ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 34, 1994 № 12

УДК 519.63:533.7

© 1994 г. В. С. САКОВИЧ

(*Москва*)

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ ПРИ ПОМОЩИ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА

Представлена методика решения полной системы уравнений Эйлера, описывающих течение невязкого, нетеплопроводного газа, на неструктурированной сетке в применении к расчету обтекания многозвенного профиля. Для аппроксимации уравнений Эйлера разработана схема, обладающая свойством, названным прямодействием. Такая схема аппроксимации уравнений Эйлера при определенных условиях позволяет иметь дополнительный интеграл, а именно — может обладать свойством сохранения момента количества движения. Решение полученной системы производится явным методом Рунге — Кутты. Для ускорения сходимости итерационного процесса применяется многосеточный метод. Работа алгоритма иллюстрируется на примерах расчетов одно-, двух- и четырехзвенного профиля. Полученные результаты сравниваются с точными решениями для несжимаемой жидкости, а также с результатами расчетов с применением других методов.

Введение

В настоящее время мощности вычислительных машин позволяют решать задачи расчета обтекания весьма сложных по геометрии тел при помощи таких совершенных математических моделей как уравнения Эйлера и Навье — Стокса. Поэтому особую актуальность приобретает разработка вычислительных алгоритмов решения указанных уравнений в сложных, в том числе многосвязных областях. Один из наиболее перспективных способов решения таких задач связан с использованием неструктурированной сетки, представляющей собой триангуляцию области на произвольном множестве опорных точек. Применение неструктурированных сеток не накладывает никаких ограничений на сложность поверхности обтекаемого тела, позволяет полностью автоматизировать процесс генерации расчетной сетки, существенно упрощает алгоритм ее адаптации к получаемому решению. При помощи такого подхода решены задачи расчета невязкого обтекания всего самолета [1], двигателя с воздухозаборником [2], многозвенного профиля [3], компоновки космического самолета [4] и т. д.

В задачах расчета обтекания сложных тел особенно важна проблема оценки качества используемой расчетной сетки и метода аппроксимации исходных уравнений. В случае ортогональной, равномерной в обоих направлениях структурированной сетки сравнительно просто построить схему высокого порядка точности, если искомые функции дифференцируемы достаточное число раз. Когда же имеется произвольная сетка, оказывается очень полезным иметь метод аппроксимации, удовлетворяющий некоторым дополнительным требованиям. К ним, в частности, относятся согласованность с равномерным потоком (ин-

вариантность относительно преобразования Галилея) и переход к сеточным законам сохранения. Этим требованиям удовлетворяют такие наиболее широко используемые методы аппроксимации уравнений Эйлера, как метод конечного объема и метод Галеркина — Петрова. С другой стороны, формальное распространение на произвольные сетки некоторых соотношений, выполняющихся на ортогональных, равномерных сетках, может существенно улучшить аппроксимацию.

В данной работе рассмотрено одно из таких соотношений, названное прямодействием. Оказалось, что дискретный оператор, полученный с применением такой схемы, при выполнении некоторых условий обладает не только свойством консервативности, т. е. свойством сохранения массы, энергии, импульса, но и сохраняет момент количества движения. Причем степень удовлетворения этим условиям характеризуется функционалом, вычисляемым в каждом узле сетки, который может служить для оценки качества расчетной сетки. Полученный таким образом аппроксимационный критерий качества сетки пригоден для широкого класса исходных уравнений.

Схема с прямодействием используется для аппроксимации уравнений Эйлера на неструктурированной сетке в применении к задаче расчета обтекания многозвенного профиля невязким газом. В этой задаче для построения сетки использовался пакет программ [5], в основе которого лежит минимизация функционала, достигающего своего абсолютного минимума на сетках, состоящих из разносто-ронних треугольников.

Полученная в результате аппроксимации система обыкновенных дифференциальных уравнений решается методом установления, реализуемого при помощи многошаговой процедуры Рунге — Кутты, примененной для решения уравнений Эйлера в [6]. При этом в схему добавляется численная диссипация, которая в случае ортогональной равномерной сетки переходит в комбинацию вторых и четвертых разностей по обоим направлениям.

Для ускорения процесса установления обычно берется многосеточный метод. Его реализация на структурированной сетке для уравнений Эйлера в [7] позволила в несколько раз повысить скорость сходимости к стационарному решению. Подобный подход был применен в [8] для нерегулярных сеток. В ней использовалось параллельное решение уравнений движения на ряде сеток различной размерности. Недостатком такого алгоритма является его трудоемкость, связанная как с построением вспомогательных сеток, так и с обменом информацией между различными сетками. В данной работе предложен более простой вариант многосеточного метода, требующий небольших затрат процессорного времени. Он не требует непосредственного построения дополнительных сеток, уравнения на вспомогательных сетках получаются комбинированием исходных уравнений.

Разработанные алгоритмы применены в программе расчета обтекания многоэлементного профиля. С ее помощью произведены расчеты обтекания двухзвенного профиля при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 0.2$, точное решение для несжимаемой жидкости вокруг которого приведено в [9], и четырехзвенного, решение вокруг которого дано в [10]. Сравнение полученного распределения

коэффициента давления с точными данными свидетельствует о качестве полученного решения. Результаты расчетов одноэлементного профиля в трансзвуковом диапазоне скоростей сравниваются с результатами, полученными с использованием структурированных сеток. Для демонстрации эффективности многосеточного алгоритма расчет обтекания четырехзвенного профиля производился с использованием различного числа сеток в многосеточном цикле. Показано, что применение разработанного многосеточного алгоритма позволяет в несколько раз уменьшить затраты процессорного времени, необходимого для получения стационарного решения.

§ 1. Уравнения Эйлера

Параметры плоского течения идеального газа удовлетворяют законам сохранения массы, энергии, импульса, которые в декартовой системе координат x, y могут быть записаны в дивергентном виде:

$$\partial q/\partial t + \partial E/\partial x + \partial F/\partial y = 0. \tag{1.1}$$

Составляющие векторов q, E, F зависят от плотности ρ, проекций скорости u, v на оси координат, давления p и энергии e согласно формулам

$$q = \begin{Vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(e+p) \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{Vmatrix}.$$

В них давление p определяется из уравнения состояния совершенного газа с показателем адиабаты γ

$$p = (\gamma - 1)\left[e - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)\right].$$

В стационарных течениях без подвода тепла и с постоянной энтальпией вверх по потоку выполняется соотношение

$$\frac{e+p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\gamma M_\infty^2}{2} = H_\infty.$$

Задача решается в ограниченной многосвязной области Ω (x, y). Ее внутренней границей является поверхность обтекаемого тела или совокупность поверхностей обтекаемых тел, на которых ставится условие непротекания. Внешняя граница близка к окружности с радиусом, на порядок бо́льшим, чем характерный размер обтекаемого тела. На ней ставится условие локального неотражения для инвариантов Римана, вычисленных по нормали к границе, как в [6]. При этом на части границы, где поток втекает в область расчета, задаются величина энтропии, тангенциальная скорость v_τ и инвариант Римана

$$R_{ext} = v_n + \frac{2a}{\gamma - 1},$$

где a — скорость звука вдоль характеристики, приходящей в точку границы из

внешней области по нормали к границе со скоростью v_n. Второй инвариант Римана

$$R_{\text{int}} = v_n - \frac{2a}{\gamma - 1}$$

экстраполируется на границу из области расчета. На части границы, где поток вытекает из области, задается только R_{ex}, а R_{int}, энтропия и тангенциальная скорость экстраполируются из области расчета. При этом учитывается циркуляционный характер течения на больших расстояниях путем добавления в выражение для скорости вне расчетной области соответствующего члена, зависящего от коэффициента подъемной силы. Как показано в [11] и подтверждено численными расчетами, такая постановка граничных условий на внешней границе существенно снижает зависимость получаемого решения от размера расчетной области, что позволяет получать достаточно точные результаты на сетках, внешняя граница которых удалена на 8—10 хорд от поверхности профиля. Условие Чаплыгина — Жуковского, необходимое для выделения единственного решения стационарной задачи, непосредственно не ставится. Оно реализуется автоматически, если решение, как это обычно бывает, ищется при помощи диссипативных схем в классе ограниченных функций.

§ 2. Аппроксимация уравнений Эйлера

Чаще всего для аппроксимации уравнений Эйлера на структурированных сетках используются два метода, называемые методом конечного объема и методом конечного элемента. Метод конечного объема, например [6], основан на кусочно-постоянном представлении векторов q, E, F в каждой ячейке сетки, являющейся также и контрольным объемом, на границе которого величины потоков E и F вычисляются путем осреднения их значений из прилежащих ячеек. Такой метод аппроксимации приводит к следующим сеточным уравнениям:

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad & J_{i+1/2,\,k+1/2}\frac{dq_{i+1/2,\,k+1/2}}{dt} + \frac{1}{2}\,[E_{i+1/2,\,k-1/2}\,(y_{i+1,\,k} - y_{ik}) - F_{i+1/2,\,k-1/2}\,(x_{i+1,\,k} - x_{ik}) + \\ & + E_{i+3/2,\,k+1/2}\,(y_{i+1,\,k+1} - y_{i+1,\,k}) - F_{i+3/2,\,k+1/2}\,(x_{i+1,\,k+1} - x_{i+1,\,k}) + \\ & + E_{i+1/2,\,k+3/2}\,(y_{i,\,k+1} - y_{i+1,\,k+1}) - F_{i+1/2,\,k+3/2}\,(x_{i,\,k+1} - x_{i+1,\,k+1}) + \\ & + E_{i-1/2,\,k+1/2}\,(y_{ik} - y_{i,\,k+1}) - F_{i-1/2,\,k+1/2}\,(x_{ik} - x_{i,\,k+1})\,] = 0.\end{aligned}$$

Здесь J — площадь ячейки сетки.

Другим весьма распространенным методом получения сеточных уравнений является метод Галеркина — Петрова. Он основан на представлении функций E и F на базисе, состоящем из билинейных функций-«крышечек», а пространство проецирования невязки состоит из кусочно-постоянных функций, принимающих единичное значение в ячейках, примыкающих к точке сетки и нулевое — во всей остальной области. Это представление искомых функций и пространства проецирования невязки позволяет точно вычислить скалярное произведение, определяемое как интеграл по всей расчетной области от произведения функций.

Производная по времени обычно берется от функций в центральной точке. Такая схема была применена, например, в [12] и приводит к следующим сеточным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad & J_{ik}\frac{dq_{ik}}{dt}+\frac{1}{2}\,[E_{i+1,k}\,(y_{i+1,k+1}-y_{i+1,k-1})-F_{i+1,k}\,(x_{i+1,k+1}-x_{i+1,k-1})+\\
&+E_{i+1,k+1}(y_{i,k+1}-y_{i+1,k})-F_{i+1,k+1}(x_{i,k+1}-x_{i+1,k})+E_{i,k+1}\,(y_{i-1,k+1}-y_{i+1,k+1})-\\
&-F_{i,k+1}\,(x_{i-1,k+1}-x_{i+1,k+1})+E_{i-1,k+1}\,(y_{i-1,k}-y_{i,k+1})-F_{i-1,k+1}(x_{i-1,k}-x_{i,k+1})+\\
&+E_{i-1,k}(y_{i-1,k-1}-y_{i-1,k+1})-F_{i-1,k}(x_{i-1,k-1}-x_{i-1,k+1})+E_{i-1,k-1}(y_{i,k-1}-y_{i-1,k})-\\
&-F_{i-1,k-1}(x_{i,k-1}-x_{i-1,k})+E_{i,k-1}(y_{i+1,k-1}-y_{i-1,k-1})-F_{i,k-1}\,(x_{i+1,k-1}-x_{i-1,k-1})+\\
&+E_{i+1,k-1}\,(y_{i+1,k}-y_{i,k-1})-F_{i+1,k-1}\,(x_{i+1,k}-x_{i,k-1})\,]=0.
\end{aligned}
$$

Где J_i — площадь ячеек сетки, примыкающих к точке i.

Таким образом, для обоих методов приходим к следующим сеточным уравнениям, аппроксимирующим исходные в точке i:

$$(2.3)\qquad J_i\frac{dq_i}{dt}+\sum_{n=1}^{N}[A_{in}E_n+B_{in}F_n]=0;$$

здесь N — количество точек в шаблоне, A_{in} и B_{in} — метрические коэффициенты.

Ниже рассматривается, каким соотношениям удовлетворяют метрические коэффициенты A_{in}, B_{in}, полученные при помощи указанных методов (2.1), (2.2). Оба они являются консервативными и обладают свойством согласованности с равномерным потоком, т. е. параметры q, E, F, соответствующие равномерному потоку, дают точное решение сеточных уравнений. Это достигается выполнением следующих условий:

$$(2.4)\qquad \sum_{n=1}^{N}A_{in}=\sum_{n=1}^{N}B_{in}=0.$$

§ 3. Схема с прямодействием

Рассмотрим матрицы метрических коэффициентов A_{in} и B_{in}. Если их вычислять с использованием (2.1), то они являются антисимметричными, если же использовать формулу (2.2) — то антисимметричными в случае нечетных n. На ортогональных, равномерных по обоим направлениям сетках оба метода приводят к антисимметричным матрицам метрических коэффициентов. Ортогональной сеткой здесь названа сетка, образованная двумя семействами параллельных прямых, ортогональных между собой. Поэтому в дальнейшем рассмотрение будет ограничиваться схемами, в которых

$$A_{in}=-A_{ni},\quad B_{in}=-B_{ni}.$$

При удовлетворении условия (2.4) такая антисимметричность является до-

статочным условием консервативности схемы, поскольку она в этом случае может быть записана в следующем виде:

$$J_i \frac{dq_i}{dt} + \sum_{n=1}^{N} Q_{in} = 0, \tag{3.1}$$

$$Q_{in} = A_{in}E_n + B_{in}F_n - A_{ni}E_i - B_{ni}F_i,$$

$$Q_{in} = -Q_{ni}.$$

Рассмотрим теперь вектор $S_{in} = (A_{in},\ B_{in})$. Если его вычислить с применением описанных методов на ортогональных, равномерных, с равным шагом в обоих направлениях сетках, он оказывается параллелен отрезку $(x_n - x_i,\ y_n - y_i)$ и направлен в ту же сторону:

$$A_{in} = C_{in}\Delta x_{in}, \qquad B_{in} = C_{in}\Delta y_{in}, \tag{3.2}$$

$$\Delta x_{in} = x_n - x_i, \qquad \Delta y_{in} = y_n - y_i, \qquad C_{in} \geq 0.$$

Поэтому кажется очень привлекательным сохранить это свойство схем, названное прямодействием, на случай произвольных сеток, что приводит к следующему виду сеточных уравнений:

$$J_i \frac{dq_i}{dt} + \sum_{n=1}^{N} C_{in}\,(E_n\Delta x_{in} + F_n\Delta y_{in}) = 0. \tag{3.3}$$

Оценим порядок аппроксимации, даваемый формулой (3.3). Для этого используем разложение по формуле Тейлора функций E и F в точке i

$$J_i \frac{dq_i}{dt} + \sum_{n=1}^{N} C_{in}\,[(E_i + \Delta x_{in}E_x + \Delta y_{in}E_y + \cdots)\,\Delta x_{in} + (F_i + \Delta x_{in}F_x +$$

$$+ \Delta y_{in}F_y + \cdots)\,\Delta y_{in}] = E_iR_x + F_iR_y + (E_x + F_y)\,J + (E_y + F_x)\,R_{xy} +$$

$$+ (E_x - F_y)\,R_{xx} + \cdots = 0,$$

где

$$R_x = \sum_{n=1}^{N} C_{in}\Delta x_{in}, \qquad R_y = \sum_{n=1}^{N} C_{in}\Delta y_{in},$$

$$R_{xy} = \sum_{n=1}^{N} C_{in}\Delta x_{in}\Delta y_{in}, \qquad R_{xx} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} C_{in}\,(\Delta x_{in}^2 - \Delta y_{in}^2),$$

$$J = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} C_{in}\,(\Delta x_{in}^2 + \Delta y_{in}^2).$$

Равенство R_x и R_y нулю означает согласованность квадратурной формулой с равномерным потоком. Поэтому необходимо, чтобы

(3.4) $$R_x = R_y = 0.$$

Для того чтобы (3.3) давала аппроксимацию исходных уравнений порядка μ, необходимо, чтобы

(3.5) $$R_{xy} = O(h^{2+\mu}), \qquad R_{xx} = O(h^{2+\mu}),$$

где h — характерный размер ячейки сетки.

Величина J не зависит от системы координат, т. е. она инвариантна относительно преобразования поворота. Существует еще один инвариант. Нетрудно показать, что величина

$$I_2 = \sqrt{R_{xy}^2 + R_{xx}^2}$$

также не изменяется при переходе в систему координат, повернутую относительно исходной на некоторый угол. Поэтому ее удобно использовать как критерий качества расчетной сетки. Погрешность аппроксимации, связанная с коэффициентом I_2, является следствием многомерности решаемой задачи, ее никаким образом нельзя проиллюстрировать на одномерном примере. Величина I_2 представляет собой меру того, насколько коэффициент при E_x в формуле (3.3) отличается от коэффициента при F_y, а также насколько велики коэффициенты при E_y и F_x. Важным достоинством схемы с прямодействием является то, что все это можно описать одной положительной функцией, вычисляемой в каждом узле сетки. При этом если $I_2 = O(h^2)$, то формула (3.3) не аппроксимирует исходное уравнение; если же $I_2 = 0$, то полученная аппроксимация уравнения получается как минимум первого порядка. Поэтому важнейшей задачей является задача получения сеток, дающих минимальное значение I_2. Очень удобно использовать безразмерную величину

$$\overline{I}_2 = I_2/J,$$

которая может изменяться в пределах от нуля до единицы, если величины C_{in} положительны.

Покажем, что схема с прямодействием при нулевом значении коэффициента I_2 обладает дополнительным интегралом, т. е. дискретная модель означает не только сохранение массы, энергии и импульса, но и момента количества движения. Закон сохранения момента количества движения является следствием уравнений Эйлера (1.1) и может быть записан следующим образом:

$$dM/\partial t + \partial\Phi/\partial x + \partial\chi/\partial y = 0,$$

где $M = \rho uy - \rho vx$, $\Phi = uM + py$, $\chi = vM - px$.

Аналогично комбинируя дискретные уравнения (2.3), получаем

$$J_i \frac{dM_i}{dt} + \sum_{n=1}^{N} [A_{in}\rho_n u_n(u_n y_i - v_n x_i) + A_{in} p_n y_i + B_{in}\rho_n v_n (u_n y_i - v_n x_i) - B_{in} p_n x_i] = 0,$$

которое в случае антисимметричных A_{in}, B_{in} и при выполнении условий

$$A_{in}\Delta y_{in} - B_{in}\Delta x_{in} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{N} (A_{in}\Delta x_{in} - B_{in}\Delta y_{in}) = 0, \tag{3.6}$$

$$\sum_{n=1}^{N} A_{in}\Delta y_{in} = \sum_{n=1}^{N} B_{in}\Delta x_{in} = 0$$

может быть записано, аналогично (3.1), в консервативном виде:

$$J_i \frac{dM_i}{dt} + \sum_{n=1}^{N} Q_{in} = 0, \qquad Q_{in} = -Q_{ni},$$

где $Q_{in} = A_{in}\Phi_n + B_{in}\chi_n - A_{ni}\Phi_i - B_{in}\chi_i$.

Первое условие (3.6) означает выполнение соотношения (3.2), второе и третье при выполнении первого означают равенство нулю коэффициентов R_{xy} и R_{xx}.

§ 4. Неструктурированная сетка

Применение неструктурированных сеток основывается на триангуляции расчетной области, т. е. заполнении ее треугольниками (или тетраэдрами в трехмерном случае) без нахлестов и зазоров, и в последующем решении на них исходных уравнений.

Задача разбиения области на треугольники с вершинами в заданных точках имеет много решений. Однако если никакие четыре точки данного множества не лежат на одной окружности, существует единственная триангуляция, для которой описанная окружность около любого треугольного элемента не содержит внутри себя других точек. Такая триангуляция называется триангуляцией Делоне.

Диаграмма Вороного двойственна триангуляции Делоне и состоит из ячеек Вороного. Ячейка Вороного с центром в данной точке состоит из всех точек плоскости, расположенных ближе к этой точке, чем к любой другой точке данного множества. Диаграмма Вороного состоит из отрезков прямых, соединяющих центры окружностей, описанных около соседних треугольников.

В данном параграфе показано, что величины коэффициентов C_{in}, а также соотношения для них (3.4), (3.5) имеют достаточно универсальный характер, что позволяет использовать их и для аппроксимации других уравнений, описывающих законы сохранения. Более того, рассмотрение простейших операторов (в данном случае оператора Лапласа) позволяет упростить алгоритм вычисления C_{in}.

Итак, рассмотрим аппроксимацию оператора Лапласа на нерегулярной сетке. Для этого проинтегрируем его по контрольному объему, представляющему собой ячейку Вороного Ω_i^w с границей $\partial\Omega_i^w$. Считая функцию φ линейной в каждом

треугольнике, такой интеграл можно вычислить точно, получив следующую формулу:

$$L_i(\varphi) = \iint\limits_{\Omega_i^w} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right) dx\, dy = \oint\limits_{\partial\Omega_i^w} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx \right) = \tag{4.1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} D_{in} (\varphi_n - \varphi_i).$$

Оценим погрешность аппроксимации, даваемой формулой (4.1). Для этого разложим функцию φ по формуле Тейлора в точке i:

$$L(\varphi) = \sum_{n=1}^{N} D_{in}(\varphi_i + \varphi_x \Delta x_{in} + \varphi_y \Delta y_{in} + \varphi_{xx}\Delta x_{in}^2/2 + \varphi_{xy}\Delta x_{in}\Delta y_{in} + \varphi_{yy}\Delta y_{in}^2/2 + \cdots - \varphi_i) =$$

$$= \varphi_x T_x + \varphi_y T_y + J(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})/2 + T_{xx}(\varphi_{xx} - \varphi_{yy})/2 + T_{xy}\varphi_{xy} + \cdots,$$

где

$$T_x = \sum_{n=1}^{N} D_{in}\Delta x_{in}, \qquad T_y = \sum_{n=1}^{N} D_{in}\Delta y_{in},$$

$$J = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} D_{in}(\Delta x_{in}^2 + \Delta y_{in}^2),$$

$$T_{xy} = \sum_{n=1}^{N} D_{in}\Delta x_{in}\Delta y_{in},$$

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} D_{in}(\Delta x_{in}^2 - \Delta y_{in}^2).$$

Причем T_x, T_y, полученные с использованием D_{in} из (4.1), равны нулю и если формула (4.1) дает аппроксимацию оператора Лапласа порядка μ, должны быть выполнены следующие соотношения:

$$T_{xy} = O(h^{2+\mu}), \qquad T_{xx} = O(h^{2+\mu}).$$

Эти соотношения аналогичны условиям (3.4), (3.5) для C_{in}, что позволяет использовать коэффициенты D_{in} и для аппроксимации уравнений Эйлера. Полученные таким образом величины C_{in} неотрицательны, если триангуляция является триангуляцией Делоне, за исключением, может быть, случая, когда отрезок (i, n) принадлежит границе триангулируемой области.

Нетрудно проверить, что точно такая же аппроксимация уравнений Эйлера дается методом Галеркина — Петрова, если в качестве контрольного объема выбрать ячейку Вороного, а контурный интеграл по ее поверхности вычислять по формуле прямоугольников с опорными точками в серединах ребер сетки.

Рассмотрим неструктурированную сетку, узлы которой совпадают с узлами ортогональной, равномерной сетки, одно из направлений которой для простоты совпадает с направлением оси абсцисс. Задача построения триангуляции Делоне

в таком случае имеет множество решений, одно из которых изображено на фиг. 1. Коэффициенты C_{in} для такой триангуляции согласно (4.1) таковы:

$$C_{52} = C_{58} = \frac{h_2}{2h_1}, \qquad C_{54} = C_{56} = \frac{h_1}{2h_2}, \qquad C_{51} = C_{59} = 0,$$

что приводит к обычной пятиточечной схеме на шаблоне типа «крест»:

$$h_1 h_2 \frac{dq_5}{dt} + (E_6 - E_4)\frac{h_1}{2} + (F_8 - F_2)\frac{h_2}{2} = 0.$$

Таким образом, разработанная схема преодолевает проблему неединственности триангуляции Делоне. Важно отметить, что для такой сетки мы имеем нулевое значение коэффициента I_2. Также нулевое значение I_2 дают сетки, состоящие из равносторонних треугольников. В данной работе задача уменьшения I_2 непосредственно не решалась. Применялись сетки, близкие к сетке, состоящей из равносторонних треугольников. Такие сетки позволили получить неплохие результаты при решении уравнений Эйлера.

§ 5. Решение уравнений Эйлера

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) производится при помощи явной четырехшаговой процедуры Рунге — Кутты, позволяющей по значениям параметров q_n на временно́м слое t_n получить значения параметров q_{n+1} на следующем временно́м слое t_{n+1} по формулам

$$q^{(1)} = q_n - \alpha_1 \frac{\tau}{J}\,[R(q_n) + D(q_n)],$$

$$q^{(2)} = q_n - \alpha_2 \frac{\tau}{J}\,[R(q^{(1)}) + D(q_n)],$$

$$q^{(3)} = q_n - \alpha_3 \frac{\tau}{J}\,[R(q^{(2)}) + D(q_n)],$$

$$q_{n+1} = q_n - \frac{\tau}{J}\,[R(q^{(3)}) + D(q_n)],$$

где τ — шаг по времени, выбираемый для каждого узла близким к максимальному, исходя из требований теории устойчивости, $R(q)$ невязка,

$$R(q) = \sum_{n=1}^{N} C_{in}(E_n \Delta x_{in} + F_n \Delta y_{in}),$$

$$\alpha_1 = 0.25, \qquad \alpha_2 = 0.5, \qquad \alpha_3 = 0.55,$$

$D(q)$ — диссипативный член, необходимый для обеспечения устойчивости вычислительного алгоритма и для подавления осцилляций вблизи скачков уплотнения,

$$D(q) = \sum_{n=1}^{N} d_{in},$$

где суммирование ведется по всем точкам, входящим в шаблон:

$$d_{in} = \varepsilon_{in}^{(2)} (q_n - q_i) - \varepsilon_{in}^{(4)} (q_n^* - 3q_n + 3q_i - q_i^*).$$

Здесь

$$\varepsilon_{in}^{(2)} = C_{in}\Delta r_{in}\varepsilon_2, \qquad \varepsilon_{in}^{(4)} = C_{in}\Delta r_{in}\varepsilon_4,$$

$$\varepsilon_2 = k_2 \max (dp_i, dp_n), \qquad \varepsilon_4 = \max (0, k_4 - \varepsilon_2),$$

$$k_2 = 2, \quad k_4 = 0.025,$$

где

$$\Delta r_{in}^2 = \Delta x_{in}^2 + \Delta y_{in}^2, \quad dp_i = |p_i^* - 2p_i + p_n| / (p_i^* + 2p_i + p_n),$$

причем q_i^*, p_i^* — значения параметров в фиктивной ячейке, вычисляемые по следующим формулам:

$$q_i^* = q_n + 2 \operatorname{grad} q|_i \Delta r_{in}, \qquad p_i^* = p_n + 2 \operatorname{grad} p|_i \Delta r_{in}. \tag{5.1}$$

Отметим, что производные в (5.1) вычисляются аналогично (3.3)

$$\frac{\partial q}{\partial x}\Big|_i \approx \frac{1}{J}\sum_{k=1}^{N} C_{ik} q_k \Delta x_{ik}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y}\Big|_i \approx \frac{1}{J}\sum_{k=1}^{N} C_{ik} q_k \Delta y_{ik}.$$

На ортогональной, равномерной сетке, где разработанная схема представляет собой обычную центрированную схему на шаблоне типа «крест», диссипативный член будет представлять линейную комбинацию вторых и четвертых разностей по обоим направлениям. Похожий метод был использован для построения односторонних схем в [13], [14].

Для ускорения процесса установления применяется энтальпийное демпфирование, подробно описанное, например в [6]. Оно основано на том, что энтальпия в стационарном, адиабатическом, невязком течении с постоянной энтальпией на бесконечности остается постоянной во всем поле потока. Энтальпийное демпфирование заключается в том, что в параметры потока после каждой итерации вводится поправка

$$q' = q + \varepsilon \frac{H_\infty - H}{\partial H / \partial q}, \qquad \varepsilon = 0.02 \div 0.03,$$

приближающая значение энтальпии к H_∞, что позволяет улучшить характеристики итерационного процесса.

§ 6. Многосеточный метод

Одним из наиболее эффективных способов ускорения установления решения системы нестационарных уравнений Эйлера является многосеточный метод. Он основан на представлении погрешности начального приближения в виде суперпозиции волн различной длины, которые с течением времени должны быть вынесены из области интегрирования или диссипированы. В рассматриваемой

схеме эффективно подавляется только коротковолновая часть погрешности, поэтому время установления определяет перенос длинноволновой ее части. Его можно уменьшить за счет увеличения шага по времени при аппроксимации уравнений на более грубых сетках, что приводит к использованию в решении наряду с основной сеткой ряда вспомогательных сеток, существенно меньшей размерности.

Рассмотрим двухсеточный алгоритм. Если исходная сетка структурированная, то вспомогательная образуется простым удалением из исходной сетки ряда сеточных поверхностей в каждом направлении, например, каждой второй сеточной поверхности. В случае неструктурированной сетки вспомогательная может быть построена дополнительно, как в [8], что приводит к существенным затратам процессорного времени, необходимого как для построения вспомогательной сетки, так и для установления связей между сетками, основанного на процедуре поиска.

В настоящей работе представлен многосеточный алгоритм, в котором уравнения на вспомогательной сетке получаются простым комбинированием исходных уравнений. Для этого сетка разбивается на связные подобласти Ω_I, каждая из которых содержит 3—8 точек сетки.

Решение исходной системы сеточных уравнений будем искать в виде

$$q_i = q_I + \Delta q_{iI}, \qquad E_i = E_I + \Delta E_{iI}, \qquad F_i = F_I + \Delta F_{iI},$$

где значения q_I, E_I, F_I общие для подобласти с номером I, в которой находится точка i, $E_I = E(q_I)$, $F_I = F(q_I)$, а величины Δq_{iI}, ΔE_{iI}, ΔF_{iI} достаточно малы.

Суммируя уравнения (3.3) в точках, принадлежащих подобласти Ω_I, получаем

$$J_I \frac{dq_I}{dt} + R(q_I) + P_I = 0, \tag{6.1}$$

где

$$J_I = \sum_{\Omega_I} J_i, \qquad q_I = \frac{1}{J_I} \sum_{\Omega_I} J_i q_i,$$

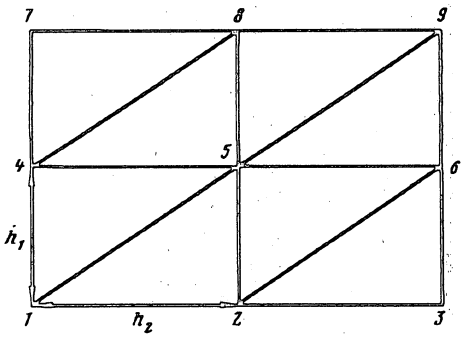
$$R(q_I) = \sum_{K=1}^{K_{\max}} A_{IK} E_K + B_{IK} F_K,$$

а P_I зависит от $d\Delta q_{iI}/dt$, ΔE_{iI}, ΔF_{iI} и может быть вычислен следующим способом:

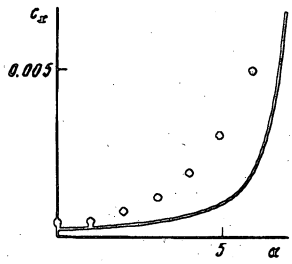
$$P_I = \sum_{\Omega_I} R(q_i) - R(q_I).$$

Многошаговый метод Рунге — Кутты применяется для решения уравнений (6.1). При этом поправка к невязке P_I вычисляется только перед началом многошаговой процедуры. Полученное на грубой сетке приращение параметров Δq сглаживается при помощи решения следующей системы линейных уравнений методом Якоби:

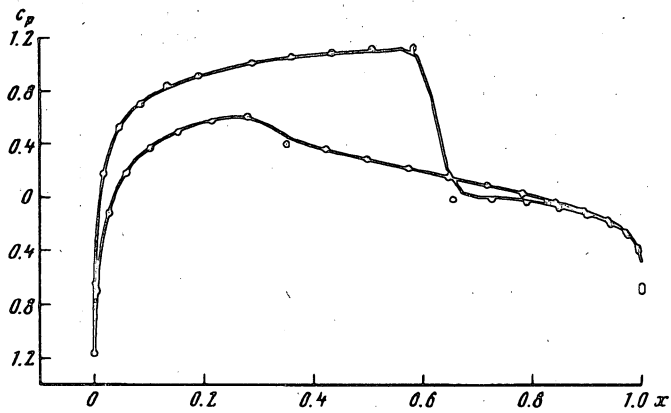
$$\Delta\overline{q} - (\varepsilon/Ct)\, L(\Delta\overline{q}) = \Delta q,$$



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

где $L(q)$ — аппроксимация оператора Лапласа (4.1), $\varepsilon = 0.5$,

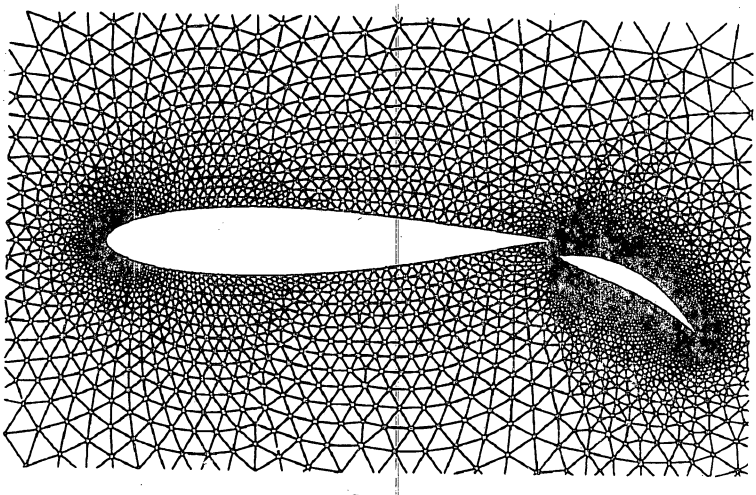
$$Ct = \sum_{n=1}^{N} C_{in}.$$

Сглаженное приращение $\Delta\bar{q}$ складывается с q.

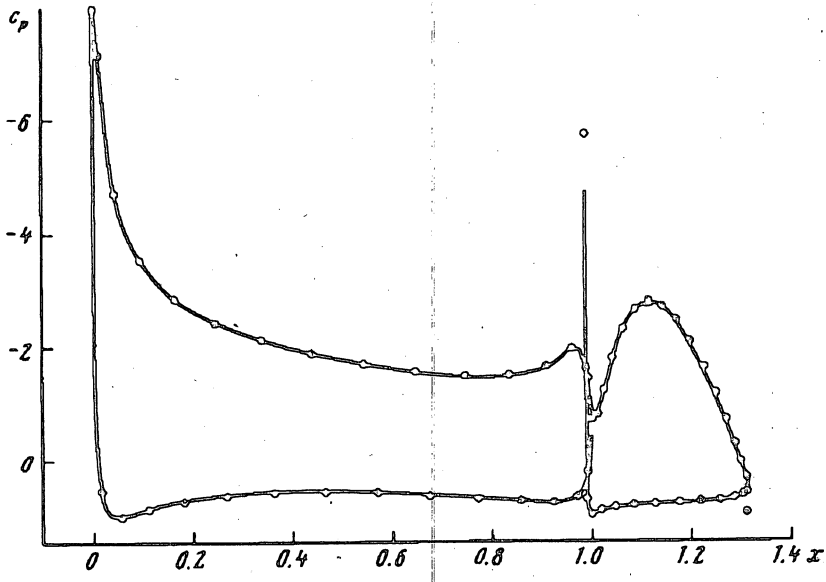
Описанный алгоритм можно продолжить за счет перехода к еще более грубым сеткам. Используемая стратегия многосеточного цикла заключается в последовательном переходе на более грубые сетки, одном временно́м шаге на каждой из них и интерполяции результатов от самой грубой до самой мелкой. В работе используется трехсеточный алгоритм.

§ 7. Результаты расчетов

В качестве примера приводятся расчеты обтекания одно-, двух- и четырехэлементного профилей. Результаты расчетов одноэлементного профиля сравниваются с данными, полученными на структурированной сетке. Течение вокруг многоэлементного профиля находится при $M_\infty = 0.2$, когда влияние сжимаемости незначительно, и сравнивается с точным решением несжимаемой жидкости. Начальное распределение узлов сетки дается структурированной сеткой



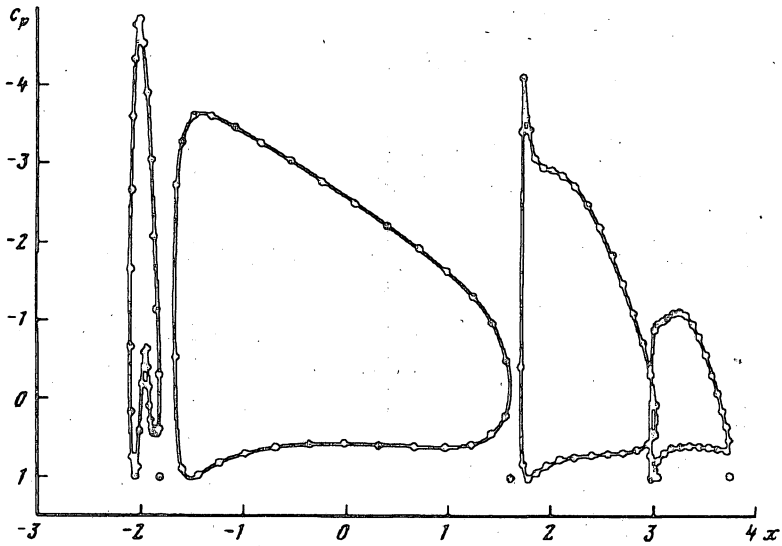
Фиг. 4



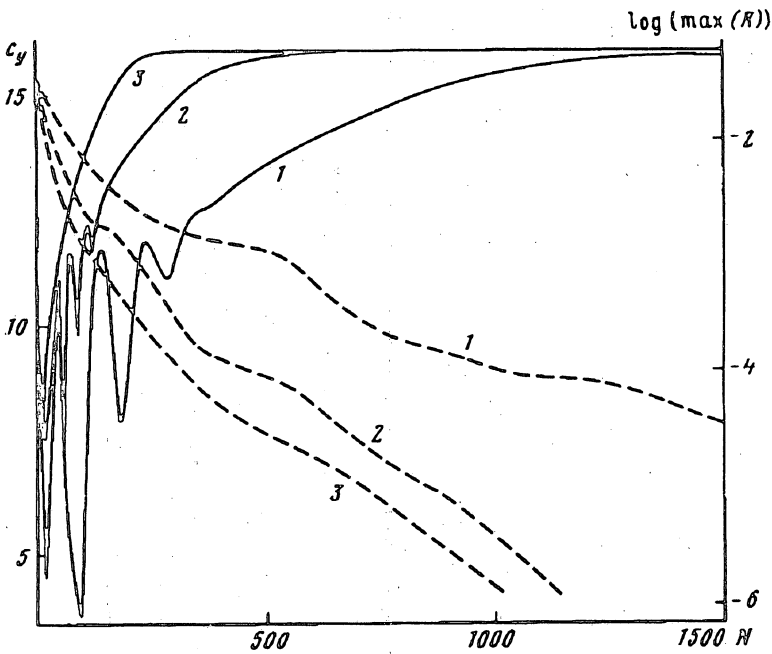
Фиг. 5

типа 0, полученной при помощи конформного преобразования внешности профиля на внешность круга. При этом количество точек на сеточных поверхностях, параллельных поверхности тела, уменьшается при приближении к внешней границе, где их число равно 32. В случае многоэлементного профиля из сетки вокруг каждого профиля удаляются точки, лежащие внутри и в окрестности других профилей. Полученное таким образом начальное распределение точек сглаживается с использованием процедуры, описанной в [5].

Первым тестовым примером является течение вокруг профиля NACA0012 при $M_\infty = 0.8$ и угле атаки 1.25. Для его расчета использовалась сетка, состоящая



Фиг. 6



Фиг. 7

из 2140 узлов, 120 из которых лежат на поверхности профиля. Полученное распределение давления изображено на фиг. 2 сплошной линией и сравнивается с результатами работы [11] (точки), где оно получено на сетке из 256×64 узлов. Большее размазывание скачка уплотнения на более грубой неструктурированной сетке приводит к несколько иным значениям интегральных

характеристик $c_x = 0.0228$, $c_y = 0.351$, в то время как в [13] получены $c_x = 0.0226$, $c_y = 0.358$. До полной сходимости потребовалось 250 многосеточных циклов.

Сравнение предлагаемой схемы (сплошная кривая) с методом конечного объема [15] (точки) представлено на фиг. 3, где изображены зависимости $c_x(\alpha)$ для профиля NACA0012 при $M_\infty = 0.5$, полученные на сетке, представляющей собой триангуляцию структурированной сетки размерности 121×33. Течение около этого профиля при $M_\infty = 0.5$ и $\alpha < 5$ является дозвуковым с нулевым коэффициентом сопротивления. При $\alpha > 5$ на верхней поверхности образуется зона сверхзвуковых скоростей и появляется волновое сопротивление профиля. Тем не менее ошибки аппроксимации уравнений Эйлера приводят к некоторой погрешности в определении коэффициента сопротивления и по ее величине можно судить о качестве используемой схемы. Сравнение полученных при помощи предложенной схемы и метода конечного объема зависимостей $c_x(\alpha)$ свидетельствует о бо́льшей точности схемы с прямодействием.

В работе также представлены два расчета многоэлементных профилей при $M_\infty = 0.2$, результаты которых сравнивались с точным решением для несжимаемой жидкости. Для первого случая, представляющего собой двухзвенный профиль, решение дано в [9]; сетка, состоящая из 3679 узлов, показана на фиг. 4 и содержит 120 точек на поверхности каждого профиля. Сравнение полученного коэффициента давления с тестовыми данными приведено на фиг. 5, где сплошной линией нанесены полученные данные, точками — тестовые. Следует отметить, что согласование результатов с точным решением хорошее, но пики разрежения на верхней поверхности разрешены не слишком точно, что объясняется главным образом недостаточным количеством точек сетки в этой области. Величина коэффициента подъемной силы, полученная в расчете, равна 3.6690, что на 1.8% меньше ее точного значения 3.7366.

Следующим тестовым случаем является четырехзвенный профиль, точное решение обтекания которого получено в [10]. Сравнение распределения коэффициента давления с точным решением из [10] показано на фиг. 6, где также сплошной линией нанесены полученные данные, точками — тестовые. Полученный коэффициент подъемной силы 15.9750 отличается от своего точного значения 16.0364 на 0.4%. Некоторое отличие распределений давления в пиках разрежения объясняется недостаточной разрешающей способностью сетки, содержащей по 120 точек на поверхности основного профиля, 100 точек на поверхности предкрылка, 90 и 80 точек соответственно на первом и втором закрылке.

Расчет обтекания четырехзвенного профиля производился с использованием различного числа сеток в многосеточном цикле. На фиг. 7 штриховыми линиями показаны графики уменьшения максимального значения невязки по итерациям N, причем линии *1, 2, 3* соответствуют количеству используемых сеток. Видно существенное увеличение скорости сходимости при использовании многосеточного алгоритма, что более наглядно иллюстрирует изменение коэффициента подъемной силы по итерациям N, показанное сплошной линией. Из графика видно, что

для полного установления с использованием трехсеточного алгоритма необходимо около 300 циклов, для двухсеточного — около 700, а для односеточного — более 1400. Поэтому применение многосеточного алгоритма приводит к существенному уменьшению необходимого для расчета процессорного времени, поскольку время, необходимое для одного трехсеточного цикла не более чем на 50% больше, чем время, необходимое для односеточной итерации.

Автор благодарит А. М. Сорокина за предоставленный пакет программ, предназначенный для построения неструктурированных сеток, а также Ю. Б. Лифшица за внимание к работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jameson A., Baker T. J., Weatherill N. P.* Calculation of invicsid transonic flow over a complete aircraft: AIAA Paper 86-0103, 1986.
2. *Peiro J., Peraire J., Morgan K., etc.* The numerical simulation of flow about installed aero engine nacelle using a finite element Euler solver on unstructured meshes: AIAA Paper 92-1845, 1992.
3. *Mavriplis D. J.* Accurate multigrid solution of the Euler equation on unstructured and adaptive meshes//AIAA Journal. 1990. V. 28. № 2. P. 213—221.
4. *Staufflet B., Periaux J., Fezoui F., Dervieux A.* Numerical simulation of 3-d hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements: AIAA Paper 87-0560, 1987.
5. *Sorokin A. M.* Structured and unstructured grid generation: An evolutionary approach//Numer. Grid Generation in Comput. Fluid Dynamics and Related Fields, 6th-8th April 1994, Swansea, Wales.
6. *Jameson A., Schmidt W., Turkel E.* Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge — Kutta time stepping schemes: AIAA Paper 81-1259, 1981.
7. *Ni R. H.* A multiple grid scheme for solving the Euler equations//AIAA Journal. 1982. V. 20. P. 1565—1571.
8. *Mavriplis D., Jameson A.* Multigrid solution of the two-dimensional Euler equations on unstructured triangular meshes: AIAA Paper 87-0353, 1987.
9. *Williams B. R.* An exact test case for the plane potential flow about two adjecent lifting aerofoils: Techn. Rept 71197, Roy. Aircraft Establishment, September, 1971.
10. *Suddhoo A., Hall I. V.* Test cases for the plane potential flow past multi — element aerofoils//Aeronout. J. 1985. V. 89. № 890. P. 403—414.
11. *Thomas J. L., Salas M. D.* Far-field boundary conditions for transonic lifting solutions to the Euler equations: AIAA Paper 85-0020, 1985.
12. *Siclary M. J.* Tree-dimensional hybrid finite volume solutions to the Euler equations for supersonic vehicles//Comput. and Structures. 1988. V. 30. № 1/2. P. 233—246.
13. *Frink N. T.* Upwind scheme for solving the Euler equations on unstructured terahedral meshes//AIAA Journal. 1992. V. 30. № 1. P. 70—77.
14. *Barth T. J., Jespersen D. C.* The design and application of upwind schemes on unstructured meshes: AIAA Paper 89-0366, 1989.
15. *Сакович В. С.* Многосеточный алгоритм интегрирования уравнений Эйлера для расчета обтекания профиля трансзвуковым потоком//Тр. ЦАГИ, М., 1991. № 2517.

Поступила в редакцию 21.07.93
Переработанный вариант 12.05.94