ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2016, т. 295, с. 261–291

УДК 517.958+512.77

Теорема Абеля и преобразования Бэклунда для уравнений Гамильтона–Якоби[1]

А. В. Цыганов[2]

Поступило 9 мая 2016 г.

Рассматривается алгоритм построения автопреобразований Бэклунда для конечномерных гамильтоновых систем, интегрирование которых сводится к обращению отображения Абеля. В этом случае с помощью уравнений движения можно построить дифференциальные уравнения Абеля и отождествить искомое преобразование Бэклунда с известным соотношением эквивалентности между корнями полинома Абеля. В качестве примеров построены преобразования Бэклунда для волчка Лагранжа, волчка Ковалевской и волчка Горячева–Чаплыгина, которые связаны с гиперэллиптическими кривыми первого и второго рода, а также для систем Горячева и Дуллина–Матвеева, которые связаны с тригональными кривыми на плоскости.

DOI: 10.1134/S0371968516040166

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы адекватной дискретизации конечномерных интегрируемых систем, в том числе и автопреобразования Бэклунда, стали в последние годы объектом интенсивного изучения [4, 18, 19, 26, 34]. Кроме этого, согласно [31, 37–39] преобразования Бэклунда для уравнений Гамильтона–Якоби можно использовать для построения, классификации и исследования новых интегрируемых систем. Напомним, что в классической механике преобразованием Бэклунда называют каноническое преобразование переменных, которое сохраняет алгебраическую форму интегралов движения [45]. Согласно этому определению преобразования Бэклунда сохраняют форму уравнений движения, в том числе и форму абелевых квадратур, записанных в дифференциальном виде. В данной работе мы покажем, как это свойство автопреобразований Бэклунда можно использовать для их явного построения в рамках классической теории Абеля.

Гамильтонова система называется *интегрируемой*, если уравнения движения решаются в квадратурах, т.е. если их общее решение выражается в виде комбинации элементарных функций и интегралов от них. В классической механике наиболее часто встречаются абелевы интегралы (квадратуры)

$$I = \int R(x,y)\,dx, \tag{1.1}$$

где $R(x,y)$ — произвольная рациональная функция от x и y, а $y=y(x)$ — алгебраическая функция от x, определенная уравнением вида

$$f(x,y) = y^m + A_1 y^{m-1} + \ldots + A_m = 0.$$

Входящие в уравнение рациональные многочлены A_j от x подразумеваются такими, что левая часть уравнения неразложима в произведение множителей того же вида. В общем случае

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-30007).

[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

© А.В. Цыганов, 2016

абелевы интегралы (1.1) являются сложными трансцендентными функциями от пределов интегрирования.

Однако согласно теореме Абеля [1] сумму достаточно большого числа интегралов

$$I = \int^{(x_1,y_1)} R(x,y)\,dx + \ldots + \int^{(x_n,y_n)} R(x,y)\,dx \tag{1.2}$$

с произвольными нижними пределами можно выразить через рациональные функции от верхних пределов интегрирования $p_k(x_k, y_k)$ и логарифмы от таких рациональных функций (см. подробности в [2]). Более того, среди всех возможных дифференциалов $\omega = R(x,y)\,dx$ Абель выделил подмножество дифференциалов, для которых абелева сумма (1.2) постоянна:

$$I = \int^{p_1} \omega + \ldots + \int^{p_n} \omega = \mathrm{const}, \qquad p_k = (x_k, y_k). \tag{1.3}$$

Соответствующее уравнение

$$\omega(p_1) + \omega(p_2) + \ldots + \omega(p_n) = 0 \tag{1.4}$$

называется *дифференциальным уравнением Абеля* [2, 15, 17]. Необходимое число слагаемых n в общем случае зависит только от уравнения $f(x,y)$, связывающего x и y.

С современной точки зрения мы рассматриваем гладкую несингулярную алгебраическую кривую $\mathcal{C}$, которая задается уравнением

$$f(x,y) = 0, \tag{1.5}$$

и алгебраическое многообразие

$$\mathcal{C}^{(n)} = \underbrace{\mathcal{C} \times \ldots \times \mathcal{C}}_{n} / \Sigma_n, \qquad \text{где } \Sigma_n \text{ — группа перестановок},$$

точки $z = p_1 + \ldots + p_n$ на котором являются конфигурациями n точек алгебраической кривой $\mathcal{C}$. Если ω — регулярный дифференциал на $\mathcal{C}$ и $\mathrm{Tr}\,\omega(z) = \omega(p_1) + \ldots + \omega(p_n)$ — регулярная 1-форма на n-листном накрытии $\mathcal{C}^{(n)}$, которая называется *следом дифференциала* ω, то уравнение Абеля имеет вид

$$\mathrm{Tr}\,\omega = \omega(p_1) + \ldots + \omega(p_n) = 0.$$

Это уравнение определяет внешнюю инволютивную дифференциальную систему с максимальным интегральным многообразием. Более подробный обзор истории и современных приложений дифференциальных уравнений Абеля в различных областях математики можно найти в работах [15, 17].

В процессе доказательства теоремы о сумме интегралов от алгебраической функции Абель отождествляет точки на плоскости $p_k = (x_k, y_k)$ с точками пересечения алгебраической кривой $\mathcal{C}$ (1.5) с семейством вспомогательных кривых на плоскости, заданных уравнением

$$g(x,y) = 0, \tag{1.6}$$

которое неявно зависит от некоторого параметра t, играющего в классической механике роль переменной времени [2, 17].

Пусть $p_1 = (x_1, y_1)$, …, $p_\mu = (x_\mu, y_\mu)$ — решения системы алгебраических неприводимых уравнений

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Исключая переменную y из (1.7), Абель определяет полином

$$\psi(x) = c(x - x_1)\ldots(x - x_\mu), \tag{1.8}$$

корни которого являются абсциссами $x_1,\dots,x_\mu$ точек пересечения. Разделяя множество корней полинома Абеля ψ (1.8) на два подмножества, мы можем связать одно подмножество корней $x_1,\dots,x_m$ с оставшимся подмножеством корней $x_{m+1},\dots,x_\mu$:

$$(x-x_1)\dots(x-x_m)=\frac{\psi(x)}{c(x-x_{m+1})\dots(x-x_\mu)}. \tag{1.9}$$

Ординаты соответствующих точек пересечения $y_1,\dots,y_m$ находятся из уравнений (1.7). Таким образом, при подходящем выборе подмножеств корней можно построить отображение

$$B\colon\ (p_1,\dots,p_m)\leftrightarrow(p_{m+1},\dots,p_\mu), \tag{1.10}$$

связывающее различные подмножества точек пересечения. Следуя классической работе Эйлера [12], в классической литературе вместо отображения (1.10) обычно рассматривают алгебраические интегралы уравнений Абеля, т.е. алгебраические функции

$$\Phi(p_1,\dots,p_\mu)=\mathrm{const}, \tag{1.11}$$

связывающие точки пересечения. Например, уравнение Абеля

$$\frac{dx_1}{y_1}+\frac{dx_2}{y_2}=0$$

на эллиптической кривой $\mathcal{C}\colon\ y^2=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ обладает интегралом Эйлера

$$\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2)=\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2-a_4(x_1+x_2)^2+a_3(x_1+x_2)=\mathrm{const},$$

который более подробно будет рассмотрен в следующем разделе.

Если перейти от абсцисс и ординат точек на плоскости, которые использовал Абель, к интегралам и функциям, то отображения (1.10) и эквивалентные им алгебраические интегралы (1.11) можно рассматривать как теоремы сложения для абелевых функций [2, 16]. С другой стороны, в алгебраической геометрии эти же отображения (1.10) и интегралы (1.11) рассматривают как отношения эквивалентности, позволяющие сравнивать дивизоры на гладких алгебраических многообразиях $\mathcal{C}^{(n)}$ (см. [29]).

В данной работе мы будем интерпретировать отображения вида (1.10) как преобразования Бэклунда, отождествляя абсциссы x_k и ординаты y_k точек пересечения с переменными разделения для соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби.

Уравнения Абеля для систем типа Штеккеля. Одним из наиболее представительных семейств интегрируемых гамильтоновых систем является семейство систем Штеккеля [32, 33]. Эти системы определяются с помощью невырожденной $(m\times m)$-матрицы Штеккеля S на конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами $q_1,\dots,q_m$ такой, что элементы j-го столбца зависят только от координаты q_j:

$$\det S\neq 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial S_{ij}}{\partial q_k}=\delta_{jk}.$$

В этом случае построенные с помощью обратной матрицы $C=S^{-1}$ гамильтонианы

$$H_k=\sum_{j=1}^m C_{jk}\big(p_j^2+U_j(q_j)\big), \tag{1.12}$$

где $U_j(q_j)$ — произвольные функции, находятся в инволюции $\{H_i,H_j\}=0$, $i,j=1,\dots,m$, относительно стандартной скобки Пуассона на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2m}$: $\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}$, $\{q_i,q_j\}=\{p_i,p_j\}=0$. Итак, для систем Штеккеля существует m квадратичных по импульсам независимых интегралов движения в инволюции. На общем уровне этих интегралов $H_i = h_i$ уравнения движения имеют вид

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{S_{jk}(q_k)\,dq_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} h_i S_{ik}(q_k) - U_k(q_k)}} = dt_j, \qquad j = 1,\dots,m. \tag{1.13}$$

Здесь t_j — переменные времени, отвечающие гамильтонианам H_j (см. [32, 33]). Таким образом, согласно стандартной процедуре интегрирования уравнений Гамильтона–Якоби величины $q_i(t,h_1,\dots,h_m)$ находятся из уравнений (квадратур)

$$\sum_{k=1}^{m} \int \frac{S_{jk}(q_k)\,dq_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} h_i S_{ik}(q_k) - U_k(q_k)}} = t_j + \beta_j, \qquad j = 1,\dots,m, \tag{1.14}$$

где β_j — постоянные интегрирования [32, 33].

В общем случае разделенные уравнения

$$p_j^2 + U_j(q_j) - \sum_{i=1}^{m} h_i S_{ij}(q_j) = 0$$

различны, но для так называемых однородных систем Штеккеля все пары переменных разделения

$$(q_1 = x_1,\, p_1 = y_1),\ \dots,\ (q_m = x_m,\, p_m = y_m)$$

связаны общим полиномиальным соотношением

$$f(x,y) = y^2 - f(x) = 0, \qquad f(x) = a_{2g+2}x^{2g+2} + a_{2g-1}x^{2g-1} + \dots + a_0 = 0, \tag{1.15}$$

в котором коэффициенты $a_{2g+2},\dots,a_0$ являются функциями от гамильтонианов $H_1,\dots,H_m$, т.е. постоянными движения.

Общее разделенное уравнение (1.15) определяет гиперэллиптическую кривую $\mathcal{C}$ рода g, а уравнения движения (1.13) имеют вид

$$\omega_j(x_1,y_1) + \dots + \omega_j(x_m,y_m) = dt_j, \qquad j = 1,\dots,m, \tag{1.16}$$

где $\omega_1,\dots,\omega_m$ — семейство независимых регулярных дифференциалов на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$. В этом случае нахождение $q_i(t,h_1,\dots,h_m)$ с помощью уравнений (1.14) называется *обращением отображения Абеля на гиперэллиптической кривой*. Различные примеры однородных систем Штеккеля можно найти в книгах [5, 9, 10].

Предположим, что существует каноническое преобразование переменных в $\mathbb{R}^{2m}$

$$B\colon\ (q_1,p_1,\dots,q_m,p_m) \leftrightarrow (\widetilde{q}_1,\widetilde{p}_1,\dots,\widetilde{q}_m,\widetilde{p}_m) \tag{1.17}$$

валентности $c = -1$, которое сохраняет форму гамильтонианов (1.12). Напомним, что преобразование переменных B называется *каноническим преобразованием валентности* $c \neq 0$, если

$$M^\top J M = cJ, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь I — единичная $(m\times m)$-матрица, а M — матрица Якоби преобразования (1.17):

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial\widetilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial\widetilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial\widetilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial\widetilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}.$$

В этом случае M называется *обобщенно симплектической матрицей валентности* c.

Итак, если мы рассматриваем каноническое преобразование валентности $c=-1$, то новые переменные

$$(\widetilde{q}_1 = x_{m+1},\, \widetilde{p}_1 = y_{m+1}),\ \ldots,\ (\widetilde{q}_m = x_{2m},\, \widetilde{p}_m = y_{2m})$$

удовлетворяют тем же самым уравнениям движения (1.16) с точностью до знака переменной времени:

$$\omega_j(x_{m+1}, y_{m+1}) + \ldots + \omega_j(x_{2m}, y_{2m}) = -dt_j, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{1.18}$$

Складывая уравнения движения (1.16) и (1.18), мы получим дифференциальные уравнения Абеля

$$\omega_j(x_1, y_1) + \ldots + \omega_j(x_m, y_m) + \omega_j(x_{m+1}, y_{m+1}) + \ldots + \omega_j(x_{2m}, y_{2m}) = 0, \tag{1.19}$$

что позволяет отождествить искомое каноническое преобразование координат B (1.17) на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2m}$ с детально изученным в математике отображением (1.10).

Например, для системы Неймана, системы Гарнье, системы Энона–Эйлеса, волчка Ковалевской и ряда других двумерных интегрируемых систем уравнения (1.16) имеют вид

$$\frac{dq_1}{\sqrt{f(q_1)}} + \frac{dq_2}{\sqrt{f(q_2)}} = dt_1, \qquad \frac{q_1\, dq_1}{\sqrt{f(q_1)}} + \frac{q_2\, dq_2}{\sqrt{f(q_2)}} = dt_2, \tag{1.20}$$

где $f(x)$ — неприводимый полином шестой степени

$$f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{1.21}$$

коэффициенты a_i которого зависят от гамильтонианов $H_{1,2}$ и других постоянных параметров [5, 9, 10].

В этом случае уравнения Абеля (1.19) при $x_{1,2} = q_{1,2}$, $y_{1,2} = p_{1,2}$ и $x_{3,4} = \widetilde{q}_{1,2}$, $y_{3,4} = \widetilde{p}_{1,2}$ имеют вид

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} + \frac{dx_3}{y_3} + \frac{dx_4}{y_4} = 0, \qquad \frac{x_1\, dx_1}{y_1} + \frac{x_2\, dx_2}{y_2} + \frac{x_3\, dx_3}{y_3} + \frac{x_4\, dx_4}{y_4} = 0. \tag{1.22}$$

Эти уравнения связывают две точки $p = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ и $\widetilde{p} = (x_3, y_3, x_4, y_4)$ на симметризованном произведении гиперэллиптической кривой второго рода $\mathcal{C}\colon y^2 = f(x)$. Согласно теореме Абеля в этом случае уравнения (1.22) обладают двумя алгебраическими интегралами

$$\Phi_{1,2}(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) = 0.$$

Добавляя к этим интегралам условие сохранения алгебраической формы гамильтонианов (1.12)

$$H_i(x_1, y_1, x_2, y_2) = H_i(x_3, y_3, x_4, y_4), \qquad i = 1, 2,$$

мы получим систему из четырех алгебраических уравнений. Решая эти уравнения относительно четырех переменных $x_{3,4} = \widetilde{q}_{1,2}$ и $y_{3,4} = \widetilde{p}_{1,2}$, мы получим искомое каноническое преобразование B (1.17), сохраняющее форму гамильтонианов $H_{1,2}$.

Благодаря существованию стандартной гиперэллиптической инволюции $\sigma\colon (y, x) \to (-y, x)$ уравнения кривой $\mathcal{C}$ (1.15) существует еще одно тривиальное каноническое преобразование валентности $c = -1$, которое также сохраняет форму гамильтонианов (1.12):

$$\sigma\colon\ p_i \to -p_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{1.23}$$

Очевидно, что композиция рассмотренных нами преобразований будет унивалентным каноническим преобразованием.

Теорема 1. *Композиция* $\sigma \circ B$ *преобразований* (1.17) *и* (1.23) *является каноническим преобразованием валентности* $c = 1$, *сохраняющим форму гамильтонианов* H_k (1.12), *т.е. автопреобразованием Бэклунда для уравнений Гамильтона–Якоби* $H_k = h_k$.

Итак, дифференциальные уравнения Абеля естественным образом возникают в методе разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби и поэтому могут быть использованы для построения автопреобразований Бэклунда для интегрируемых гамильтоновых систем.

2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Рассмотрим точки пересечения эллиптической кривой

$$\mathcal{C}: \quad y^2 = f(x), \qquad f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{2.1}$$

с семейством парабол, определяемых уравнением с переменными коэффициентами

$$g(x, y) = b_2x^2 + b_1x + b_0 - y = 0. \tag{2.2}$$

Исключая y, получим уравнение

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 - \sqrt{f(x)} = 0. \tag{2.3}$$

Если $x_1, \ldots, x_4$ — абсциссы четырех точек пересечения, то, исключая переменные коэффициенты b_i из уравнений (2.1) и (2.3), получим стандартный алгебраический интеграл

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x_4^2 & x_4 & 1 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

для уравнения Абеля

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} + \frac{dx_3}{y_3} + \frac{dx_4}{y_4} = 0.$$

Предположим, что один из корней, например x_4, лежит на бесконечности и (2.3) имеет вид

$$(a_4x^2 + b_1x + b_0) - \sqrt{a_4}\,y = 0, \tag{2.4}$$

чего можно всегда добиться, воспользовавшись произвольностью коэффициентов b_j (см. [16]). Следуя Абелю [1], перепишем уравнение (2.4) в полиномиальном виде

$$\psi(x) = (a_4x^2 + b_1x + b_0)^2 - a_4y^2 = 0,$$

определяя полином Абеля третьей степени с корнями x_1, x_2 и x_3

$$\begin{aligned}\psi(x) &= a_4(2b_1 - a_3)x^3 + (b_1^2 + 2a_4b_0 - a_2a_4)x^2 + (2b_1b_0 - a_1a_4)x + b_0^2 - a_4a_0 = \\ &= a_4(2b_1 - a_3)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).\end{aligned}$$

Используя уравнение (2.4) при $x = x_3$

$$a_4x_3^2 + b_1x_3 + b_0 - \sqrt{a_4}\,y_3 = 0,$$

можно исключить b_0 с помощью первой формулы Виета

$$a_4(2b_1 - a_3)(x_1 + x_2 + x_3) = -(b_1^2 + 2a_4b_0 - a_2a_4) \tag{2.5}$$

и получить

$$(2b_1 - a_3)(x_1 + x_2) = 2a_4x_3^2 + a_3x_3 - a_2 - \frac{b_1^2}{a_4} - 2\sqrt{a_4}\,y_3. \tag{2.6}$$

Далее это уравнение мы будем использовать для определения коэффициента b_1.

Оставшиеся два уравнения (2.3) при $x = x_{1,2}$

$$\sqrt{a_4}x_1^2 + b_1x_1 + b_0 - \sqrt{a_4}y_1 = 0, \qquad \sqrt{a_4}x_2^2 + b_1x_2 + b_0 - \sqrt{a_4}y_2 = 0$$

нужно вычесть друг из друга:

$$(x_1 - x_2)\big(a_4(x_1 + x_2) + b_1\big) - \sqrt{a_4}(y_1 - y_2) = 0.$$

Полученное соотношение перепишем в виде

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \sqrt{a_4}(x_1 + x_2) + \frac{b_1}{\sqrt{a_4}}. \tag{2.7}$$

Возводя обе части этого уравнения в квадрат и подставляя значение коэффициента b_1 из (2.6), получим интеграл Эйлера [12]

$$\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2 = a_4(x_1 + x_2)^2 + a_3(x_1 + x_2) + c, \tag{2.8}$$

где

$$c = 2a_4x_3^2 + a_3x_3 + a_2 - 2\sqrt{a_4}y_3. \tag{2.9}$$

Интеграл Эйлера (2.8) является общим интегралом уравнения Абеля

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} = 0, \tag{2.10}$$

если c рассматривать как константу интегрирования (см. вычисления Лагранжа в [16, p. 144]). С другой стороны, этот интеграл является частным интегралом уравнения Абеля

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} + \frac{dx_3}{y_3} = 0, \tag{2.11}$$

если c рассматривать как функцию от x_3 и y_3. В этом случае интеграл Эйлера принято интерпретировать как теорему сложения для эллиптических функций [2, 16].

С другой стороны, если вычесть два выражения типа (2.7)

$$\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} - \sqrt{a_4}(x_1 + x_3) = \frac{b_1}{\sqrt{a_4}}, \qquad \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \sqrt{a_4}(x_2 + x_3) = \frac{b_1}{\sqrt{a_4}},$$

мы также освобождаемся от переменного коэффициента b_1 и получаем интеграл Абеля для уравнения (2.10)

$$\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} - \sqrt{a_4}x_1 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \sqrt{a_4}x_2 \tag{2.12}$$

(см. подробности в [2, p. 229]).

Другие формы алгебраических интегралов дифференциальных уравнений Абеля могут быть получены с помощью подстановок

$$x = \frac{lx' + m}{l'x' + m'}, \qquad \frac{dx}{y} = (lm' - l'm)\frac{dx'}{y'}, \tag{2.13}$$

сохраняющих инварианты кривой $\mathcal{C}$, и различных комбинаций известных интегралов. Например, если $x_k = 1/x'_k$, то мы имеем

$$\frac{dx_k}{y_k} = -\frac{dx'_k}{y'_k}, \qquad y'^2_k = a_4 + a_3x'_k + a_2x'^2_k + a_1x'^3_k + a_0x'^4_k.$$

Интеграл Эйлера (2.8) для соответствующей эллиптической кривой

$$\left(\frac{y_1'-y_2'}{x_1'-x_2'}\right)^2 = a_0(x_1'+x_2')^2 + a_1(x_1'+x_2') + c$$

после обратного преобразования $x_k' = 1/x_k$ имеет вид

$$\left(\frac{x_2^2 y_1 - x_1^2 y_2}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}\right)^2 = a_0\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2 + a_1\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right) + c'. \tag{2.14}$$

Вычитая (2.14) из (2.8), мы получаем еще один интеграл уравнения Абеля (2.10)

$$\left(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right)\frac{x_2^2y_1^2 - x_1^2y_2^2}{x_1^2x_2^2} = a_4(x_1+x_2)^2 + a_3(x_1+x_2) - \\ - a_0\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2 - a_1\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right) + (c-c'). \tag{2.15}$$

Эти интегралы были построены Ришело в работе [28, S. 359].

Преобразования Бэклунда. Рассмотрим одномерную гамильтонову систему

$$\frac{dq}{dt} = \{H,q\} \equiv p,$$

для которой уравнение Гамильтона–Якоби $H(q,p)=E$ может быть переписано в виде

$$p^2 = f(q), \qquad f(q) = a_4q^4 + a_3q^3 + a_2q^2 + a_1q + a_0.$$

Здесь $a_4,\dots,a_0$ — константы, зависящие от энергии E и других постоянных параметров, входящих в определение гамильтониана.

Рассмотрим замену переменных $(q,p)\to(\widetilde q,\widetilde p\,)$, которая сохраняет скобку Пуассона и форму функции Гамильтона

$$H(q,p) = H(\widetilde q,\widetilde p\,), \tag{2.16}$$

так что

$$\frac{dq}{p} = dt = \frac{d\widetilde q}{\widetilde p}.$$

Если положить $q=x_1$, $p=y_1$, $\widetilde q = x_2$, $\widetilde p = -y_2$, то последнее уравнение можно отождествить с уравнением Абеля (2.10) на эллиптической кривой.

Добавляя к уравнению (2.16) любой из алгебраических интегралов $\Phi(q,p,\widetilde q,\widetilde p\,) = \mathrm{const}$ уравнения Абеля (2.10), мы получим систему из двух алгебраических уравнений, которые можно использовать для явного нахождения переменных $\widetilde q$ и $\widetilde p$ в виде алгебраических функций от исходных переменных q и p. Например, можно взять интеграл Эйлера (2.8), который в терминах динамических переменных имеет вид

$$\Phi(q,p,\widetilde q,\widetilde p\,) = \left(\frac{p+\widetilde p}{q-\widetilde q}\right)^2 - a_4(q+\widetilde q\,)^2 - a_3(q+\widetilde q\,) = c, \tag{2.17}$$

или интеграл Абеля (2.12)

$$\Phi(q,p,\widetilde q,\widetilde p\,) = \frac{p-\Lambda}{q-\lambda} - \sqrt{a_4}\,q + \frac{-\widetilde p+\Lambda}{\widetilde q-\lambda} + \sqrt{a_4}\,\widetilde q = 0, \tag{2.18}$$

в котором мы, следуя Бейкеру [2, p. 229], положили $\lambda = x_3$ и $\Lambda = y_3$. Подчеркнем, что в этом случае ордината неподвижной точки пересечения $y_3 = \Lambda = \sqrt{f(\lambda)}$ является функцией на фазовом пространстве, зависящей от параметра λ.

Выбрав один из коэффициентов a_k в качестве гамильтониана, так что уравнение (2.16) примет вид

$$H = q^{-k}\Bigl(p^2 - \sum_{j\neq k} a_j q^j\Bigr) = \widetilde{q}^{\,-k}\Bigl(\widetilde{p}^{\,2} - \sum_{j\neq k} a_j \widetilde{q}^{\,j}\Bigr), \qquad a_j \in \mathbb{R}, \tag{2.19}$$

можно доказать следующее свойство получаемого таким способом отображения $(q,p)\to(\widetilde{q},\widetilde{p}\,)$.

Теорема 2. *Для любого* $k=0,\dots,4$, *добавляя к уравнению* (2.19) *один из алгебраических интегралов* (2.17), (2.18), (2.14), (2.15), *мы получим два алгебраических уравнения, решения которых относительно* $\widetilde{q}$ *и* $\widetilde{p}$ *задают преобразования координат, сохраняющие форму интеграла движения* H *и скобку Пуассона*

$$\{q,p\}_k = q^k \;\leftrightarrow\; \{\widetilde{q},\widetilde{p}\,\}_k = \widetilde{q}^{\,k}.$$

Используя более сложные гамильтонианы, можно построить преобразования Бэклунда, сохраняющие более сложные скобки Пуассона.

Преобразования, отвечающие разным алгебраическим интегралам уравнений Абеля, отличаются друг от друга. Например, если $H=a_0$ и $a_3=a_2=a_1=0$, то переменная $\widetilde{q}$, построенная с помощью интеграла Эйлера (2.17), имеет вид

$$\widetilde{q} = -q + \frac{2c^2q - 4a_4cq^3 + 2p\sqrt{c(4a_4^2q^4 - 4a_4p^2 + c^2)}}{4a_4^2q^4 - (4cq^2+4p^2)a_4 + c^2}. \tag{2.20}$$

С другой стороны, переменная $\widetilde{q}$, построенная с помощью интеграла Абеля (2.18), равна

$$\widetilde{q} = -q + \frac{p}{\sqrt{a_4}(q-\lambda)} - \frac{2\sqrt{a_4}\,q\bigl(\sqrt{a_4}\lambda^2 + \sqrt{a_4\lambda^4 - a_4q^4 + p^2}\,\bigr)}{a_4(\lambda^2-q^2) + \sqrt{a_4}\bigl(\sqrt{a_4\lambda^4 - a_4q^4+p^2} - p\bigr)}. \tag{2.21}$$

В первом случае мы можем рассмотреть предел $a_4=0$ в (2.20), а во втором случае нет. Кроме подобных формальных различий, отвечающие разным интегралам отображения могут иметь, например, разное значение алгебраической энтропии [19].

3. ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Пусть $\mathcal{C}$ — гиперэллиптическая кривая рода g, заданная уравнением

$$y^2 = f(x), \qquad f(x) = a_{2g+2}x^{2g+2} + a_{2g-1}x^{2g-1} + \ldots + a_1x + a_0, \tag{3.1}$$

в котором a_j — постоянные комплексные числа. Рассмотрим точки пересечения $p_k=(x_k,y_k)$ этой кривой $\mathcal{C}$ с семейством алгебраических кривых, которые задаются уравнением $g(x,y)=0$, зависящим рационально от некоторого параметра t. Подставляя вместо y^2 полином $f(x)$, Абель приводит это уравнение к виду

$$Qy + P = 0, \tag{3.2}$$

где P и Q — некоторые полиномы от x. Затем Абель переписывает это уравнение в виде уравнения $Q^2f(x)-P^2=0$, корни которого являются абсциссами точек пересечения двух алгебраических кривых на плоскости. Обозначая степень этого уравнения через μ, определим полином

$$\psi(x) = Q^2f(x) - P^2 = c(x-x_1)\ldots(x-x_\mu) \tag{3.3}$$

и рассмотрим малые вариации его корней $x_1,\dots,x_\mu$, отвечающие изменению положения и формы произвольной кривой, задаваемой уравнением $g(x,y)=0$. Коэффициенты в уравнении (3.1) при этом не изменяются.

Если ∂P и ∂Q обозначают малые вариации полиномов P и Q, отвечающие изменениям положения и формы в семействе переменных кривых, а dx_r — вариации корней полинома ψ, то

$$\frac{dx_r}{\sqrt{f(x_r)}} = \frac{\theta(x_r)}{\psi'(x_r)}, \qquad \text{где} \quad \theta(x) = 2(Q\,\partial P - P\,\partial Q). \tag{3.4}$$

Так как степень полинома $\theta(x)$ меньше степени полинома $\psi(x)$ по крайней мере на 2, дробь $x\theta(x)/\psi(x)$ можно разложить на элементарные дроби

$$\frac{x\theta(x)}{\psi(x)} = \sum_{r=1}^{\mu} \frac{x_r\theta(x_r)}{\psi'(x_r)(x-x_r)}.$$

Если теперь положить $x=0$, то получим дифференциальное уравнение Абеля

$$\sum_{r=1}^{\mu} \frac{\theta(x_r)}{\psi'(x_r)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{r=1}^{\mu} \frac{dx_r}{\sqrt{f(x_r)}} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, Абель доказывает теорему о сумме интегралов алгебраической функции в этом частном случае [1] (см. также изложение доказательства Абеля в книге [16]).

Для того чтобы таким же методом получить при $n > g$ систему дифференциальных уравнений Абеля

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0, \\ \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \ldots + \frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{x_1^{n-1}\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^{n-1}\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \ldots + \frac{x_n^{n-1}\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0, \end{gathered} \tag{3.5}$$

отвечающую стандартному базису голоморфных дифференциалов

$$\omega_1 = \frac{dx}{y}, \qquad \omega_2 = \frac{xdx}{y}, \qquad \ldots, \qquad \omega_g = \frac{x^{g-1}dx}{y},$$

мы положим $Q=1$ в (3.2) и рассмотрим точки пересечения постоянной гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ (3.1) с семейством кривых, задаваемых уравнением

$$g(x,y) = y - P(x), \qquad P(x) = \sqrt{a_{2g+2}}\,x^{g+1} + b_g x^g + \ldots + b_0. \tag{3.6}$$

Переменные коэффициенты b_i в этом уравнении зависят от параметра t, который в классической механике играет роль переменной времени. В этом случае абсциссы $2g+1$ точек пересечения являются корнями полинома Абеля

$$\psi(x) = f(x) - P(x)^2 = \bigl(a_{2g+1} - 2\sqrt{a_{2g+2}}\,b_g\bigr)F(x)\phi(x) \tag{3.7}$$

(см. [2, p. 229]). Следуя Абелю [1], в этом определении мы выделили n переменных (варьируемых) корней, входящих в уравнения (3.5), в полином

$$F(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

а оставшиеся корни $x_{n+1},\ldots,x_{2g+1}$, которые играют роль постоянных параметров, мы собрали в полином

$$\phi(x) = (x-x_{n+1})\ldots(x-x_{2g+1}).$$

Далее мы можем использовать данный полином Абеля (3.7) для построения отображений вида (1.10) и алгебраических интегралов (1.11) уравнений Абеля (3.5).

Нахождению полного семейства алгебраических интегралов или производящей функции таких интегралов посвящены работы Якоби [20], Вейерштрасса [44], Ришело [28] и многих других (см. обсуждение в книге Бейкера [2]). Например, в работе Ришело [28] приведены явные выражения для g алгебраических интегралов уравнений (3.5) при $n = g + 1$. Один из этих интегралов

$$\left[\frac{y_1}{F'(x_1)} + \ldots + \frac{y_n}{F'(x_n)}\right]^2 = a_{2g+2}(x_1 + \ldots + x_n) + a_{2g+1}(x_1 + \ldots + x_n)^2 + c$$

является аналогом интеграла Эйлера (2.8). Как и ранее, c можно рассматривать либо как постоянную интегрирования, либо как функцию от координат неподвижных точек пересечения $p_{n+1}, \ldots, p_{2g+1}$ аналогично (2.9).

Преобразования Бэклунда. Рассматривая однородные системы Штеккеля, мы получили дифференциальные уравнения Абеля специального вида (1.19), в которых число слагаемых $n > g$ равно удвоенному числу степеней свободы: $n = 2m$. Если ограничиться рассмотрением голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической кривой, когда дифференциальные уравнения Абеля (1.19) имеют вид (3.5), то получим полином Абеля (3.7) вида

$$\psi(x) = f(x) - P(x)^2 = \big(a_{2g+1} - 2\sqrt{a_{2g+2}}\, b_g\big) \prod_{i=1}^{m}(x - x_i) \prod_{i=m+1}^{2m}(x - x_i) \prod_{j=1}^{r}(x - \lambda_j). \tag{3.8}$$

Здесь предполагается что одна из точек пересечения лежит на бесконечности и что $x_1, \ldots, x_{2m}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — варьируемые и постоянные корни полинома Абеля. Следуя Бейкеру [2], корни постоянного полинома $\phi(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - \lambda_j)$ степени $r = 2(g - m) + 1$ мы обозначили через $\lambda_j = x_{2m+j}$.

Абсциссы m последних точек пересечения являются корнями следующего полинома степени m:

$$\prod_{i=m+1}^{2m}(x - x_i) = \frac{f(x) - P(x)^2}{(a_{2g+1} - 2\sqrt{a_{2g+2}}\, b_g)F(x)}, \tag{3.9}$$

где

$$F(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)\phi(x), \qquad F' = \frac{\partial}{\partial x}F,$$

а полином $P(x)$ находится с помощью интерполяции по Лагранжу, как в работе Абеля [1]. Например, при $m = g$

$$P(x) = F(x)\left(\sqrt{a_{2g+2}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i}{(x - x_i)F'(x_i)} + \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{(x - \lambda)F'(\lambda)}\right), \tag{3.10}$$

а при $m \neq g$ необходимо использовать другие, более сложные выражения для интерполяции. Соответствующие ординаты точек пересечения суть

$$y_i = P(x_i), \qquad i = m + 1, \ldots, 2m. \tag{3.11}$$

Выражения (3.9) и (3.11) определяют отображение

$$B_\lambda\colon\ (x_1, y_1; \ldots; x_m, y_m) \leftrightarrow (x_{m+1}, y_{m+1}; \ldots; x_{2m}, y_{2m}), \tag{3.12}$$

которое может рассматриваться как автоморфизм m-кратного симметризованного произведения $\mathcal{C}^{(m)}$ (алгебраического многообразия)

$$B_\lambda\colon\ \mathcal{C}^{(m)} \leftrightarrow \mathcal{C}^{(m)},$$

зависящий от r произвольных параметров $\lambda_1,\dots,\lambda_r$.

Отождествляя переменные точки пересечения с координатами на фазовом пространстве

$$(q_1=x_1,\, p_1=y_1),\ \dots,\ (q_m=x_m,\, p_m=y_m)$$

и

$$(\widetilde{q}_1=x_{m+1},\, \widetilde{p}_1=y_{m+1}),\ \dots,\ (\widetilde{q}_m=x_{2m},\, \widetilde{p}_m=y_{2m}),$$

мы можем отождествить отображение (3.12) с каноническим преобразованием фазового пространства вида (1.17)

$$B_\lambda\colon\ (q_1,p_1,\dots,q_m,p_m) \leftrightarrow (\widetilde{q}_1,\widetilde{p}_1,\dots,\widetilde{q}_m,\widetilde{p}_m) \tag{3.13}$$

валентности $c=-1$, которое сохраняет форму гамильтонианов (1.12).

Композиция $\sigma\circ B_\lambda$ преобразований (1.23) и (3.13) является каноническим преобразованием валентности $c=1$, сохраняющим форму гамильтонианов H_k (1.12) для однородных систем Штеккеля, т.е. автопреобразованием Бэклунда для уравнений Гамильтона–Якоби $H_k=h_k$. Если $m=g$, то каноническое преобразование $\sigma\circ B_\lambda$ зависит только от одного параметра λ (точки на кривой $\mathcal{C}$). В работах [23, 24, 30] эта зависимость называется свойством спектральности автопреобразования Бэклунда.

Для гиперэллиптических кривых рода 1 и 2 можно построить переменные $\widetilde{q}$ и $\widetilde{p}$ явно, в отличие от метода построения преобразований Бэклунда, использующего матрицы Лакса [24]. Например, рассмотрим двумерные гамильтоновы системы, интегрируемые в гиперэллиптических квадратурах (1.20), для которых $a_6=0$ в уравнении (1.21), т.е. гиперэллиптическая кривая $\mathcal{C}$ является мнимой. В этом случае коэффициенты полинома (3.9) второго порядка вполне обозримы:

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_1+\widetilde{q}_2 &= q_1+q_2+\frac{(q_1-q_2)f'(q_1)+2(p_1+p_2)(\Lambda-p_1)}{a_5(q_1-q_2)^3(\lambda-q_1)}-\frac{2p_1(\Lambda-p_1)}{a_5(q_1-q_2)^2(\lambda-q_1)^2}+\\ &\quad+\frac{(q_1-q_2)f'(q_2)-2(p_1+p_2)(\Lambda-p_2)}{a_5(q_1-q_2)^3(\lambda-q_2)}-\frac{2p_2(\Lambda-p_2)}{a_5(q_1-q_2)^2(\lambda-q_2)^2}\end{aligned} \tag{3.14}$$

и

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_1\widetilde{q}_2 &= q_1q_2+\frac{q_2(q_1-q_2)f'(q_1)+2(q_2p_1+q_1p_2)(\Lambda-p_1)}{a_5(q_1-q_2)^3(\lambda-q_1)}-\frac{2q_2p_1(\Lambda-p_1)}{a_5(q_1-q_2)^2(\lambda-q_1)^2}+\\ &\quad+\frac{q_1(q_1-q_2)f'(q_2)-2(q_2p_1+q_1p_2)(\Lambda-p_2)}{a_5(q_1-q_2)^3(\lambda-q_2)}-\frac{2q_1p_2(\Lambda-p_2)}{a_5(q_1-q_2)^2(\lambda-q_2)^2}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Подставляя эти переменные в (3.11) и меняя знак на противоположный (см. (1.23)), получим соответствующие “импульсы”

$$\widetilde{p}_{1,2}=-\left(\frac{p_1(x-q_2)(x-\lambda)}{(q_1-q_2)(q_1-\lambda)}+\frac{p_2(x-q_1)(x-\lambda)}{(q_2-q_1)(q_2-\lambda)}+\frac{\Lambda(x-q_1)(x-q_2)}{(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)}\right)\bigg|_{x=\widetilde{q}_{1,2}}. \tag{3.16}$$

Здесь f' обозначает производную от полинома $f(x)$ (1.21) по x, а ордината неподвижной точки пересечения Λ рассматривается как функция на фазовом пространстве:

$$\Lambda=\pm\sqrt{a_5\lambda^5+a_4\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0},$$

зависящая от произвольного параметра λ. Аналогичные явные выражения при $\lambda = 0$ приведены в работе [39], посвященной построению авто- и гетеропреобразований Бэклунда для системы Энона–Эйлеса.

По своему определению преобразования Бэклунда B_λ (3.14)–(3.16) являются каноническими унивалентными преобразованиями относительно скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$, которая используется для построения дифференциальных уравнений Абеля (1.22) с помощью гамильтоновых уравнений движения для переменных разделения:

$$\frac{x_1}{dt_1} = \{x_1, H_1\} = \frac{y_1}{x_1 - x_2}, \qquad \frac{x_2}{dt_1} = \{x_2, H_1\} = -\frac{y_2}{x_1 - x_2}$$

и

$$\frac{x_2}{dt_2} = \{x_1, H_2\} = -\frac{x_2 y_1}{x_1 - x_2}, \qquad \frac{x_2}{dt_2} = \{x_2, H_2\} = \frac{x_1 y_2}{x_1 - x_2}.$$

Для того чтобы описать эти скобки явно, мы должны подставить вместо коэффициентов a_k полинома $f(x)$ (1.21) функции Гамильтона $H_{1,2}$. Например, можно непосредственно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Если гамильтонианы $H_{1,2}$ равны коэффициентам a_k и a_{k+1},*

$$H_1 = \frac{q_1^{k+1}\pi_2 - q_2^{k+1}\pi_1}{q_1^k q_2^k (q_1 - q_2)}, \qquad H_2 = -\frac{q_1^k \pi_2 - q_2^k \pi_1}{q_1^k q_2^k (q_1 - q_2)}, \qquad \pi_j = p_j^2 - \sum_{\substack{i=0\\ i\neq k,k+1}}^{5} a_i q_j^i, \tag{3.17}$$

то отображение B_λ сохраняет следующие скобки Пуассона:

$$\{q_1, q_2\} = \{q_1, p_2\} = \{q_2, p_1\} = \{p_1, p_2\} = 0, \qquad \{q_1, p_1\} = q_1^k, \qquad \{q_2, p_2\} = q_2^k$$

для любого $k = 0, \ldots, 4$.

Используя более сложные гамильтонианы, можно построить преобразования Бэклунда, сохраняющие более сложные скобки Пуассона, которые входят в определения дифференциальных уравнений Абеля.

Эти же преобразования Бэклунда можно построить, используя алгебраические интегралы уравнений Абеля. Для нахождения этих интегралов достаточно изменить порядок корней полинома Абеля и построить двойственное представление для полинома $P(x)$:

$$\widetilde{P}(x) = \widetilde{F}(x)\left(\sqrt{a_{2g+2}} + \sum_{i=m+1}^{2m} \frac{y_i}{(x - x_i)\widetilde{F}'(x_i)} + \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{(x - \lambda)\widetilde{F}'(\lambda)}\right),$$

где

$$\widetilde{F}(x) = \prod_{i=m+1}^{2m} (x - x_i)\phi(x).$$

Приравнивая коэффициенты при x в $P(x) = \widetilde{P}(x)$, мы получим семейство алгебраических интегралов дифференциальных уравнений Абеля (3.5) в частном случае $n = 2m$. Например, при $g = 1$ полиномы выражаются формулами

$$P(x) = \sqrt{a_4}(x - x_1)(x - \lambda) + \frac{y_1(x - \lambda)}{x_1 - \lambda} + \frac{\Lambda(x - x_1)}{\lambda - x_1},$$

$$\widetilde{P}(x) = \sqrt{a_4}(x - x_2)(x - \lambda) + \frac{y_2(x - \lambda)}{x_2 - \lambda} + \frac{\Lambda(x - x_2)}{\lambda - x_2},$$

так что искомый алгебраический интеграл имеет вид (2.12).

При $g=2$ и $m=g$ аналогичным образом можно получить два алгебраических интеграла уравнений Абеля на гиперэллиптической кривой второго рода

$$\frac{y_1-\Lambda}{(x_1-x_2)(x_1-\lambda)}+\frac{y_2-\Lambda}{(x_2-x_1)(x_2-\lambda)}-\sqrt{a_6}(x_1+x_2)=$$
$$=\frac{y_3-\Lambda}{(x_3-x_4)(x_3-\lambda)}+\frac{y_4-\Lambda}{(x_4-x_3)(x_4-\lambda)}-\sqrt{a_6}(x_3+x_4),$$
$$\frac{x_2(y_1-\Lambda)}{(x_1-x_2)(x_1-\lambda)}+\frac{x_1(y_2-\Lambda)}{(x_2-x_1)(x_2-\lambda)}-\sqrt{a_6}\,x_1x_2=$$
$$=\frac{x_4(y_3-\Lambda)}{(x_3-x_4)(x_3-\lambda)}+\frac{x_3(y_2-\Lambda)}{(x_4-x_3)(x_4-\lambda)}-\sqrt{a_6}\,x_3x_4.$$

Здесь λ является произвольным параметром, а $\Lambda=\pm\sqrt{f(\lambda)}$ — функция на фазовом пространстве.

Добавляя к этим алгебраическим интегралам условие постоянства формы гамильтонианов $H_{1,2}$ (3.17)

$$H_{1,2}(p_{1,2},q_{1,2})=H_{1,2}(\widetilde{p}_{1,2},\widetilde{q}_{1,2})$$

и решая полученную систему уравнений относительно четырех переменных $x_{3,4}=\widetilde{q}_{1,2}$ и $y_{3,4}==\widetilde{p}_{1,2}$, мы получим то же самое преобразование Бэклунда (3.14)–(3.16) при условии $a_6=0$. Как и для гамильтоновых систем, связанных с эллиптической кривой, другие преобразования Бэклунда можно построить, используя алгебраические интегралы, полученные методом Якоби [20] или Вейерштрасса [44].

4. ПРИМЕРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЭКЛУНДА

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле тяжести, которое описывается уравнениями Эйлера–Пуассона

$$\dot{M}=M\times\Omega+\gamma\times A,\qquad \dot{\gamma}=\gamma\times\Omega. \tag{4.1}$$

Здесь $M=(M_1,M_2,M_3)$ — вектор кинетического момента тела в подвижной системе координат такой, что соответствующий тензор инерции диагонален

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_3\end{pmatrix},\qquad I_k>0,$$

а вектор угловой скорости имеет вид

$$\Omega=\mathbf{I}^{-1}M=\bigl(I_1^{-1}M_1,I_2^{-1}M_2,I_3^{-1}M_3\bigr).$$

Вектор $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ — это единичный вектор вертикальной оси в подвижной системе координат, и $A=(A_1,A_2,A_3)$ — вектор, соединяющий неподвижную точку и центр масс (см. подробности в книге [5]).

Уравнения движения (4.1) являются гамильтоновыми уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=X,\qquad X=P\,dH,\qquad x=(M,\gamma), \tag{4.2}$$

относительно тензора Пуассона P на алгебре Ли $e^*(3)$ и функции Гамильтона

$$H=\frac{1}{2}(M,\Omega)+\frac{1}{2}(\gamma,A).$$

Соответствующие скобки Пуассона на алгебре $e^*(3)$

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \qquad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \qquad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \tag{4.3}$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, обладают двумя функциями Казимира. В качестве этих функций можно взять норму вектора Пуассона

$$C_1 = (\gamma, \gamma) = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

и проекцию кинетического момента на направление гравитационного поля

$$C_2 = (\gamma, M) = \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3.$$

В работе [21] С.В. Ковалевская описала все возможные тензоры инерции $\mathbf{I}$ и векторы A, для которых общие решения уравнений Эйлера–Пуассона (4.1) являются мероморфными функциями над комплексной плоскостью времени и которые могут быть представлены в виде абелевых функций. Далее мы предъявим автопреобразования Бэклунда, связанные с соответствующими дифференциальными уравнениями Абеля для этих интегрируемых систем. Таким образом, можно предположить, что построение интегрируемых дискретизаций динамических систем с помощью преобразований Бэклунда непосредственным образом следует из самого интегрирования уравнений движения в рамках теории Абеля.

Другие методы получения интегрируемых дискретизаций вращений твердого тела вокруг неподвижной точки и связанных с ними интегрируемых систем могут быть найдены в работах [18, 22, 27, 34].

4.1. Волчок Лагранжа. В случае Лагранжа тело является вращательно симметричным, т.е. два из трех главных моментов инерции равны друг другу, а неподвижная точка и центр масс находятся на оси симметрии. Предположим, что

$$I_1 = I_2 = 1, \qquad I_3 = a^{-1}, \qquad A = (0, 0, 1), \tag{4.4}$$

так что уравнения движения (4.1) обладают дополнительным независимым интегралом движения $K = (M, A) = M_3$.

В работе [25] Лагранж доказал, что третья компонента вектора Пуассона $\gamma_3(t)$ (косинус угла нутации) выражается через функцию Вейерштрасса $\wp(t)$. Построение преобразований Бэклунда мы начнем с краткого повторения вычислений Лагранжа. Следуя [25], рассмотрим уравнение для третьей компоненты вектора Пуассона

$$\dot\gamma_3^2 = (\gamma_2 M_1 - \gamma_1 M_2)^2. \tag{4.5}$$

Подставляя решения уравнений

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = \ell, \qquad K = k, \qquad H' = h$$

относительно M_1, M_2, M_3 и γ_1 в уравнение (4.5), получим

$$\dot\gamma_3^2 = \gamma_3^3 - h\gamma_3^2 + (2\ell k - 1)\gamma_3 + h - \ell^2 - k^2. \tag{4.6}$$

Здесь мы ввели функцию от исходных интегралов движения

$$H' = 2H + (1 - a)K = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \gamma_3,$$

для того чтобы симметризовать уравнение (4.6) относительно перестановки k и ℓ (см. [25]).

Определим теперь эллиптическую кривую $\mathcal{C}$ с помощью уравнения

$$y^2 = f(x), \qquad f(x) = x^3 - hx^2 + (2\ell k - 1)x + h - \ell^2 - k^2, \tag{4.7}$$

где $x = \gamma_3$ и $y = \dot\gamma_3$, а $f(x)$ — полином третьей степени, который называется *гироскопической функцией.* Далее отождествим уравнение (4.6) с дифференциальным уравнением на эллиптической кривой

$$\frac{dx}{y} = dt \qquad \text{или} \qquad \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = dt \tag{4.8}$$

и применим стандартную замену координат

$$w = \frac{1}{4}\left(x - \frac{h}{3}\right), \qquad W = \frac{dw}{dt},$$

приводящую уравнение кривой (4.7) к форме Вейерштрасса

$$W^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3. \tag{4.9}$$

Это позволяет выразить общее решение уравнения (4.6) через функцию Вейерштрасса:

$$\gamma_3(t) = \frac{h}{3} + 4\wp\left(\frac{t}{4} + \mathrm{const}\right).$$

Теперь рассмотрим соответствующее дифференциальное уравнение Абеля (2.10) и три точки пересечения кривой Лагранжа (4.7) с семейством прямых

$$g(x, y) = y - b_1 x - b_0.$$

Входящие в это уравнение коэффициенты b_1 и b_0 зависят от переменной времени, так же как и координаты двух точек пересечения

$$x_1 = \gamma_3(t), \quad y_1 = \dot\gamma_3(t) \qquad \text{и} \qquad x_2 = \widetilde\gamma_3(t), \quad y_2 = \dot{\widetilde\gamma}_3(t),$$

а координаты третьей точки пересечения постоянны: $x_3 = \lambda$ и $y_3 = \sqrt{f(\lambda)}$.

В этом случае отображение B_λ (3.12) можно выписать явно:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{x_1^4 - 2(\ell k + 1)x_1^2 + 2(\ell^2 + k^2 + y_1^2)x_1 - 2\ell k + 1}{(x_1^2 - 1)(\lambda - x_1)} + \frac{2y_1(y_1 - \Lambda)}{(\lambda - x_1)^2}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{2y_1(y_1^2 + 2x_1^3 - 2(\ell k + 1)x_1 + \ell^2 + k^2)}{(x_1^2 - 1)(\lambda - x_1)} - \frac{4y_1^2(\Lambda - y_1)}{(\lambda - x_1)^3} + \\ &\quad + \frac{(3y_1 - \Lambda)(x_1^4 - 2(\ell k + 1)x_1^2 + 2(\ell^2 + k^2 + y_1^2)x_1 - 2\ell k + 1)}{(x_1^2 - 1)(\lambda - x_1)^3}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$\Lambda = \sqrt{\lambda^3 - H'\lambda^2 - (2\ell k - 1)\lambda + H' - \ell^2 - k^2}$$

является функцией от исходных динамических переменных γ_3 и $\dot\gamma_3$.

Теорема 4. *Преобразование Бэклунда* (4.10)

$$B_\lambda\colon\ (x_1 = \gamma_3,\ y_1 = \dot\gamma_3) \to (x_2 = \widetilde\gamma_3,\ y_2 = \dot{\widetilde\gamma}_3)$$

сохраняет скобку Пуассона

$$\{x_1, y_1\} = 1 - x_1^2 \qquad \text{и} \qquad \{x_2, y_2\} = 1 - x_2^2,$$

которая совпадает с исходной скобкой Пуассона (4.3) *для этих переменных.*

Это же преобразование Бэклунда (4.10) можно получить, добавляя к условию сохранения формы гамильтониана $H'(x_1, y_1) = H'(x_2, y_2)$ алгебраический интеграл Абеля (2.12) и решая полученную систему уравнений относительно x_2, y_2.

Добавим теперь интеграл Эйлера (2.8)

$$\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}=x_1+y_1+c \tag{4.11}$$

к условию сохранения формы гамильтониана

$$H'=\frac{y_1^2-x_1^3-(2\ell k-1)x_1+\ell^2+k^2}{1-x_1^2}=\frac{y_2^2-x_2^3-(2\ell k-1)x_2+\ell^2+k^2}{1-x_2^2}. \tag{4.12}$$

Решения уравнений (4.11), (4.12) относительно x_2, y_2 имеют вид

$$\begin{gathered}x_2=x_1+\frac{x_1^4-2(\ell k+1)x_1^2+2(y_1^2+\ell^2+k^2)x_1-2\ell k+1}{B}+\frac{2(x_1^2-1)(y_1(x_1^2-1)+\sqrt{A}\,)y_1}{B^2},\\ y_2=y_1+\frac{2(2x_1^3-(\ell k+1)x_1+\ell^2+k^2+y_1^2)y_1}{B}+\frac{4y_1^2(x_1^2-1)^2(y_1(x_1^2-1)+\sqrt{A}\,)}{B^3}+\\ +\frac{(x_1^4-2(\ell k+1)x_1^2+2(y_1^2+\ell^2+k^2)x_1-2\ell k+1)(3y_1(x_1^2-1)+\sqrt{A}\,)}{B^2},\end{gathered} \tag{4.13}$$

где

$$A=cB^2+2(x_1^2-1)(cx_1+\ell k)B+(x_1^2-1)^2\bigl(c(x_1^2-1)+2\ell kx_1-\ell^2-k^2\bigr)$$

и

$$B=c(x_1^2-1)+2\ell kx_1-\ell^2-k^2-y_1^2.$$

Здесь c — произвольная постоянная, которую можно рассматривать как функцию от координат третьей точки пересечения кривой Лагранжа с семейством прямых.

Теорема 5. *Преобразование Бэклунда* (4.13)

$$B_c\colon\ (x_1=\gamma_3,\, y_1=\dot\gamma_3)\to(x_2=\widetilde\gamma_3,\, y_2=\dot{\widetilde\gamma}_3)$$

сохраняет скобку Пуассона

$$\{x_1,y_1\}=1-x_1^2\qquad \textit{и}\qquad \{x_2,y_2\}=1-x_2^2,$$

которая совпадает с исходной скобкой Пуассона (4.3) *для этих переменных.*

Как обычно, переменные γ_3, $\dot\gamma_3$ и $\widetilde\gamma_3$, $\dot{\widetilde\gamma}_3$ можно рассматривать как одни и те же переменные, но вычисленные в последовательные моменты времени:

$$\gamma_3=\gamma_3(t_0+kh)\equiv X_k,\qquad \dot\gamma_3=\dot\gamma_3(t_0+kh)\equiv Y_k$$

и

$$\widetilde\gamma_3=\gamma_3(t_0+(k+1)h)\equiv X_{k+1},\qquad \dot{\widetilde\gamma}_3=\dot\gamma_3(t_0+(k+1)h)\equiv Y_{k+1}.$$

Действуя таким образом, можно рассматривать преобразования Бэклунда B_λ и B_c как дискретизации исходного непрерывного движения, т.е. как многозначное отображение

$$\begin{pmatrix}X_k\\ Y_k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}X_{k+1}\\ Y_{k+1}\end{pmatrix},$$

для которого можно ввести понятие алгебраической энтропии

$$\mathcal{E}=\lim_{k\to\infty}\frac{\log d_k}{k},\qquad d_k=\max(\deg X_k,\deg Y_k),$$

используя явное выражение для энергии [19]. Мы предполагаем, что отображение B_c, отвечающее интегралу Эйлера, обладает ненулевой энтропией, в отличие от отображения B_λ, отвечающего интегралу Абеля. Однако для подтверждения этого предположения требуются более детальные вычисления, которые выходят за рамки данной статьи.

Для того чтобы построить дискретные отображения в терминах исходных переменных, можно использовать их выражения в терминах углов Эйлера θ, ψ, ϕ и сопряженных им моментов аналогично [22]. Так как в этом случае

$$x=\cos\theta,\qquad y=p_\theta\sin\theta,\qquad p_\phi=k,\qquad p_\psi=\ell,$$

то отображения B_λ и B_c являются каноническими унивалентными преобразованиями

$$(\theta_k,p_{\theta,k})\to(\theta_{k+1},p_{\theta,k+1}),$$

сохраняющими форму гамильтониана H' (4.12) и скобки Пуассона $\{p_\theta,\theta\}=1$. В отличие от преобразования Бэклунда, рассматриваемого в работе [22], построенные нами преобразования B_λ и B_c являются вещественными.

Аналогичным образом можно построить преобразования Бэклунда и для других систем, интегрирование которых сводится к решению уравнения вида (4.8) на эллиптической или гиперэллиптической кривой, например для неголономной системы Рауса [3] и ряда других неголономных систем [6], для которых неизвестно представление уравнений движения в виде уравнения Лакса.

4.2. Волчок Ковалевской. В случае Ковалевской тело является динамически симметричным, а центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, проходящей через неподвижную точку [21]. В этом случае главные моменты инерции удовлетворяют соотношению $I_1=I_2=2I_3$, а функция Гамильтона имеет вид

$$H=M_1^2+M_2^2+2M_3^2+2b\gamma_1,\qquad b\in\mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Дополнительный интеграл движения является полиномом четвертой степени по моментам

$$K=\xi_1\cdot\xi_2=\bigl(z_1^2-2b(\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2)\bigr)\bigl(z_2^2-2b(\gamma_1-\mathrm{i}\gamma_2)\bigr), \tag{4.15}$$

где

$$z_1=J_1+\mathrm{i}J_2,\qquad z_2=J_1-\mathrm{i}J_2,\qquad \mathrm{i}=\sqrt{-1}.$$

На общем уровне интегралов движения

$$\Gamma\colon\qquad C_1=1,\qquad C_2=\ell,\qquad K=k,\qquad H=h$$

переменные $z_{1,2}$ и $\xi_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi_1=\frac{4\dot z_1^2-R(z_1,z_1)}{(z_1-z_2)^2}\qquad\text{и}\qquad \xi_2=\frac{4\dot z_2^2-R(z_2,z_2)}{(z_1-z_2)^2}, \tag{4.16}$$

где

$$R(z_1,z_2)=z_1^2z_2^2-h(z_1^2+z_2^2)-4b\ell(z_1+z_2)-4b^2+k.$$

В работе [21] Ковалевская ввела переменные

$$q_{1,2}=\frac{R(z_1,z_2)\pm\sqrt{R(z_1,z_1)R(z_2,z_2)}}{2(z_1-z_2)^2},\qquad p_{1,2}=\sqrt{f(q_{1,2})}, \tag{4.17}$$

в терминах которых уравнения движения выражаются через гиперэллиптические квадратуры

$$\frac{dq_1}{p_1}+\frac{dq_2}{p_2}=dt,\qquad \frac{q_1\,dq_1}{p_1}+\frac{q_2\,dq_2}{p_2}=0 \tag{4.18}$$

на гиперэллиптической кривой

$$\mathcal{C}\colon\quad y^2=f(x)\equiv\bigl(4x^3+4hx^2+(4c^2+h^2-k)x+4b^2\ell^2\bigr)(4x^2+4hx+h^2-k) \tag{4.19}$$

второго рода $g=2$ (см. подробности и современные ссылки в книгах [5, 10]).

Теорема 6. *Преобразование Бэклунда* (3.14)–(3.16)

$$B_\lambda\colon\quad (q_1,p_1,q_2,p_2)\leftrightarrow(\widetilde{q}_1,\widetilde{p}_1,\widetilde{q}_2,\widetilde{p}_2)$$

сохраняет форму скобки Пуассона

$$\{q_1,q_2\}=\{q_1,p_2\}=\{q_2,p_1\}=\{p_1,p_2\}=0,\qquad \{q_j,p_j\}=4\sqrt{4b^4(\ell^2+q_j)^2+q_jp_j^2},\quad j=1,2,$$

которая совпадает с исходной скобкой Пуассона (4.3) *на алгебре* $e^*(3)$ *для переменных Ковалевской.*

Так как исходные физические переменные (компоненты кинетического момента, угловой скорости и вектора Пуассона) явно выражаются через переменные Ковалевской $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$, мы можем переписать преобразование Бэклунда (3.14)–(3.16) в виде дискретного отображения на алгебре $e^*(3)$, сохраняющего форму гамильтонианов Ковалевской второго и четвертого порядков по импульсам и скобки Пуассона. Мы не приводим соответствующие весьма громоздкие выражения в данной статье.

5. ТРИГОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Если для данной гамильтоновой системы нам известно представление Лакса для уравнений движения

$$\frac{d}{dt}L=[L,M]=LM-ML,$$

то проблема нахождения преобразований Бэклунда $x\to\widetilde{x}$ для соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби сводится к нахождению так называемых одевающих операторов M в калибровочном преобразовании (преобразовании Дарбу)

$$L(\lambda,x)=ML(\lambda,\widetilde{x})M^{-1}$$

(см. подробности в [22–24, 30, 34, 45]). Здесь L — матрица Лакса, которая зависит от спектрального параметра λ и динамических переменных x или $\widetilde{x}$, а спектральная кривая матрицы Лакса

$$\mathcal{C}\colon\quad f(\lambda,\mu)=\det(L(\lambda)-\mu I)=0$$

является производящей функцией необходимого для интегрируемости количества независимых интегралов движения. Общего метода построения одевающих операторов не существует, а в частных случаях для их построения принято использовать следующие правила [23, 30]:

- матрица Лакса $L(\lambda,\widetilde{x})$ имеет ту же алгебраическую форму, что и исходная матрица $L(\lambda,x)$;
- калибровочная матрица M "похожа" на матрицу $L(\lambda,x)$ и удовлетворяет тем же самым r-матричным скобкам Пуассона, что и исходная матрица Лакса $L(\lambda,x)$.

Тем не менее в некоторых случаях при построении преобразований Бэклунда с помощью калибровочного преобразования эти правила нарушаются [31, 37–39].

В данном разделе мы построим преобразования Бэклунда для двух систем на сфере, найденных в работах [11, 14], для которых представление уравнений движения в форме Лакса неизвестно и поэтому стандартные методы нахождения преобразований Бэклунда не работают.

Тем не менее, так как для этих систем уравнения движения интегрируются в абелевых квадратурах [42] на тригональных кривых, построение преобразований Бэклунда вида (1.10) в рамках теории Абеля остается алгоритмической процедурой, несмотря на то, что соответствующие алгебраические кривые не являются гиперэллиптическими.

5.1. Системы на сфере. Рассмотрим гамильтоновы уравнения (4.2)

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\}, \qquad \dot{\gamma}_i = \{\gamma_i, H\}. \tag{5.1}$$

Если функции Казимира суть $C_1 = (\gamma, \gamma) = 1$ и $C_2 = (\gamma, M) = 0$, то эти уравнения описывают движение по поверхности двумерной сферы $\mathbb{S}^2$ (см. [5]). В этом частном случае фазовое пространство изоморфно кокасательному расслоению $T^*\mathbb{S}^2$, для описания которого мы будем использовать стандартные сферические координаты

$$\gamma_1 = \sin\phi\,\sin\theta, \qquad \gamma_2 = \cos\phi\,\sin\theta, \qquad \gamma_3 = \cos\theta,$$

$$M_1 = \frac{\sin\phi\,\cos\theta}{\sin\theta}\,p_\phi - \cos(\phi)\,p_\theta, \qquad M_2 = \frac{\cos\phi\,\cos\theta}{\sin\theta}\,p_\phi + \sin(\phi)\,p_\theta, \qquad M_3 = -p_\phi,$$

так что исходные скобки Пуассона (4.3) будут иметь стандартный вид

$$\{\phi, p_\phi\} = 1 \qquad \text{и} \qquad \{\theta, p_\theta\} = 1.$$

Остальные скобки равны нулю.

Следуя [36, 41, 42], мы определим еще одну систему комплексных координат на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{S}^2$. Новые координаты $q_{1,2}$ являются корнями полинома второй степени

$$(x - q_1)(x - q_2) = x^2 + \mathrm{i}\sqrt{B_1}x - B_0, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}, \tag{5.2}$$

с коэффициентами

$$B_1 = \big(g(\theta)p_\theta - \mathrm{i}h(\theta)p_\phi\big)^2, \qquad B_0 = \alpha\exp\left(\mathrm{i}\phi - \int \frac{h(\theta)}{g(\theta)}\,d\theta\right).$$

Входящие в определение функции $g(\theta)$ и $h(\theta)$ являются произвольными функциями от угла нутации, а α — произвольный параметр. Канонически сопряженные моменты $p_{1,2}$ имеют вид

$$p_{1,2} = P(q_{1,2}), \qquad \text{где} \quad P(x) = \mathrm{i}\int \frac{d\theta}{g(\theta)} - \frac{\mathrm{i}p_\phi}{x}. \tag{5.3}$$

Как и для сферических координат, для новой системы координат исходные скобки Пуассона (4.3) приводятся к каноническому виду

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{q_1, q_2\} = \{p_1, p_2\} = 0. \tag{5.4}$$

Эти переменные являются переменными Дарбу–Нийенхейса для семейства согласованных скобок Пуассона на комплексифицированном кокасательном расслоении $T^*\mathbb{S}^2$ (см. [36, 41, 42]). Выбирая функции g, h и параметр α специальным образом, мы можем отождествить эти переменные с переменными разделения в уравнении Гамильтона–Якоби для пяти интегрируемых систем на сфере, обладающих нетривиальным кубическим интегралом движения [35, 36].

5.2. Система Горячева. В работе [14] Горячев исследовал интегрируемую систему на двумерной сфере с интегралами движения второй и третьей степени по импульсам

$$\begin{aligned} H_1 &= M_1^2 + M_2^2 + \frac{4}{3}M_3^2 + \frac{a\gamma_1}{\gamma_3^{2/3}} + \frac{b}{\gamma_3^{2/3}}, \\ H_2 &= -\frac{2M_3}{3}\left(M_1^2 + M_2^2 + \frac{8}{9}M_3^2 + \frac{b}{\gamma_3^{2/3}}\right) + \frac{a(3\gamma_3 M_1 - 2\gamma_1 M_3)}{3\gamma_3^{2/3}}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Переменные разделения $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$ (5.2), (5.3) для соответствующего уравнения Абеля–Якоби были построены в работе [42]:

$$q_1+q_2=\frac{\gamma_3^{4/3}M_3}{1-\gamma_3^2}+\frac{\mathrm{i}(M_1\gamma_2-\gamma_1M_2)\gamma_3^{1/3}}{1-\gamma_3^2},\qquad q_1q_2=\frac{a}{2(\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2)},\qquad p_{1,2}=\frac{3\mathrm{i}\gamma_3^{2/3}}{2}+\frac{\mathrm{i}M_3}{q_{1,2}}.$$

Исходные переменные как функции от переменных разделения могут быть получены с помощью соотношений

$$\begin{gathered}\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2=\frac{a}{2q_1q_2},\qquad \gamma_1-\mathrm{i}\gamma_2=2\frac{q_1q_2(1-\gamma_3^2)}{a},\qquad M_1+\mathrm{i}M_2=-\frac{a(q_1+q_2)}{2q_1q_2\gamma_3^{1/3}},\\ M_1-\mathrm{i}M_2=-\frac{4\mathrm{i}q_1^2q_2^2(p_1-p_2)}{a(q_1-q_2)}\gamma_3+\frac{2q_1q_2(1-\gamma_3^2)(q_1+q_2)}{a\gamma_3^{1/3}},\qquad M_3=\frac{\mathrm{i}q_1q_2(p_1-p_2)}{q_1-q_2},\end{gathered}\tag{5.6}$$

где

$$\gamma_3=\left(-\frac{2\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{3(q_1-q_2)}\right)^{3/2},$$

которые были предъявлены в работе [41].

На общем уровне интегралов движения $H_1=h_1$ и $H_2=h_2$ пары переменных разделения

$$x_1=q_1,\quad y_1=\frac{2\mathrm{i}}{3}q_1p_1\qquad\text{и}\qquad x_2=q_2,\quad y_2=\frac{2\mathrm{i}}{3}q_2p_2$$

удовлетворяют общему алгебраическому уравнению

$$f(x,y)=x^4-bx^2+(y^3-h_1y+h_2)x+\frac{a^2}{4}=0.\tag{5.7}$$

Уравнение (5.7) определяет алгебраическую кривую $\mathcal{C}$ на плоскости, которая при произвольных значениях $h_{1,2}$ является гладкой алгебраической кривой рода $g=3$. Базис голоморфных дифференциалов на тригональной кривой $\mathcal{C}$ имеет следующий вид:

$$\omega_1(x,y)=\frac{dx}{\partial f/\partial y},\qquad \omega_2(x,y)=\frac{x\,dx}{\partial f/\partial y},\qquad \omega_3(x,y)=\frac{y\,dx}{\partial f/\partial y}.\tag{5.8}$$

Подчеркнем, что это не гиперэллиптическая кривая, т.е. уравнение (5.7) не может быть приведено к стандартной форме $y^2=\sum a_kx^k$ с помощью бирациональной замены координат.

Пусть t_1 и t_2 — переменные времени, отвечающие гамильтонианам H_1 и H_2. Гамильтоновы уравнения движения для переменных $q_{1,2}=x_{1,2}$ строятся с помощью канонических скобок Пуассона (5.4) и разделенных уравнений (5.7), которые используются для построения гамильтонианов

$$\begin{aligned}H_1&=\frac{x_1^3-x_2^3+y_1^3-y_2^3}{y_1-y_2}-\frac{a^2(x_1-x_2)}{4x_1x_2(y_1-y_2)}-\frac{b(x_1-x_2)}{y_1-y_2},\\ H_2&=\frac{x_1^3y_2-x_2^3y_1+y_1y_2(y_1^2-y_2^2)}{y_1-y_2}-\frac{a^2(x_1y_1-x_2y_2)}{4x_1x_2(y_1-y_2)}-\frac{b(x_1y_2-x_2y_1)}{y_1-y_2}\end{aligned}\tag{5.9}$$

как функций от переменных разделения. Действительно, эволюция относительно квадратичного по импульсам гамильтониана H_1 описывается гамильтоновыми уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt_1}=\frac{\partial H_1}{\partial p_1}=-\frac{2\mathrm{i}}{3(y_2-y_1)}\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1},\qquad \frac{dx_2}{dt_1}=\frac{\partial H_1}{\partial p_2}=-\frac{2\mathrm{i}}{3(y_2-y_1)}\frac{\partial f(x_2,y_2)}{\partial y_2},\tag{5.10}$$

а второй поток относительно кубического по импульсам гамильтониана H_2 имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt_2}=\frac{\partial H_2}{\partial p_1}=\frac{2\mathrm{i}y_2}{3(y_1-y_2)}\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1},\qquad \frac{dx_2}{dt_2}=\frac{\partial H_2}{\partial p_2}=\frac{2\mathrm{i}y_1}{3(y_1-y_2)}\frac{\partial f(x_2,y_2)}{\partial y_2}. \tag{5.11}$$

Складывая уравнения движения (5.10) и (5.11), мы получим абелевы квадратуры в дифференциальной форме

$$\frac{dx_1}{\partial f(x_1,y_1)/\partial y_1}+\frac{dx_2}{\partial f(x_2,y_2)/\partial y_2}=-\frac{2\mathrm{i}}{3}\,dt_1,\qquad \frac{y_1dx_1}{\partial f(x_1,y_1)/\partial y_1}+\frac{y_2dx_2}{\partial f(x_2,y_2)/\partial y_2}=-\frac{2\mathrm{i}}{3}\,dt_2,$$

или

$$\omega_1(x_1,y_1)+\omega_1(x_2,y_2)=-\frac{2\mathrm{i}}{3}\,dt_1,\qquad \omega_3(x_1,y_1)+\omega_3(x_2,y_2)=-\frac{2\mathrm{i}}{3}\,dt_2. \tag{5.12}$$

В работе [7] рассматривается задача об обращении соответствующего отображения Абеля и о построении решения этих уравнений в терминах абелевых функций на соответствующей тригональной кривой.

Теперь предположим, что существует такая замена координат

$$B\colon\ (q_1,q_2,p_1,p_2)\leftrightarrow(\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2,\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2),$$

что новые координаты $\widetilde{q}_1=x_3$ и $\widetilde{q}_2=x_4$ удовлетворяют тем же самым уравнениям (5.12) с точностью до знака переменной времени:

$$\omega_1(x_3,y_3)+\omega_1(x_4,y_4)=\frac{2\mathrm{i}}{3}\,dt_1,\qquad \omega_3(x_3,y_3)+\omega_3(x_4,y_4)=\frac{2\mathrm{i}}{3}\,dt_2. \tag{5.13}$$

В этом случае четыре точки (x_k,y_k) тригональной кривой $\mathcal{C}$ удовлетворяют двум дифференциальным уравнениям Абеля

$$\omega_j(x_1,y_1)+\omega_j(x_2,y_2)+\omega_j(x_3,y_3)+\omega_j(x_4,y_4)=0,\qquad j=1,3.$$

Следуя идее Абеля, предложенной в работе [1], отождествим точки $(x_1,y_1),\dots,(x_4,y_4)$ с точками пересечения фиксированной тригональной кривой $\mathcal{C}$ (5.7) с семейством прямых

$$g(x,y)=y-P(x)=0,\qquad P(x)=b_1x+b_0.$$

Входящие в это уравнение переменные коэффициенты b_1 и b_0 неявно зависят от $t_{1,2}$, но могут быть получены из определения переменных разделения $y_k=P(x_k)$ (5.3):

$$b_0=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2},\qquad b_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}. \tag{5.14}$$

Исключая y из уравнений $f(x,y)=0$ и $g(x,y)=0$, получим полином Абеля (1.8), который в данном случае будет полиномом четвертой степени по x

$$\psi(x)=(b_1+1)(b_1^2-b_1+1)x^4+3b_0b_1^2x^3+(3b_0^2b_1-b_1h_1-b)x^2+(b_0^3-b_0h_1+h_2)x+\frac{a^2}{4}=$$
$$=(b_1+1)(b_1^2-b_1+1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Подставляя выражения для переменных коэффициентов $b_{0,1}$ (5.14) и выражения для гамильтонианов (5.9) в соотношение (1.9)

$$(x-x_3)(x-x_4)=\frac{\psi(x)}{(b_1+1)(b_1^2-b_1+1)(x-x_1)(x-x_2)},$$

получим

$$(x-x_3)(x-x_4)=x^2+\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)^3+(y_1-y_2)^2(x_1y_1+2x_1y_2-2x_2y_1-x_2y_2)}{((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)(y_1-y_2+x_1-x_2))(y_1-y_2+x_1-x_2)}\,x+\\+\frac{a^2(x_1-x_2)^3}{4x_1x_2((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)(y_1-y_2+x_1-x_2))(y_1-y_2+x_1-x_2)}. \quad (5.15)$$

Таким образом, мы выразили абсциссы третьей и четвертой точек пересечения $x_{3,4}$ в виде функций от координат двух первых точек пересечения $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$. Соответствующие ординаты третьей и четвертой точек пересечения $y_{3,4}$ также являются функциями от этих координат:

$$y_{3,4}=P(x_{3,4})=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\,x_{3,4}+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}. \quad (5.16)$$

Теперь мы должны перейти от точек на плоскости к динамическим переменным на фазовом пространстве $T^*\mathbb{S}^2$.

Теорема 7. *Подставляя*

$$x_{1,2}=q_{1,2},\quad y_{1,2}=\frac{2\mathrm{i}}{3}\,q_{1,2}p_{1,2}\qquad \text{и}\qquad x_{3,4}=\widetilde{q}_{1,2},\quad y_{3,4}=\frac{2\mathrm{i}}{3}\,\widetilde{q}_{1,2}\widetilde{p}_{1,2}$$

в (5.15) *и* (5.16), *мы получим явное определение канонического преобразования на кокасательном расслоении* $T^*\mathbb{S}^2$

$$B\colon\ (q_1,q_2,p_1,p_2)\leftrightarrow(\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2,\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2)$$

валентности $c=-1$, *которое сохраняет алгебраическую форму гамильтонианов* $H_{1,2}$ (5.9) *и меняет знак скобки Пуассона* (5.4):

$$\{\widetilde{q}_i,\widetilde{p}_j\}=-\delta_{ij},\qquad \{\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2\}=\{\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2\}=0.$$

Данное утверждение можно проверить непосредственными вычислениями. С физической точки зрения это преобразование описывает переход от левой системы координат к правой системе координат, и, как видим, для математического описания этого преобразования нам потребовалось использовать уравнения Абеля. Более содержательные преобразования Бэклунда можно построить, исключая из уравнений кривых вместо переменной y переменную x (см. п. 5.4 ниже).

В отличие от систем Штеккеля, связанных с гиперэллиптическими кривыми, в данном случае не существует гиперэллиптической инволюции уравнения кривой и дополнительного тривиального канонического преобразования $p\to -p$ валентности $c=-1$, которые бы позволили нам построить унивалентное каноническое преобразование, сохраняющее знак скобок Пуассона.

5.3. Система Дуллина–Матвеева. В работе [11] была найдена интегрируемая система на двумерной сфере со следующими интегралами движения второй и третьей степени по импульсам

$$H_1=M_1^2+M_2^2+\left(1+\frac{\gamma_3}{\gamma_3+c}-\frac{\gamma_3^2-1}{4(\gamma_3+c)^2}\right)M_3^2+\frac{a\gamma_1}{(\gamma_3+c)^{1/2}}+\frac{b}{\gamma_3+c},$$

$$H_2=-\left(M_1^2+M_2^2-\frac{M_3^2}{4}+\frac{(4\gamma_3^2+6\gamma_3c+c^2+1)M_3^2}{4(\gamma_3+c)^2}+\frac{b}{\gamma_3+c}\right)M_3+a\sqrt{\gamma_3+c}\,M_1-\frac{a\gamma_1M_3}{2\sqrt{\gamma_3+c}}.$$

Соответствующие переменные разделения $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$ (5.2), (5.3) построены в работе [36]:

$$q_1+q_2=-\frac{M_3}{2(c+\gamma_3)}-\frac{M_1+\mathrm{i}M_2}{\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2},\qquad q_1q_2=\frac{a}{2(\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2)\sqrt{c+\gamma_3}},\qquad p_{1,2}=\mathrm{i}(c+\gamma_3)+\frac{\mathrm{i}M_3}{q_{1,2}}.$$

Там же приведены выражения для построения исходных переменных как функций от переменных разделения

$$\gamma_1 - \mathrm{i}\gamma_2 = -\frac{2\sqrt{-\frac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{q_1-q_2}}\,q_1q_2}{a(q_1-q_2)^2}\big((c+1+\mathrm{i}p_1)q_1-(c+1+\mathrm{i}p_2)q_2\big)\big((c-1+\mathrm{i}p_1)q_1-(c-1+\mathrm{i}p_2)q_2\big),$$

$$\gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2 = \frac{a}{2\sqrt{-\frac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{q_1-q_2}}\,q_1q_2}, \qquad \gamma_3 = -\frac{\mathrm{i}(p_1q_1-q_2p_2)}{q_1-q_2} - c,$$

$$M_1 - \mathrm{i}M_2 = \frac{\mathrm{i}q_1q_2}{a\sqrt{-\frac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{q_1-q_2}}\,(q_1-q_2)}\Big((c+1+\mathrm{i}p_1)(c-1+\mathrm{i}p_1)(2p_1q_1-3q_2p_1-p_2q_2)q_1^3 +$$

$$+\big(2\mathrm{i}(p_1+p_2)c-4p_1p_2\big)(p_1-p_2)q_1^2q_2^2-(c+1+\mathrm{i}p_2)(c-1+\mathrm{i}p_2)(2p_2q_2-3q_1p_2-p_1q_1)q_2^3\Big),$$

$$M_1 + \mathrm{i}M_2 = -\frac{a(q_1(2q_1+q_2)p_1-q_2(2q_2+q_1)p_2)}{4\sqrt{-\frac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{q_1-q_2}}\,q_1q_2(p_1q_1-p_2q_2)}, \qquad M_3 = \frac{\mathrm{i}q_1q_2(p_1-p_2)}{q_1-q_2}.$$

На общем уровне интегралов движения $H_1 = h_1$ и $H_2 = h_2$ пары переменных разделения

$$x_1 = q_1, \quad y_1 = \mathrm{i}q_1p_1 \qquad \text{и} \qquad x_2 = q_2, \quad y_2 = \mathrm{i}q_2p_2$$

удовлетворяют общему разделенному уравнению

$$f(x,y) = y(c^2-1)x^3 + (2cy^2-b)x^2 + (y^3-h_1y+h_2)x + \frac{a^2}{4} = 0. \tag{5.17}$$

Это уравнение определяет тригональную кривую $\mathcal{C}$ со стандартным базисом голоморфных дифференциалов (5.8).

Уравнения движения для координат $q_{1,2} = x_{1,2}$ относительно квадратичного и кубического по импульсам гамильтонианов $H_{1,2}$ имеют следующий вид:

$$\frac{dx_1}{x_1((c^2-1)x_1^2+4cx_1y_1+3y_1^2-h_1)} + \frac{dx_2}{x_2((c^2-1)x_2^2+4cx_2y_2+3y_2^2-h_1)} = \mathrm{i}\,dt_2,$$
$$\frac{y_1\,dx_1}{x_1((c^2-1)x_1^2+4cx_1y_1+3y_1^2-h_1)} + \frac{y_2\,dx_2}{x_2((c^2-1)x_2^2+4cx_2y_2+3y_2^2-h_1)} = \mathrm{i}\,dt_1,$$

или

$$\omega_1(x_1,y_1)+\omega_1(x_2,y_2) = \mathrm{i}\,dt_2, \qquad \omega_3(x_1,y_1)+\omega_3(x_2,y_2) = \mathrm{i}\,dt_1.$$

Как и для системы Горячева, постулируем существование второго семейства переменных разделения $\widetilde{q}_1 = x_3$ и $\widetilde{q}_2 = x_4$, которые удовлетворяют тем же самым уравнениям с точностью до знака переменной времени, что позволяет нам построить дифференциальные уравнения Абеля

$$\omega_j(x_1,y_1)+\omega_j(x_2,y_2)+\omega_j(x_3,y_3)+\omega_j(x_4,y_4) = 0, \qquad j = 1,3.$$

Решения этих уравнений мы отождествляем с точками пересечения $(x_1,y_1),\ldots,(x_4,y_4)$ фиксированной тригональной кривой $\mathcal{C}$ (5.17) с семейством прямых

$$g(x,y) = y - P(x) = 0, \qquad P(x) = b_1x + b_0.$$

В этом уравнении коэффициенты b_1 и b_0 (5.14) неявно зависят от времени.

Исключая переменную y, получим полином Абеля (1.8)

$$\psi(x) = b_1\big((b_1+c)^2-1\big)x^4 + b_0\big(3b_1^2+4b_1c+c^2-1\big)x^3+\big(3b_0^2b_1+2b_0^2c-b_1h_1-b\big)x^2 + \\ + (b_0^3-b_0h_1+h_2)x + \frac{a^2}{4}.$$

Подставляя выражения для коэффициентов b_1, b_0 (5.14) и гамильтонианов $H_{1,2}$ в соотношение (1.9)

$$(x-x_3)(x-x_4) = \frac{\psi(x)}{b_1((b_1+c)^2-1)(x-x_1)(x-x_2)} = x^2+B_1x+B_0, \tag{5.18}$$

где

$$B_1 = \frac{x_1y_1-x_2y_2}{y_1-y_2} + \frac{x_1y_1-x_2y_2}{(c+1)(x_1-x_2)+y_1-y_2} + \frac{x_1y_1-x_2y_2}{(c-1)(x_1-x_2)+y_1-y_2},$$

$$B_0 = \frac{a^2(x_1-x_2)^3}{4x_1x_2((c-1)(x_1-x_2)+y_1-y_2)((c+1)(x_1-x_2)+y_1-y_2)(y_1-y_2)},$$

получим полином второй степени, коэффициенты которого зависят от координат двух первых точек пересечения $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$, а корни совпадают с абсциссами третьей и четвертой точек пересечения $x_{3,4}$. Соответствующие ординаты $y_{3,4}$ также являются более сложными функциями от $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$:

$$y_{3,4} = P(x_{3,4}) = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\,x_{3,4} + \frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}. \tag{5.19}$$

Теперь мы должны перейти от точек на плоскости к переменным на фазовом пространстве $T^*\mathbb{S}^2$.

Теорема 8. *Выражения* (5.18) *и* (5.19) *определяют преобразование кокасательного расслоения* $T^*\mathbb{S}^2$

$$B\colon\ (q_1,q_2,p_1,p_2) \leftrightarrow (\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2,\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2),$$

если положить

$$x_{1,2}=q_{1,2},\quad y_{1,2}=\mathrm{i}q_{1,2}p_{1,2} \qquad \text{и} \qquad x_{3,4}=\widetilde{q}_{1,2},\quad y_{3,4}=\mathrm{i}\widetilde{q}_{1,2}\widetilde{p}_{1,2}.$$

Данное преобразование сохраняет форму гамильтонианов $H_{1,2}$ *и меняет знак у скобки Пуассона* (5.4):

$$\{\widetilde{q}_i,\widetilde{p}_j\} = -\delta_{ij}, \qquad \{\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2\} = \{\widetilde{p}_1,\widetilde{p}_2\} = 0,$$

т.е. является каноническим преобразованием валентности $c=-1$, *или автопреобразованием Бэклунда.*

Данное утверждение можно доказать прямыми вычислениями. Как и для системы Горячева, это отображение отвечает симметрии между левой и правой системами координат, которая для рассматриваемой системы не может быть реализована в виде симметрий соответствующей тригональной кривой или в виде конечного сдвига на якобиане этой кривой.

5.4. Волчок Горячева–Чаплыгина. В заключение мы рассмотрим интегрируемую систему на двумерной сфере с интегралами второй и третьей степени по импульсам

$$H_1 = J_1^2+J_2^2+4J_3^2+a\gamma_1+\frac{b}{\gamma_3^2}, \qquad H_2 = 2J_3\left(J_1^2+J_2^2+\frac{b}{\gamma_3^2}\right)+a\gamma_3J_1, \qquad a,b\in\mathbb{R}, \tag{5.20}$$

которая была найдена Чаплыгиным [8] и Горячевым [13]. Переменные разделения и абелевы квадратуры на гиперэллиптической кривой второго рода для этой системы были построены Чаплыгиным [8].

Для того чтобы сравнить эту интегрируемую систему с системами Горячева и Дуллина–Матвеева, связанными с тригональными кривыми, мы воспользуемся переменными разделения (5.2), (5.3)

$$q_1+q_2=-\frac{2J_3}{\gamma_3^2}-\frac{J_1+\mathrm{i}J_2}{\gamma_3(\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2)},\qquad q_1q_2=\frac{a}{2\gamma_3^2(\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2)},\qquad p_{1,2}=\frac{\mathrm{i}\gamma_3^2}{2}+\frac{\mathrm{i}J_3}{q_{1,2}},\tag{5.21}$$

которые связаны каноническим преобразованием с переменными Чаплыгина. Исходные переменные выражаются через эти переменные разделения следующим образом:

$$\gamma_1-\mathrm{i}\gamma_2=\frac{4q_1q_2}{a(q_1-q_2)^2}\big((\mathrm{i}-2p_1)q_1^2p_1+(4p_1p_2-\mathrm{i}p_1-\mathrm{i}p_2)q_1q_2+(\mathrm{i}-2p_2)q_2^2p_2\big),$$

$$\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2=-\frac{\mathrm{i}a(q_1-q_2)}{4q_1q_1(p_1q_1-q_2p_2)},\qquad \gamma_3=\sqrt{-\frac{2\mathrm{i}(p_1q_1-q_2p_2)}{q_1-q_2}},$$

$$J_1-\mathrm{i}J_2=-\frac{8\mathrm{i}q_1q_2}{a(q_1-q_2)^2\sqrt{-\frac{2\mathrm{i}(p_1q_1-q_2p_2)}{q_1-q_2}}}\big((q_1p_1-q_2p_2)(\mathrm{i}-2p_1)p_1q_1^2+(q_1p_1+q_2p_2)(\mathrm{i}-2p_2)p_2q_2^2\big),$$

$$J_1+\mathrm{i}J_2=\frac{a(q_1^2p_1-q_2^2p_2)}{2q_1q_2(p_1q_1-q_2p_2)\sqrt{-\frac{2\mathrm{i}(p_1q_1-q_2p_2)}{q_1-q_2}}},\qquad J_3=\frac{\mathrm{i}q_1q_2(p_1-p_2)}{q_1-q_2}.$$

На общем уровне интегралов движения $H_1=h_1$ и $H_2=h_2$ переменные разделения

$$x_1=q_1,\quad y_1=2\mathrm{i}q_1p_1\qquad\text{и}\qquad x_2=q_2,\quad y_2=2\mathrm{i}q_2p_2$$

удовлетворяют одному общему разделенному уравнению

$$f(x,y)=(y^2-b)x^2+(y^3-h_1y+h_2)x+\frac{a^2}{4}=0.\tag{5.22}$$

Это уравнение определяет гиперэллиптическую кривую $\mathcal{C}$ второго рода с базисом голоморфных дифференциалов

$$\omega_1=\frac{dx}{x(3y^2+2xy-h_1)},\qquad \omega_2=\frac{ydx}{x(3y^2+2xy-h_1)}.$$

Как и ранее, для того чтобы получить дифференциальные уравнения Абеля, мы возьмем уравнения движения

$$\frac{\dot x_1}{x_1(3y_1^2+2x_1y_1-h_1)}+\frac{\dot x_2}{x_2(3y_2^2+2x_2y_2-h_1)}=0,$$
$$\frac{y_1\dot x_1}{x_1(3y_1^2+2x_1y_1-h_1)}+\frac{y_2\dot x_2}{x_2(3y_2^2+2x_2y_2-h_1)}=2\mathrm{i}$$

и предположим, что существует замена переменных $B\colon(q_1,q_2,p_1,p_2)\leftrightarrow(\widetilde q_1,\widetilde q_2,\widetilde p_1,\widetilde p_2)$, меняющая знак времени в уравнениях движения

$$\frac{\dot x_3}{x_3(3y_3^2+2x_3y_3-h_1)}+\frac{\dot x_4}{x_4(3y_2^2+2x_4y_4-h_1)}=0,$$
$$\frac{y_1\dot x_3}{x_3(3y_3^2+2x_3y_3-h_1)}+\frac{y_2\dot x_4}{x_4(3y_4^2+2x_4y_4-h_1)}=-2\mathrm{i},$$

где мы ввели обозначения

$$x_3 = \widetilde{q}_1, \quad y_3 = 2\mathrm{i}\widetilde{q}_1\widetilde{p}_1 \qquad \text{и} \qquad x_4 = \widetilde{q}_2, \quad y_4 = 2\mathrm{i}\widetilde{q}_2\widetilde{p}_2.$$

Складывая полученные уравнения движения, получаем уравнения Абеля на гиперэллиптической кривой

$$\omega_j(x_1, y_1) + \omega_j(x_2, y_2) + \omega_j(x_3, y_3) + \omega_j(x_4, y_4) = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{5.23}$$

Далее мы рассматриваем пересечение постоянной гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ с семейством прямых

$$g(x, y) = y - P(x) = 0, \qquad P(x) = b_1 x + b_1.$$

Как и ранее, в этом уравнении переменные коэффициенты b_1 и b_0 (5.14) зависят от времени. Подставляя $y = P(x)$ в уравнение $f(x, y) = 0$, получим полином Абеля

$$\begin{aligned}\psi &= b_1^2(b_1+1)x^4 + b_0 b_1(3b_1+2)x^3 + \big(3b_0^2 b_1 + b_0^2 - b_1 h_1 - b\big)x^2 + (b_0^3 - b_0 h_1 + h_2)x + \frac{a^2}{4} = \\ &= b_1^2(b_1+1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).\end{aligned} \tag{5.24}$$

Как обычно, абсциссы третьей и четвертой точек пересечения $x_{3,4}$ являются корнями полинома второй степени (1.9)

$$\begin{aligned}(x-x_3)(x-x_4) = x^2 + \left(x_1 + x_2 + \frac{(3y_1 + 2x_1 - 2x_2 - 3y_2)(x_1y_2 - x_2y_1)}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_2 + x_1 - x_2)}\right)x + \\ + \frac{a^2(x_1 - x_2)^3}{4x_1x_2(y_1 - y_2 + x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^2},\end{aligned} \tag{5.25}$$

а соответствующие ординаты определяются с помощью уравнения прямой $g(x, y) = 0$:

$$y_{3,4} = P(x_{3,4}) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\, x_{3,4} + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}. \tag{5.26}$$

Переходя от точек на плоскости к динамическим переменным, докажем следующее утверждение.

Теорема 9. *Уравнения* (5.25) *и* (5.26) *определяют каноническое преобразование переменных на фазовом пространстве* $T^*\mathbb{S}^2$

$$B\colon\ (q_1, q_2, p_1, p_2) \leftrightarrow (\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2),$$

которое сохраняет форму гамильтонианов $H_{1,2}$ *и меняет знак скобки Пуассона* (5.4), *т.е. автопреобразование Бэклунда для соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби* $H_{1,2} = h_{1,2}$.

Система Горячева–Чаплыгина интегрируется в абелевых квадратурах на гиперэллиптической кривой, т.е. является однородной системой Штеккеля. Тем самым согласно теореме 1 для этой системы существует унивалентное каноническое преобразование Бэклунда, которое зависит от дополнительных параметров. Для того чтобы построить такое преобразование, изменим часть переменных разделения и определим новые переменные

$$\chi_1 = x_1 y_1^2 - \frac{a^2}{4x_1} \qquad \text{и} \qquad \chi_2 = x_2 y_2^2 - \frac{a^2}{4x_2},$$

которые удовлетворяют разделенному уравнению

$$\chi^2 = f(y), \qquad f(y) = y^6 - 2h_1y^4 + 2h_2y^3 - (a^2 - h_1^2)y^2 - 2h_1h_2y + h_2^2. \tag{5.27}$$

Уравнения движения для переменных $y_{1,2}$ выражаются через стандартный базис голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической кривой (5.27):

$$\frac{\dot y_1}{\chi_1} + \frac{\dot y_2}{\chi_2} = 0, \qquad \frac{y_1\dot y_1}{\chi_1} + \frac{y_2\dot y_2}{\chi_2} = -2\mathrm{i}.$$

Эти уравнения позволяют нам переписать уравнения Абеля (5.23) в канонической форме (3.5). Для этого надо поменять местами абсциссы x и ординаты y точек пересечения и применить бирациональное преобразование $x \to \chi$.

Действительно, рассмотрим пересечение постоянной гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ (5.27) с семейством кубик

$$\chi = P(y), \qquad P(y) = y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0.$$

Ранее при построении полинома Абеля (5.24) мы исключали переменную y из системы уравнений для кривых, теперь же мы исключим переменную χ и получим полином Абеля пятого порядка по y

$$\psi(y) = f(y) - P(y)^2 = -2b_2(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4)(y - \lambda).$$

Здесь $y_{1,2}$ и $y_{3,4}$ — переменные корни полинома Абеля, которые зависят от времени, и λ — постоянный корень полинома Абеля, который рассматривается как произвольный параметр.

Согласно Абелю [1] полином третьего порядка $P(y)$ можно построить с помощью интерполяции по Лагранжу (3.10), используя следующие данные:

$$P(y_{1,2}) = \chi_{1,2} \qquad \text{и} \qquad P(\lambda) = \Lambda \equiv \sqrt{f(\lambda)}.$$

Таким образом, мы можем выразить третий и четвертый корни $y_{3,4}$ через первый и второй корни $y_{1,2}$ и соответствующие им координаты $\chi_{1,2}$ точек пересечения с помощью полинома (1.9):

$$(y - y_3)(y - y_4) = -\frac{f(y) - P(y)^2}{2b_2(y - y_1)(y - y_2)(y - \lambda)}. \tag{5.28}$$

Выражения для вторых координат $\chi_{3,4}$ третьей и четвертой точек пересечения имеют вид

$$\chi_k = P(y_k), \qquad k = 3, 4. \tag{5.29}$$

Непосредственные вычисления позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 10. *Уравнения* (5.28) *и* (5.29) *определяют каноническое преобразование переменных на фазовом пространстве* $T^*\mathbb{S}^2$, *которое сохраняет форму гамильтонианов* $H_{1,2}$ *и меняет знак скобки Пуассона, т.е. исходная скобка Пуассона*

$$\{\chi_i, y_j\} = 2\mathrm{i}\delta_{ij}\sqrt{a^2y_i^2 + \chi_i^2}, \qquad i, j = 1, 2,$$

переходит в

$$\{\chi_i, y_j\} = -2\mathrm{i}\delta_{ij}\sqrt{a^2y_i^2 + \chi_i^2}, \qquad i, j = 3, 4,$$

остальные скобки равны нулю (*см.* (5.4)).

Как и ранее, в этом случае существует каноническое преобразование $(\chi, y) \to (-\chi, y)$, связанное с гиперэллиптической инволюцией, которое позволяет построить унивалентное преобразование Бэклунда.

Итак, для волчка Горячева–Чаплыгина, используя бирациональное преобразование $x \to \chi$ и исключая переменную χ вместо переменной y из уравнений кривых на плоскости, можно построить преобразование Бэклунда, которое зависит от произвольного параметра λ (5.28). Для систем Горячева и Дуллина–Матвеева подобных бирациональных отображений и подобных унивалентных преобразований Бэклунда не найдено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках метода классической r-матрицы построение автопреобразований Бэклунда для уравнений Гамильтона–Якоби сводится к исследованию калибровочных преобразований или преобразований Дарбу соответствующих матриц Лакса. В рамках этого подхода получено большое количество примеров преобразований Бэклунда, зависящих от произвольного параметра, который можно рассматривать как шаг дискретизации соответствующего дискретного интегрируемого отображения [19, 22–24, 27, 30, 34]. Двумя основными недостатками этого подхода являются его неалгоритмичность и неприменимость к интегрируемым системам, для которых представление Лакса неизвестно.

В работах [31, 37–39] предложен метод построения автопреобразований Бэклунда, не зависящих от параметров, который позволяет строить новые интегрируемые системы с помощью так называемых гетеропреобразований Бэклунда, связывающих решения различных уравнений Гамильтона–Якоби. Так как в этих работах также используются представления Лакса, то и этот метод неприменим к системам, для которых представление Лакса неизвестно.

В данной работе оба подхода к построению автопреобразований Бэклунда сведены к алгоритмическому построению преобразований Бэклунда для гамильтоновых систем, интегрируемых в терминах абелевых квадратур. Доказано, что если нам известно, как явно свести уравнения движения к абелевым квадратурам, т.е. найти подходящие переменные разделения и разделенные уравнения, то в рамках теории Абеля автопреобразования Бэклунда являются соотношениями эквивалентности между корнями полинома Абеля (дивизорами). Тем самым для построения автопреобразований Бэклунда в этом случае достаточно применить стандартный метод, который Абель использовал при доказательстве своей знаменитой теоремы об интегралах алгебраических функций [1]. Подчеркнем, что этот метод применим не только к произвольным алгебраическим кривым на плоскости, но и к алгебраическим кривым в евклидовом пространстве [2, 15, 17].

В качестве примера приведены явные выражения для преобразований Бэклунда в случае волчка Лагранжа, волчка Ковалевской и волчка Горячева–Чаплыгина, которые связаны с гиперэллиптическими кривыми первого и второго рода, а также в случае систем Горячева и Дуллина–Матвеева, которые связаны с тригональными кривыми третьего рода на плоскости. Для двух последних интегрируемых систем представление уравнений движения в форме Лакса неизвестно, тем не менее в рамках теории Абеля построение преобразований Бэклунда не составило никакого труда.

Основными нерешенными вопросами являются построение автопреобразований Бэклунда, отвечающих дифференциальным уравнениями Абеля с дифференциалами общего вида, например, для систем, рассмотренных в работе Вейерштрасса [43], и построение гетеропреобразований Бэклунда, связывающих физически интересные интегрируемые системы, например системы с гамильтонианами натурального вида на кокасательных расслоениях римановых многообразий [40].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abel N.H.* Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes // Oeuvres complètes. Christiania: Grondahl & Son, 1881. T. 1. P. 145–211.
2. *Baker H.F.* Abel's theorem and the allied theory, including the theory of the theta functions. Cambridge: Univ. Press, 1897.
3. *Bizayev I.A., Tsiganov A.V.* On the Routh sphere problem // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. V. 46, N 8. Pap. 085202.
4. *Bobenko A.I., Suris Yu.B.* Discrete differential geometry. Integrable structure. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. (Grad. Stud. Math.; V. 98).
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2005.
6. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Цыганов А.В.* Неголономная динамика и пуассонова геометрия // УМН. 2014. Т. 69, №3. С. 87–144.
7. *Braden H.W., Enolski V.Z., Fedorov Yu.N.* Dynamics on strata of trigonal Jacobians and some integrable problems of rigid body motion // Nonlinearity. 2013. V. 26, N 7. P. 1865–1889.
8. *Чаплыгин С.А.* Новое частное рѣшение задачи о вращенiи тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1904. Т. 12, №1. С. 1–4.
9. *Clebsch A., Gordan P.* Theorie der Abelschen Functionen. Leipzig: Teubner, 1866.
10. *Дубровин Б.А.* Римановы поверхности и нелинейные уравнения. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
11. *Dullin H.R., Matveev V.S.* A new integrable system on the sphere // Math. Res. Lett. 2004. V. 11. P. 715–722.
12. *Euler L.* Institutionum calculi integralis. Petropoli: Acad. Imp. Sci., 1768–1770.
Рус. пер.: *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. М.: Гостехиздат, 1956.
13. *Горячев Д.Н.* О движенiи тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки въ случаѣ $A = B = 4C$ // Мат. сб. 1900. Т. 21, №3. С. 431–438.
14. *Горячев Д.Н.* Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшав. унив. изв. 1916. №3. С. 3–15.
15. *Green M.L., Griffiths P.A.* Abel's differential equations // Houston J. Math. 2002. V. 28, N 2. P. 329–351.
16. *Greenhill A.G.* The applications of elliptic functions. London: Macmillan and Co., 1892.
17. *Griffiths P.* The legacy of Abel in algebraic geometry // The legacy of Niels Henrik Abel / Ed. by O.A. Laudal, R. Piene. Berlin: Springer, 2004. P. 179–205.
18. *Hirota R., Kimura K.* Discretization of the Euler top // J. Phys. Soc. Japan. 2000. V. 69, N 3. P. 627–630.
19. *Hone A.N.W., Ragnisco O., Zullo F.* Algebraic entropy for algebraic maps // J. Phys. A: Math. Theor. 2016. V. 49, N 2. Pap. 02LT01.
20. *Jacobi C.G.J.* Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen // J. reine angew. Math. 1846. Bd. 32. S. 220–227.
21. *Kowalevski S.* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta math. 1889. V. 12. P. 177–232.
22. *Kuznetsov V.B., Petrera M., Ragnisco O.* Separation of variables and Bäcklund transformations for the symmetric Lagrange top // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37, N 35. P. 8495–8512.
23. *Kuznetsov V.B., Sklyanin E.K.* On Bäcklund transformations for many-body systems // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31, N 9. P. 2241–2251.
24. *Kuznetsov V., Vanhaecke P.* Bäcklund transformations for finite-dimensional integrable systems: A geometric approach // J. Geom. Phys. 2002. V. 44, N 1. P. 1–40.
25. *Lagrange J.-L.* Théorie des fonctions analytiques. Paris: Bachelier, Imprimeur-Librarie, 1847.
26. *Petrera M., Pfadler A., Suris Yu.B.* On integrability of Hirota–Kimura type discretizations // Regul. Chaotic Dyn. 2011. V. 16, N 3–4. P. 245–289.
27. *Ragnisco O., Zullo F.* Bäcklund transformations for the Kirchhoff top // SIGMA. Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2011. V. 7. Pap. 001.
28. *Richelot F.J.* Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems von Differentialgleichungen // J. reine angew. Math. 1842. Bd. 23. S. 354–369.
29. *Rosenlicht M.* Equivalence relations on algebraic curves // Ann. Math. Ser. 2. 1952. V. 56. P. 169–191.
30. *Sklyanin E.K.* Bäcklund transformations and Baxter's Q-operator // Integrable systems: From classical to quantum: Proc. 38th sess. Sém. math. supér., Montréal, 1999. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. P. 227–250. (CRM Proc. Lect. Notes; V. 26).

31. *Созонов А.П., Цыганов А.В.* О преобразованиях Беклунда, связывающих различные уравнения Гамильтона–Якоби // ТМФ. 2015. Т. 183, №3. С. 372–387.
32. *Stäckel P.* Ueber die Integration der Hamilton–Jacobi'schen Differentialgleichung mittels Separation der Variabeln: Habilitationsschr. Halle, 1891.
33. *Stäckel P.* Ueber die Integration der Hamilton'schen Differentialgleichung mittelst Separation der Variabeln // Math. Ann. 1897. Bd. 49, N 1. S. 145–147.
34. *Suris Yu.B.* The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach. Basel: Birkhäuser, 2003. (Prog. Math.; V. 219).
35. *Tsiganov A.V.* On a family of integrable systems on $\mathcal{S}^2$ with a cubic integral of motion // J. Phys. A: Math. Gen. 2005. V. 38, N 4. P. 921–927.
36. *Tsiganov A.V.* On natural Poisson bivectors on the sphere // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V. 44, N 10. Pap. 105203.
37. *Tsiganov A.V.* Simultaneous separation for the Neumann and Chaplygin systems // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20, N 1. P. 74–93.
38. *Tsiganov A.V.* On the Chaplygin system on the sphere with velocity dependent potential // J. Geom. Phys. 2015. V. 92. P. 94–99.
39. *Tsiganov A.V.* On auto and hetero Bäcklund transformations for the Hénon–Heiles systems // Phys. Lett. A. 2015. V. 379, N 45–46. P. 2903–2907.
40. *Tsiganov A.V.* Killing tensors with nonvanishing Haantjes torsion and integrable systems // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20, N 4. P. 463–475.
41. *Tsiganov A.V., Khudobakhshov V.A.* Integrable systems on the sphere associated with genus three algebraic curves // Regul. Chaotic Dyn. 2011. V. 16, N 3–4. P. 396–414.
42. *Vershilov A.V., Tsiganov A.V.* On bi-Hamiltonian geometry of some integrable systems on the sphere with cubic integral of motion // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42, N 10. Pap. 105203.
43. *Weierstrass K.* Über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid // Mathematische Werke. Berlin: Mayer & Müller, 1894. Bd. 1. S. 257–266.
44. *Weierstrass K.* Bemerkungen über die Integration der hyperelliptischen Differential-Gleichungen // Mathematische Werke. Berlin: Mayer & Müller, 1894. Bd. 1. S. 267–273.
45. *Wojciechowski S.* The analogue of the Bäcklund transformation for integrable many-body systems // J. Phys. A: Math. Gen. 1982. V. 15, N 12. P. 653–657.