f(a, a) = \nu g(a) = \nu h(f(a, a)) = \nu h(n_0)$, и лемма 1 доказана.

Следствие. *Для любой орф $g(n, x)$ существует n_0 такое, что для всех x $\nu f(n_0, x) = \nu g(n_0, x)$.*

Доказательство. С функцией $g(n, x)$ свяжем вычислимую нумерацию $\nu' : N \to \mathrm{Mor}(\mathbf{N}, \mathfrak{S})$ так: $[\nu'(n)](x) = \nu g(n, x)$. Поскольку ν_1 — главная нумерация, существует орф $h(n)$ такая, что $\nu'(n) = \nu_1 h(n)$. Известно, что $P(N, \mathfrak{S}) \to P(N, \mathfrak{Mor}(N, \mathfrak{S}))$. Применяя лемму 1 к нумерованному множеству $\mathfrak{Mor}(\mathbf{N}, \mathfrak{S})$ и орф $h(n)$, находим n_0 такое, что $\nu_1(n_0) = \nu_1 h(n_0)$, т. е. для всех x $\nu g(n_0, x) = [\nu'(n_0)](x) = [\nu_1 h(n_0)](x) = \nu f(n_0, x)$. Следствие доказано.

Напомним, что $\gamma : x \mapsto \gamma(x)$ — нумерация всех конечных множеств натуральных чисел, а $\gamma'(x) \leftrightharpoons \gamma(x+1)$ — нумерация всех непустых конечных множеств.

Лемма 2. *Существует орф $c(x)$ такая, что если $\nu(\gamma'(x)) = \{s\}$, т. е. элементы $\gamma'(x)$ являются номерами элемента $s \in S$, то $c(x) \notin \gamma'(x)$ и $\nu c(x) = s$. В частности, каждый класс эквивалентности $\equiv \nu$ бесконечен.*

Доказательство. Поскольку $\gamma'(x)$ сильно вычислима, существуют орф $a(x)$ и $b(x)$ такие, что $a(x) \in \gamma'(x)$ и $b(x) \notin \gamma'(x)$. Определим функцию $g(n, x)$ так:

$$g(n, x) \leftrightharpoons \begin{cases} a(n), & \text{если} \quad f(x, x) \notin \gamma'(n), \\ b(n), & \text{если} \quad f(x, x) \in \gamma'(n), \end{cases}$$

Функция $g(n, x)$ является орф и для некоторой орф $h(n)$ будет иметь $\nu g(n, x) = \nu f(h(n), x)$. Определим

$$c(n) \rightleftharpoons \begin{cases} b(n), & \text{если} \quad f(h(n), h(n)) \in \gamma'(n), \\ f(h(n), h(n)), & \text{если} \quad f(h(n), h(n)) \notin \gamma'(n). \end{cases}$$

Покажем, что определенная таким образом орф $c(n)$ удовлетворяет требованиям леммы.

Непосредственно из определения видно, что $c(n) \notin \gamma'(n)$. Предположим, что $\nu(\gamma'(n)) = \{s\}$. Рассмотрим два случая.

Если $f(h(n), h(n)) \in \gamma'(n)$, то $\nu c(n) = \nu b(n) = \nu g(n, h(n)) = \nu f(h(n), h(n)) = s$.

Если $f(h(n), h(n)) \notin \gamma'(n)$, то $\nu c(n) = \nu f(h(n), h(n)) = \nu g(n, h(n)) = \nu a(n) = s$. Итак, в обоих случаях $\nu c(n) = s$. Лемма 2 доказана.

В силу леммы 2 мы можем в дальнейшем предполагать, что функция $f(n, x)$ монотонна по x, т. е. из $x_0 < x_1$ следует, что $f(n, x_0) < f(n, x_1)$. Обозначим $f_n(x) \rightleftharpoons f(n, x)$. Заметим, что предикат $x \in \rho f_n$ рекурсивен: $x \in \rho f_n \leftrightarrow (\exists y)(f(n, y) = x) \leftrightarrow (\exists y \leqslant x)(f(n, y) = x)$, а последний предикат рекурсивен.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Мы построим вычислимую последовательность орф $g_n(x)$ такую, что для любого n наименьшее отношение эквивалентности η_n такое, что $\langle f_n(x), g_n(x)\rangle \in \eta_n$ для всех $x \in N$ (т. е. $\eta_n = \eta^i_{g_n f_n^{-1}}$) будет предполным; затем применим доказанное следствие к орф $g(n, x) \rightleftharpoons g_n(x)$.

Пусть $k(x)$ — некоторая универсальная функция. Тогда для всех n kf_n^{-1} также универсальна и последовательность $\vartheta_n \rightleftharpoons \eta^i_{kf_n^{-1}}$, $n \in N$ является вычислимой последовательностью нумерационных эквивалентностей некоторых предполно и позитивно нумерованных множеств. Отметим следующее главное для наших целей свойство эквивалентностей ϑ_n:

$$y_0, y_1 \notin \rho f_n \to \langle y_0, y_1\rangle \notin \vartheta_n. \qquad (*)$$

Действительно, $y_0, y_1 \notin \rho f_n \to y_0, y_1 \notin \delta kf_n^{-1}$ и тогда $\langle y_0, y_1\rangle \notin \eta^i_{kf_n^{-1}}$. Функции g_n будут построены так, что $\eta_n = \eta^i_{g_n f_n^{-1}} = \vartheta_n$. До построения фиксируем некоторую равномерную по n процедуру перечисления пар $\langle y_0, y_1\rangle$ таких, что $y_0 \neq y_1$ и $\langle y_0, y_1\rangle \in \vartheta_n$. Во время самого построения и исследования свойств функций g_n индекс n мы будем опускать, поскольку наши инструкции для вычисления g_n равномерно зависят от n.

Построение. Функция g будет построена как объединение возрастающей последовательности конечных сегментов $\varnothing = g^0 \leqslant g^1 \leqslant \ldots \leqslant g^s \leqslant \ldots$, $g = \bigcup g^s$. Каждый g^s будет обладать следующими свойствами:

1) Если $g^s f^{-1}(y_0) = y_1$, то $\langle y_0, y_1\rangle \in \vartheta$.

2) Не существует последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_m$ такой, что $g^s f^{-1}(y_0) = y_1$, $g^s f^{-1}(y_1) = y_2, \ldots, g^s f^{-1}(y_m) = y_0$.

Условие 1) означает, что $\eta^i_{g^s f^{-1}} \subseteq \vartheta$. В силу конечности классов эквивалентности по $\eta^i_{g^s f^{-1}}$ условие 2) эквивалентно тому, что в каждом классе эквивалентности $\eta^i_{g^s f^{-1}}$ есть ровно один элемент z_0 такой, что $g^s f^{-1}(z_0)$ не определено. При этом для всякого y такого, что $\langle z_0, y\rangle \in \eta^i_{g^s f^{-1}}$ существует $m \in N$ такое, что $(g^s f^{-1})^m(y) = z_0$.

Полагаем $g^0 \rightleftharpoons \varnothing$; условия 1) и 2) при этом выполняются очевидным образом.

Предположим, что g^s уже построено и обладает свойствами 1) и 2). Построение g^{s+1} осуществим в два этапа.

Этап 1. Пусть $x_0 \in N$ — минимальное такое, что $g^s(x_0)$ не определено. Вычисляем, пользуясь позитивностью ϑ, некоторое $z_0 \neq f(x_0)$ такое, что $\langle z_0, f(x_0)\rangle \in \vartheta$ и $z_0 \notin \delta g^s f^{-1}$. Полагаем $\bar{g}^s \leftrightharpoons g^s \cup \langle x_0, z_0\rangle$.

Проверим, что $\bar{g}^s$ также удовлетворяет условиям 1) и 2). Действительно, условие 1) выполнено для g^s, а $\bar{g}^s$ отличается от g^s значением на аргументе x_0, поэтому $\bar{g}^s f^{-1}$ отличается от $g^s f^{-1}$ значением на $f(x_0)$. Но $\bar{g}^s f^{-1}(f(x_0)) = \bar{g}^s(x_0) = z_0$ и $\langle z_0, f(x_0)\rangle \in \vartheta$. Поэтому условие 1) выполнено.

Если бы нарушалось условие 2), то один из членов последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_m$, например y_0, был бы равен $f(x_0)$, поскольку для g^s условие выполнено и такой последовательности не существует. Но тогда $\bar{g}^s f^{-1}(y_0)$ должно было бы быть определено, в то время как $\bar{g}^s f^{-1}(y_0) = z_0 \notin \delta \bar{g}^s f^{-1}$ в силу условий на z_0. Поэтому условие 2) для $\bar{g}^s$ также выполнено.

Этап 2. Используя процедуру перечисления эквивалентности ϑ, вычислим очередную пару $\langle y_0, y_1\rangle \in \vartheta$, $y_0 \neq y_1$. Пусть z_0 и z_1 — те числа из классов эквивалентности y_0 и y_1 по $\eta^i_{\bar{g}^s f^{-1}}$, для которых $\bar{g}^s f^{-1}$ не определена. Если $z_0 = z_1$, то $\langle y_0, y_1\rangle \in \eta^i_{\bar{g}^s f^{-1}}$ и мы полагаем $g^{s+1} \leftrightharpoons \bar{g}^s$. Пусть $z_0 \neq z_1$. Мы утверждаем, что тогда хотя бы одно из чисел z_0 и z_1 принадлежит ρf. И действительно, по свойству (*), $z_0, z_1 \notin \rho f \to \langle z_0, z_1\rangle \notin \vartheta$, в то время как $\langle y_0, y_1\rangle \in \vartheta$. Пусть, например, $z_0 \in \rho f$. Тогда $f^{-1}(z_0)$ определено и $x_0 = f^{-1}(z_0) \notin \delta \bar{g}^s$. Положим $g^{s+1} \leftrightharpoons g^s \cup \langle x_0, z_1\rangle$. Если же $z_0 \notin \rho f$, то $z_1 \in \rho f$ и мы полагаем $g^{s+1} \leftrightharpoons \bar{g}^s \cup \langle f^{-1}(z_1), z_0\rangle$.

Выполнение условия 1) для таким образом определенной g^{s+1} следует из того, что, например, в случае $z_0 \in \rho f$ имеем $g^{s+1} f^{-1}(z_0) = z_1$ и $\langle z_0, z_1\rangle \in \vartheta$, а если $z_0 \notin \rho f$, то $g^{s+1} f^{-1}(z_1) = z_0$ и опять $\langle z_0, z_1\rangle \in \vartheta$. Выполнение второго условия также вытекает из $g^{s+1} f^{-1}(z_0) = z_1$ и того, что $g^{s+1} f^{-1}(z_1)$ не определено в случае $z_0 \in \rho f$, а в случае $z_0 \notin \rho f$ — из того, что $g^{s+1} f^{-1}(z_1) = z_0$ и $g^{s+1} f^{-1}(z_0)$ не определено.

На этом построение g^{s+1} завершено. Полагаем $g \leftrightharpoons \bigcup g^s$. В силу этапа 1 построения заключаем, что g — общерекурсивная функция. Из выполнения условия 1) для всех g^s получаем, что $\eta^i_{gf^{-1}} \subseteq \vartheta$. Покажем, что $\vartheta \subseteq \eta^i_{gf^{-1}}$. Пусть $y_0 \neq y_1$ и $\langle y_0, y_1\rangle \in \vartheta$. Рассмотрим шаг $s+1$ построения, на котором в перечислении ϑ появляется пара $\langle y_0, y_1\rangle$. Если на втором этапе имеем $z_0 = z_1$, то $\langle y_0, y_1\rangle \in \eta^i_{\bar{g}^s f^{-1}} \subseteq \eta^i_{gf^{-1}}$. Если $z_0 \neq z_1$, то по построению для некоторых m_0 и m_1 имеем $(\bar{g}^s f^{-1})^{m_0}(y_0) = z_0$, $(\bar{g}^s f^{-1})^{m_1}(y_1) = z_1$ и либо $g^{s+1} f^{-1}(z_0) = z_1$, либо $g^{s+1} f^{-1}(z_1) = z_0$. В обоих случаях заключаем, что $\langle y_0, y_1\rangle \in \eta^i_{g^{s+1} f^{-1}} \subseteq \eta_{gf^{-1}}$. Итак, $\eta^i_{gf^{-1}} = \vartheta$.

Таким образом для каждого $n \in N$ мы построили орф $g_n(x)$ такую, что $\eta^i_{g_n f_n^{-1}} = \vartheta_n$ и последовательность $g_n(x)$ вычислима. По следствию к лемме 1 для орф $g(n, x) \leftrightharpoons g_n(x)$ существует n_0 такое, что для всех x $\nu f(n_0, x) = \nu g(n_0, x)$, откуда нумерационная эквивалентность $\equiv_\nu$ является фактор-эквивалентностью $\eta^i_{g_{n_0} f_{n_0}^{-1}} = \vartheta_{n_0}$, или $\mathfrak{S} = (S, \nu)$ является фактор-множеством предполно нумерованного множества $\mathfrak{S}_0 = \mathbf{N}/\vartheta_{n_0}$, откуда следует, что $\mathfrak{S}$ — предполно. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит участников семинара «Теория нумераций» при НГУ за полезное обсуждение.

Новосибирск,
Институт математики СО АН СССР

Статья поступила
8 августа 1978 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М., «Наука», 1977.
[2] *Lacombe D.* Recursion theoretic structure for relational sistems.— Logic Colloquium 69, Amsterdam — London, North Holland, 1971, 3—17.

УДК 513.7

Т. Г. ИСАНОВ

О ПРОДОЛЖЕНИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ КЛАССА $C^{m,\lambda}$

В настоящей работе рассматривается выпуклая поверхность F_0 класса $C^{m,\lambda}$ $(m \geqslant 2)$ с положительной гауссовой кривизной. Пусть τ — изгибающее поле поверхности F_0. Если поле бесконечно малого изгибания τ поверхности F_0 таково, что для каждой точки $M \in F_0$ существует окрестность $U_M \in F_0$ и аналитическое изгибание этой окрестности в классе $C^{m,\lambda}$ поверхностей, для которого τ является полем скоростей в начальный момент, то будем говорить, что τ локально продолжаемо до аналитического изгибания в соответствующем классе поверхностей.

Справедлива следующая

Теорема. *Всякое бесконечно малое изгибание класса $C^{m,\lambda}$ поверхности положительной гауссовой кривизны локально продолжаемо до аналитического изгибания в классе $C^{m,\lambda}$ поверхностей.*

Эта теорема является обобщением теоремы из статьи ([1]), поэтому методы доказательств этих теорем существенно не отличаются.

Взяв точку $M \in F_0$, рассмотрим ее окрестность $U_M \in F_0$, обладающую свойствами а), б) ([1]) и введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты x, y, z, приняв P_M за плоскость (x, y).

Если x, y, $z(x, y)$ координаты точки из U_M, проектируемой в точку с координатами x, y, то $r_0 = (x, y, z(x, y))$ — функция класса $C^{m,\lambda}(m \geqslant 2)$, $(x, y) \in D$.

Теперь построим семейство $C^{m,\lambda}(m \geqslant 2)$ функций $r^*(x, y; t)$, $(x, y) \in D$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, аналитически зависящих от параметра t и удовлетворяющих условиям:

α) при всяком $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ квадратичная форма $(dr^*)^2$ совпадает с $(dr_0)^2$ всюду в D и, кроме того, $r^*(x, y; 0) = r_0(x, y)$, $(x, y) \in D$;

$$\beta)\ r_t^*(x, y; 0) = \tau(x, y),\ (x, y) \in D.$$

Для этого, в свою очередь (как в ([1])), строится последовательность $\{\rho_n(x, y)\}$ $C^{m,\lambda}$-функций, заданных на D и подчиненных условиям:

1. $\rho_0(x, y) = r_0(x, y)$ на D.
2. $\rho_1(x, y) = {}^1/_2\tau(x, y)$ на D.
3. При любом натуральном $n \geqslant 2$ выполнено уравнение

$$d\rho_0 d\rho_n + \sum_{i=1}^{n-1} d\rho_i d\rho_{n-i} = 0.$$

4. Ряд с общим членом $\|\rho_n\|_{m,\lambda} t^n$ сходится равномерно на D при всех t из некоторого отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Действительно, при этих условиях