

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Пятницкий, И. В. Гринберг, Расчет номограмм для определения параметров плазмы по реальным спектрам рассеяния, *ТВТ*, 1975, том 13, выпуск 4, 818–824

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

23 января 2025 г., 06:48:09



УДК 533.9.082.5

РАСЧЕТ НОМОГРАММ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ ПО РЕАЛЬНЫМ СПЕКТРАМ РАССЕЯНИЯ

Л. Н. Пятницкий, И. В. Гринберг

Описаны метод и результаты расчетов на ЭВМ спектров рассеяния с учетом апертурных искажений. Приведены номограммы для определения параметров плазмы по экспериментальным спектрам.

В методе диагностики плазмы, основанном на явлении рассеяния света, плотность n_e и температура T_e электронов определяются путем подбора теоретической кривой, описывающей экспериментальный спектр. В теории спектральное распределение интенсивности рассеянного света дается выражением [1]

$$dJ_\omega = J_0 n_e l \sigma_\omega (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) d\Phi, \tag{1}$$

где J_0 — мощность зондирующего излучения; l — длина зондируемого объема; $\sigma_\omega = \frac{r_e^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma_\alpha(x)}{\omega_e}$ — сечение рассеяния; ϑ — угол рассеяния; φ — азимут;

Φ — телесный угол наблюдения; r_e — радиус электрона; $x = \Delta\omega/\omega_e$ — безразмерная частота спектра; $\omega_e = \omega_e^0 \sin \frac{\vartheta}{2}$ — масштаб частоты;

$\alpha = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\pi n_e e^2}{kT_e}} \frac{1}{\sin \vartheta/2}$ — параметр, определяющий вид спектра рассеяния,

$$\Gamma_\alpha(x) = e^{-x^2} [F^2(x) + b^2 e^{-2x^2}]^{-1},$$

$$F(x) = 1 + \alpha^2 f(x) = 1 + \alpha^2 \left(1 - 2x \int_0^x e^{t^2 - x^2} dt \right), \tag{2}$$

$$b = \sqrt{\pi} \alpha^2 x.$$

Функции $\Gamma_\alpha(x)$ рассчитаны в [2], где описан также метод определения параметров плазмы по спектру рассеяния. Однако для расшифровки спектров соотношением (2) можно пользоваться только в том случае, если Φ меньше некоторого критического значения $\Phi_{кр}$ [3]. $\Phi_{кр}$ зависит от ϑ и α и в ряде случаев оказывается очень малым, тогда как в практике эксперимента существует тенденция применять конечные апертуры оптики, собирающей рассеянный свет. Конечная величина Φ означает, что свет собирается под разными углами ϑ , что приводит к апертурным искажениям спектров рассеяния. Реальные спектры могут заметно отличаться от спектральных распределений, описываемых формулами (2).

В [4] получено выражение для реального спектрального распределения с учетом конечной апертуры наблюдения, которое имеет вид

$$J_\omega^* = \frac{J_0}{\sqrt{\pi}} \frac{l_0 r_e^2}{\omega_e^0} n_e \iint_0^{2\pi} \frac{(1 - \sin^2 u \cos^2 v) \sin u}{\sin \vartheta \sin \vartheta/2} \Gamma_\alpha(x) du dv, \tag{3}$$

где

$$\sin \vartheta = \sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + (\sin u \sin v \cos \vartheta_0 - \cos u \sin \vartheta_0)^2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin u \sin v \cos \vartheta_0 - \cos u \sin \vartheta_0}{\sin u \cos v},$$

ϑ_0 — угол рассеяния, соответствующий оси симметрии телесного угла наблюдения; θ — угол при вершине телесного угла, $\alpha = \alpha_0 \frac{\sin \vartheta_0/2}{\sin \vartheta/2}$

$$x = x_0 \frac{\sin \vartheta_0/2}{\sin \vartheta/2}, \quad (\alpha_0, x_0 \text{ не зависят от } u \text{ и } v).$$

Переменной частью (3) является двойной интеграл, подынтегральное выражение которого состоит из двух сомножителей. Один из них (обозначим его через $a = a(u, v)$) является плавной функцией u и v , второй $\Gamma_\alpha(x)$ — имеет некоторые особенности. При определенных сочетаниях параметров ϑ_0 , θ и α_0 функция $1 + \alpha^2 f(x)$ в $\Gamma_\alpha(x)$ обращается в нуль в некоторых точках x_j . Если при этом x_j велико, то значение Γ -функции в точке будет очень большим ($\Gamma_\alpha \approx e^{x_j^2/\pi\alpha^4 x_j^2}$) и мы сталкиваемся здесь с функцией, близкой к δ -функции.

Анализ показывает, что в координатах u, v в интервале $u \in (0, \vartheta)$, $v \in (-\pi/2, \pi/2)$ подынтегральное выражение становится подобным δ -функции лишь в геометрическом месте точек, представляющем собой некоторую кривую, при этом интегрирование по одной из переменных, например, по v , позволяет избавиться от «особенностей» подынтегрального выражения. Поэтому интеграл в (3) переищем в виде

$$\Phi = 2 \int_0^\vartheta du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \Gamma_\alpha(x) dv, \quad (5)$$

и рассмотрим внутренний интеграл I

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \cdot e^{-x^2} dv}{F^2 + (be^{-x^2})^2}. \quad (6)$$

Прямое вычисление интеграла I на ЭВМ сопряжено с трудностями, обусловленными существованием особых точек v_j *. Основной вклад в значение I подынтегральное выражение вносит на малых участках $(v_j - \varepsilon, v_j + \varepsilon)$, и для достижения необходимой точности шаг интегрирования на этих участках должен быть очень малым, что приводит к большим затратам машинного времени. Кроме того, при малых шагах на точность отрицательно влияет ограниченность разрядной сетки ЭВМ.

Указанные трудности помогает преодолеть следующий метод исправления подынтегральной функции. В малой окрестности особой точки v_j подбирается приближенное выражение S_j (для подынтегральной функции S) такое, что интеграл от нее берется аналитически. Тогда в окрестности особых точек v_j интеграл I_j представляется в виде суммы двух интегралов

$$I_j = \int_{v_j - \varepsilon}^{v_j + \varepsilon} S_j dv + \int_{v_j - \varepsilon}^{v_j + \varepsilon} (S - S_j) dv. \quad (7)$$

Первое слагаемое представляется аналитически, второе не имеет никаких особенностей в точках v_j и интегрируется на ЭВМ.

* При $u = \text{const}$ они однозначно соответствуют точкам x_j .

В нашем случае требуется вычислить интеграл типа

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varepsilon_1(v) dv}{F^2(v) + \varepsilon_2^2(v)}, \quad (8)$$

где F обращается в нуль в K точках $v_j \in (-\pi/2, \pi/2)$, причем $\varepsilon_1(v_j), \varepsilon_2(v_j) \ll 1$ — величины одного порядка. Пусть $F'_j = F'_v(v_j) \neq 0$. Тогда

$$S = \frac{\varepsilon_1(v)}{F^2(v) + \varepsilon_2^2(v)}; \quad S_j = \frac{\varepsilon_1(v_j)}{(F'_j)^2(v - v_j)^2 + \varepsilon_2^2(v_j)}, \quad (9)$$

и (7) примет вид

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(S - \sum_{j=1}^K S_j \right) dv + \Delta, \quad (10)$$

где

$$\Delta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{j=1}^K S_j dv = \quad (11)$$

$$= \sum_{j=1}^K \frac{1}{F'_j} \frac{\varepsilon_1(v_j)}{\varepsilon_2(v_j)} \left[\arctg \left(\frac{\pi/2 - v_j}{\varepsilon_2(v_j)} F'_j \right) + \arctg \left(\frac{v_j + \pi/2}{\varepsilon_2(v_j)} F'_j \right) \right].$$

Так как

$$\left| \frac{\pi/2 - v_j}{\varepsilon_2(v_j)} F'_j \right|, \quad \left| \frac{\pi/2 + v_j}{\varepsilon_2(v_j)} F'_j \right| \gg 1,$$

то

$$\Delta \approx \sum_{j=1}^K \frac{\pi}{F'_j} \frac{\varepsilon_1(v_j)}{\varepsilon_2(v_j)}. \quad (11a)$$

Таким способом (6) интегрируется на ЭВМ в случае, если можно использовать линейную аппроксимацию функции $1 + \alpha^2 f(x) = F[\alpha(v), x(v)]$ в точках v_j . Однако, как показал анализ, при некоторых значениях внешних параметров при $v = \pi/2 - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) первая производная $F'_v = F'_v(v_*)$ мала по сравнению с ее второй производной $F''_v = F''_v(v_*)$, причем $F'_v/F''_v \approx -\text{tg } \varepsilon \rightarrow 0$ (при $\varepsilon \rightarrow 0$). Поэтому в этой области необходимо воспользоваться вторым членом разложения функции F . Исправляющая функция $S_*(v)$ будет иметь вид

$$S_*(v) = \frac{E_1(v_*)}{[F'_v(v - v_*) + F''_v/2(v - v_*)^2]^2 + E_2^2(v_*)}. \quad (12)$$

Напомним, что для применения методики необходимо иметь аналитическое выражение для интеграла от исправляющей функции

$$\Delta_* = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_*(v) dv. \quad (13)$$

Вводя новую переменную интегрирования $y = [(v - v_*) / M] + 1$ (где $M = F'_v/F''_v$), проводя преобразования (13) и заменяя в пределах интегрирования $\frac{\pi}{2} - v_* = \varepsilon$, получим

$$\Delta_* = \frac{4E_1}{(F''_v)^2 M^3} \int_{1+\varepsilon/M-\pi/M}^{1+\varepsilon/M} \frac{dy}{(y^2 - 1)^2 + (2E_2/F''_v M^2)^2}. \quad (14)$$

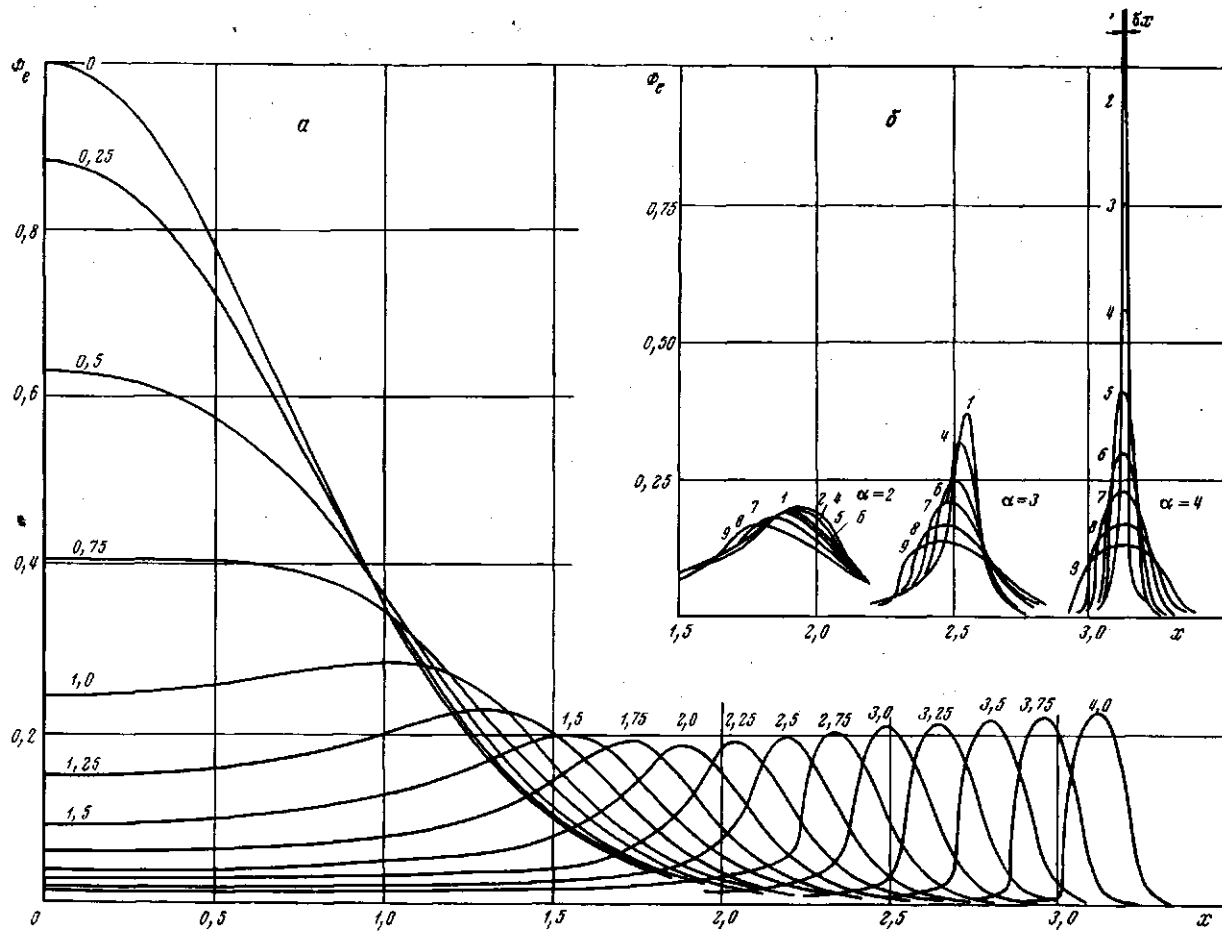


Рис. 1. Спектры рассеяния для $\theta_0=90^\circ$, $d/f=1/1,4$, $\Phi_0(0,0)=0,507$ (а) и влияние апертуры на спектры рассеяния для $\theta_0=90^\circ$, $\alpha_0=2,0$; $3,0$ и $4,0$ (б).

1 — $d/f=0$; 2 — $1/8$; 3 — $1/5,6$; 4 — $1/4$; 5 — $1/2,8$; 6 — $1/2,0$; 7 — $1/1,4$; 8 — $1/1$; 9 — $1/0,7$; δx — полуширина кривой 1 ($\alpha=4$)

Учитывая, что $M \approx -\operatorname{tg} \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), имеем $1 + \varepsilon/M \approx \varepsilon^2/3$ и, следовательно,

$$\Delta = \frac{4E_1}{(F''')^2 |M|^3} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{(y^2 - 1)^2 + T^2}, \quad (15)$$

где

$$T = 2E_2 / F'' M^2.$$

Формула (15) содержит известный интеграл, выражение для которого резко упрощается в интересующем нас случае $T \ll 1$, $\pi/M \gg 1$:

$$\Delta \approx \frac{1}{4} \ln \frac{\pi/M + 1}{\pi/M - 1} - \frac{\pi/M}{(\pi/M)^2 - 1} + \frac{\pi}{2T}. \quad (16)$$

Для исправляющей функции можно даже принять $\Delta \approx \pi/2T$, тогда

$$\Delta \approx \pi a / b F'. \quad (17)$$

При программной реализации метода встретились дополнительные трудности, связанные с наличием второго корня уравнения

$$F'_*(v - v_*) + \frac{F''_*}{2} (v - v_*)^2 = 0, \quad (18)$$

что наряду с исправлением подынтегральной функции в точке v_* приводит к ухудшению этой же функции в точке $v = v_* - 2F''_*/F'_*$. Поэтому описанный метод в случае, когда $v_* \in (-\pi/2, \pi/2)$, применялся на отрезке $(-\pi/2, v_* + |F'_*/F''_*|)$.

Описанный прием использовался для вычисления (5). Так как расчеты довольно громоздки, интегрирование ограничивалось тремя углами рассеяния: $\phi_0 = 135, 90$ и 45° , которые чаще других могут встречаться в экспериментах.

По конструктивным и другим соображениям в опытах могут использоваться различные телесные углы наблюдения рассеянного света. Их величина определяется относительным отверстием собирающего объектива. Расчеты проводились для объективов со стандартными относительными отверстиями от 1/8 до 1/0,7. Величина параметра α_0 менялась в диапазоне от 0 до 4 с шагом 0,25. Результаты расчетов представляют реальные спектральные распределения $\Phi(x_0)$ с параметром α_0 . Дополнительными параметрами являются ϕ_0 и θ (или относительное отверстие d/f). На рис. 1, а в качестве примера приведены функции $\Phi(x_0)$ для случая $\phi = 90^\circ$ при $d/f = 1/1,4$ и α_0 , принадлежащих диапазону (0,4).

Влияние апертуры на спектр рассеяния показан на рис. 1, б для $\phi = 90^\circ$ и $\alpha_0 = 2,0; 3,0$ и $4,0$. Для сравнения на том же рисунке (кривая 1) приведены идеальные спектры — функции $\Gamma_\alpha(x)$, вычисленные в [1].

Реальные спектры рассеяния даются в относительных единицах $\Phi(x_0)/\Phi_{\alpha_0=0}(0)$, x_0 . Величина $\Phi_{\alpha_0=0}(0)$, приведенная на рисунке, позволяет вычислить абсолютную спектральную и интегральную интенсивности рассеянного света. Соотношение между безразмерной частотой x_0 и $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ (ω_0 — частота зондирующего света) дается выражением

$$x_0 = \Delta\omega / \omega_e,$$

где

$$\omega_e = \frac{2\omega}{c} \sin \phi_0 / 2 \sqrt{\frac{2kT_e}{m}}.$$

Однако величина T_e в плазме обычно заранее неизвестна. Поэтому установление этого соответствия входит в задачу расшифровки спектров.

Расшифровка спектра и определение параметров плазмы основано на подобии экспериментальных и расчетных спектров. Если $\Delta\omega_1$ и x_1^* — ха-

* Индекс 0 при x и α здесь и в дальнейшем опускается.

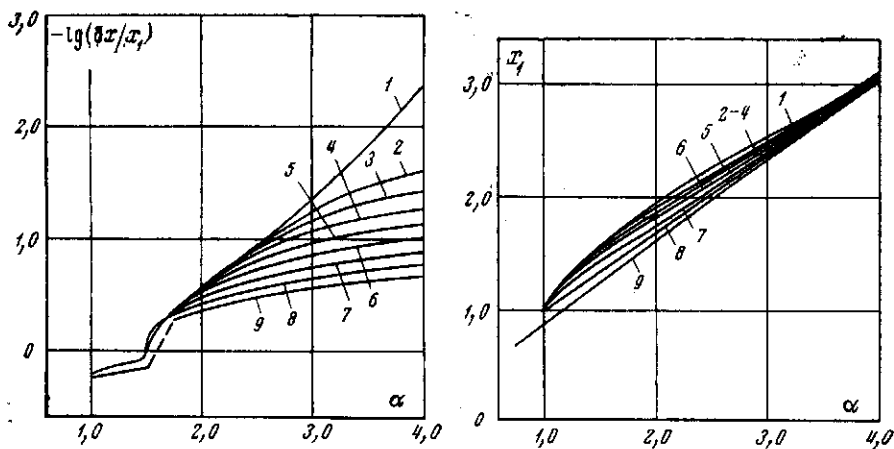


Рис. 2. Номограммы для определения параметров плазмы при $\theta=45^\circ$ ($\alpha > 1$): 1-9 — то же, что на рис. 16

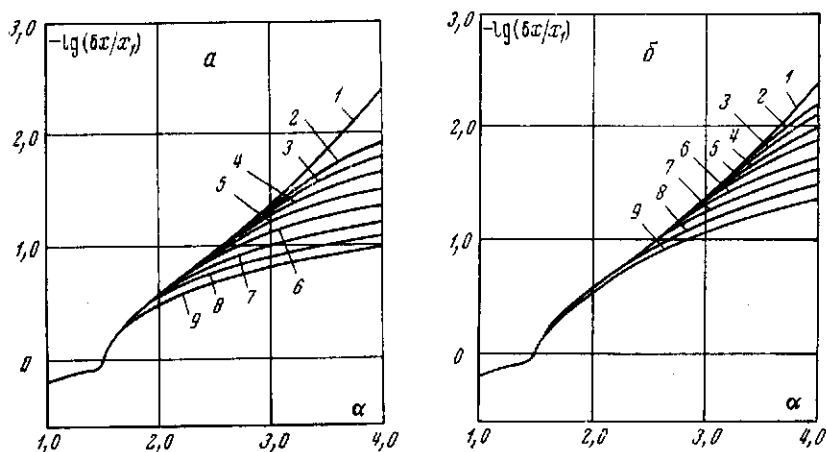


Рис. 3. Функции $\delta x/x_1 \cdot (\alpha)$ для $\theta_0=90^\circ$ (а) и $\theta_0=135^\circ$ (б): 1-9 — то же, что на рис. 16

рактерные точки или отрезки спектров, то для произвольной координаты $\Delta\omega$ и Δx

$$\Delta\omega/\Delta\omega_1 = \Delta x/x_1. \quad (19)$$

Масштаб частоты $\Delta\omega_1/x_1$ и параметр α подбираются из условия наилучшего совпадения экспериментальных точек и теоретической кривой. Зная эти величины, найдем

$$T_e = \frac{mc^2}{8\omega^2 k \sin^2 \theta_0/2} \left(\frac{\Delta\omega_1}{x_1} \right)^2; \quad n_e = \frac{m}{8\pi e^2} \alpha^2 \left(\frac{\Delta\omega_1}{x_1} \right)^2. \quad (20)$$

Однако метод подбора слишком трудоемкий, поэтому удобнее пользоваться номограммами. Номограммы для определения параметров плазмы по идеальным спектрам рассеяния приведены в [2]. При $\alpha > 1$ ($x_1 \neq 0$) они представляют собой зависимости $\delta x/x_1(\alpha)$ и $x_1(\alpha)$, где $\delta(x)$ — полуширина; x_1 — положение максимума спектральной кривой.

Подобные зависимости для реальных спектров в случае $\theta=45^\circ$ приведены на рис. 2. На том же рисунке для сравнения кривыми 1 показаны функции $\delta x/x_1$ и $x_1(\alpha)$, характеризующие идеальные спектры. Как видно из сопоставления кривых, различие в поведении функции $\delta x/x_1$ может быть весьма значительным. Функции $x_1(\alpha)$ для разных апертур также отличаются

друг от друга, но это отличие невелико. Сильное расхождение в функциях $\delta x/x_1$ сохраняется и в случае углов рассеяния 90 и 135° , что видно из графиков рис. 3, тогда как разброс кривых $x_1(\alpha)$ для этих углов не превышает 10% .

Соотношения типа (19) позволяют с помощью номограмм легко определить параметры плазмы. С этой целью находят из эксперимента полуширину $\delta\omega$ и положение максимума $\Delta\omega_1$ спектрального контура, и по приведенным зависимостям определяют α и x_1 , а следовательно, T_e и n_e .

При $\alpha < 1$ ($x=0$) в [2] использовались функции $\delta x_{0,8}(\alpha)$ и $\delta x(\alpha)$, где $\delta x_{0,8}$ — ширина спектральной кривой на уровне $0,8$ максимума. В случае реальных апертур подобные функции для угла 45° приведены на рис. 4. Формулы для определения T_e и n_e подобны (20). Различия в поведении этих кривых для углов 90 и 135° значительно меньше и не превышают 10% , поэтому в этих случаях с достаточной точностью можно пользоваться номограммами для идеальных спектров в [2].

Номограммы рис. 2–4 дают представление об ошибках, которые могут возникнуть при определении параметров плазмы, если не учитывать апертурных искажений. При малых α эта ошибка, как правило, невелика, но при $\alpha > 1$ она может быть весьма значительной.

Пользуясь номограммами, можно выбрать оптимальные параметры экспериментальной установки для диагностики плазмы методом рассеяния.

Все сказанное выше относится к параметрам электронов. Параметры ионов вычисляются из другой компоненты спектра рассеяния, вид которой определяется параметром β [1]

$$\beta = \sqrt{Z \frac{T_e}{T_i} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}} \quad (21)$$

Так как эта компонента имеет ту же структуру, что и (2), некоторые со-

ображения о ее поведении в зависимости от апертуры можно высказать на основе полученных выше результатов. Ионная компонента имеет заметную интенсивность при больших значениях α , но при этом $\beta \sim \sqrt{Z(T_e/T_i)}$, поэтому влияние апертуры на нее сказывается значительно меньше, так что в первом приближении ею можно пренебречь.

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. E. E. Salpeter. Phys. Rev., 120, 1528, 1960.
2. Л. Н. Пятницкий, К. К. Олевинский. Теплофизика высоких температур, 8, 904, 1970.
3. Л. Н. Пятницкий, В. В. Коробкин. Ж. техн. физ., 40, 2449, 1970.
4. Л. Н. Пятницкий, Г. П. Хаустович, В. В. Коробкин. Теплофизика высоких температур, 7, № 2, 359, 1969.

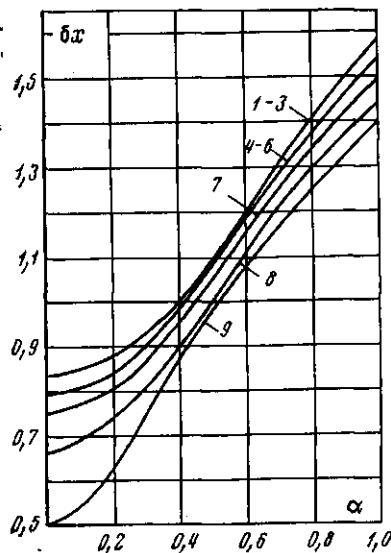
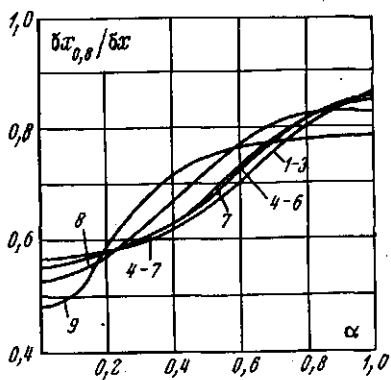


Рис. 4. Номограммы для определения параметров плазмы при $\theta_0 = 45^\circ$ ($\alpha < 1$): 1–9 то же, что на рис. 16