

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. A. Kubyshin, Sommerfeld–Watson summation of  
perturbation series,  
*TMF*, 1984, Volume 58, Number 1, 137–145

<https://www.mathnet.ru/eng/tmf4437>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read  
and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

April 23, 2025, 15:34:53



## СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПО ЗОММЕРФЕЛЬДУ — ВАТСОНУ

Кубышин Ю. А.

Сформулированы условия, при которых ряд теории возмущений суммируем по Зоммерфельду — Ватсону. Разработана процедура приближенного восстановления суммы ряда. Приведены результаты для некоторых физических задач.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории поля в рамках метода теории возмущений (ТВ) функциям типа функций Грина, аномальных размерностей,  $\beta$ -функции (или функции Гелл-Мана — Лоу) и т. п. соответствуют формальные ряды по константе связи  $g$ :

$$(1) \quad \beta(g) \sim \sum_{n=h_0}^{\infty} a_n (-g)^n.$$

Для широкого класса моделей было показано, что коэффициенты  $a_n$  растут факториально с ростом  $n$  и ряд (1) является расходящимся (см. [1, 2], а также обзор результатов в [3]). Имеется широкий произвол в определении функции  $\beta(g)$  по ее разложению (1). Например, к  $\beta(g)$  может быть добавлена произвольная функция типа  $f(g) \exp(-a/g)$  ( $f$  регулярна в окрестности  $g=0$ ), коэффициенты разложения которой в ряд по  $g$  в точке  $g=0$  равны нулю. Поэтому для однозначного решения задачи о восстановлении функции  $\beta(g)$  по ряду (1) требуется дополнительная информация о свойствах функции или ряда.

Часто разложение такого типа суммируются по Борелю, т. е. сумма ряда определяется интегралом Лапласа:

$$(2) \quad \beta(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} B(xg), \quad B(x) = \sum_{n=h_0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (-x)^n.$$

Согласно теореме Ватсона [4] функция  $\beta(g)$  может быть представлена в виде (2), если она удовлетворяет так называемому сильному асимптотическому условию [5]: а) функция  $\beta(g)$  аналитична в области

$$G = \{g | 0 < |g| < R, |\arg g| < \pi/2 + \delta, \delta > 0\};$$

б) существуют такие  $C$  и  $\sigma$ , что при всех  $N$  и всех  $g$  в области  $G$

$$\left| \beta(g) - \sum_{n=k_0}^N a_n (-g)^n \right| \leq C \sigma^{N+1} (N+1)! |g|^{N+1}.$$

В настоящее время лишь в некоторых модельных теориях удалось доказать, что функции Грина удовлетворяют сильному асимптотическому условию. Кроме того, эффективные методы решения задачи о приближенном восстановлении функции  $\beta(g)$  по нескольким первым коэффициентам ТВ и асимптотике  $a_n$  при  $n \rightarrow \infty$  на основе формулы (2) (например, метод конформ-Борель [6]) существенно используют информацию об асимптотике  $\beta(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ .

Здесь мы изучим другой способ суммирования рядов ТВ. В разделе 2 сформулированы условия, при которых разложение (1) суммируемо по Зоммерфельду — Ватсону, а также указана связь такого метода суммирования с суммированием по Борелю. В разделе 3 описан способ решения задачи о приближенном восстановлении суммы ряда. Для проверки эффективности этой процедуры она была применена для вычисления критических индексов фазовых переходов исходя из  $\epsilon$ -разложений и для восстановления  $\beta$ -функции в скалярной безмассовой модели  $\varphi_{(4)}^4$  (раздел 4).

## 2. СУММИРОВАНИЕ ПО ЗОММЕРФЕЛЬДУ — ВАТСОНУ

Пусть имеется ряд (1), вообще говоря расходящийся, и выполняются следующие условия.

А. Существует функция  $a(z)$  (назовем ее коэффициентной функцией) такая, что  $a(n) = a_n$  при  $n = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$ .

Б.  $a(z)$  аналитична при  $\text{Re } z > \sigma$ , где  $\sigma$  — некоторое число и  $\sigma < k_0$ .

В.  $a(z) = \Gamma(z + \nu) \mu(z)$  с некоторым параметром  $\nu > 0$ , причем функция  $\mu(z)$  такая, что при  $|z| \rightarrow \infty$  в области аналитичности

$$(3) \quad \mu(z) = Cz^\alpha \frac{1}{A^z} \left( 1 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right) \quad (A > 0).$$

Доказательство того, что условия «А» — «В» выполняются, для реалистичных моделей квантовой теории поля представляет собой сложную и пока не решенную проблему. Поэтому в этой статье мы будем считать «А» — «В» предположениями, которые, как мы увидим ниже, приводят к разумным результатам, хорошо согласующимся с другими подходами. Здесь мы приведем лишь некоторые соображения в пользу справедливости сделанных предположений. Обычно коэффициенты ряда ТВ (1) для модели с действием  $S[\varphi] = S_0[\varphi] + gS_{\text{int}}[\varphi]$  ( $S_0$  — свободная часть действия,  $S_{\text{int}}$  определяет взаимодействие) определяются функциональными интегралами типа

$$(4) \quad a_n = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{J_0} \int \prod_x D\varphi(x) \prod_i \varphi(y_i) e^{-S_0[\varphi]} (S_{\text{int}}[\varphi])^n.$$

Исходя из интуитивного понимания функционального интеграла (4), основанного на аналогии с интегралом конечной кратности, мы можем считать, что сходимость в (4) не нарушится, если  $n$  комплексное и  $\text{Re } n > \sigma$

$>0$ . Вычисление  $a_n$  методом перевала дает при больших  $n$  [1-3]

$$a_n = C\Gamma(n+\nu)n^\alpha \frac{1}{A^n} \left(1 + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \dots\right).$$

Однако при выводе этой формулы нигде не используется факт, что  $n$  — натуральное число. Его можно считать комплексным с  $|\arg n| < \pi/2$ , что также подтверждается анализом обычных интегралов. Условия «А»—«В» выполняются в теории с сильной нелинейностью  $\varphi_{(d)}^m$  ( $d=2m/(m-2)$ ),  $m \rightarrow \infty$  [7] и для ряда моделей (см., например, [8]).

Теперь мы сформулируем важное утверждение (для простоты мы ограничимся случаем  $k_0=1$ ,  $\nu=1$ ; обобщение тривиально). Пусть имеется формальный ряд

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (-x)^n$$

такой, что для него существует коэффициентная функция  $\alpha(z)$ , обладающая следующими свойствами:

- 1)  $\alpha(n) = \alpha_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ ;
- 2)  $\alpha(z)$  аналитична при  $\operatorname{Re} z > \sigma$ ,  $0 < \sigma < 1$ ;
- 3)  $\alpha(z)/\Gamma(z+1) = \mu(z)$  есть функция конечной степени при  $\operatorname{Re} z > \sigma$ ;

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \mu\left(\sigma + re^{\pm i \frac{\pi}{2}}\right) \right|}{r} = \pi - \delta, \quad \delta > 0.$$

Тогда существует функция  $f(x)$  такая, что

- а)  $f(x)$  аналитична в области  $D = \{x \mid |x| > 0, |\arg x| \leq \frac{\pi}{2} + \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta\}$ ;
- б) ряд (5) является асимптотическим для  $f(x)$  при  $|x| \rightarrow 0$  равномерно в  $D$ ;
- в) такая функция  $f(x)$  единственна;
- г) справедливо равенство

$$(6) \quad f(x) = -\frac{1}{2i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} dz \frac{\alpha(z)x^z}{\sin \pi z}, \quad \sigma < \sigma_1 < 1.$$

Прежде всего заметим, что по теореме Карлсона [9] из условий 2-4 следует, что функция  $\mu(z)$  (а следовательно, и  $\alpha(z) = \Gamma(z+1)\mu(z)$ ) единственным образом определяется своими значениями в целых точках  $\mu(n) = \alpha_n/\Gamma(n+1)$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$

Введем функцию  $\tilde{\mu}(z) = \mu(\sigma+z)$  и воспользуемся понятием индикатора функции  $h(\theta)$ , который для функции конечной степени  $\tilde{\mu}(z)$  определяется соотношением [9]

$$h(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\tilde{\mu}(re^{i\theta})|}{r}, \quad |\theta| < \pi/2.$$

Из этого определения следует, что для произвольного  $\varepsilon > 0$  и для всех достаточно больших значений  $r$  справедливо неравенство

$$(7) \quad |\tilde{\mu}(re^{i\theta})| < \exp((h(\theta) + \varepsilon)r).$$

Из условия 4 имеем  $h(\pi/2) = h(-\pi/2) = \pi - \delta \equiv \kappa_1$ . Если обозначить  $\kappa_0 = h(0)$ , то из свойства тригонометрической выпуклости индикатора следует, что

$$(8) \quad h(\theta) \leq \kappa_1 |\sin \theta| + \kappa_0 \cos \theta$$

при  $|\theta| < \pi/2$ . Пользуясь неравенствами (7) и (8), нетрудно показать, что интеграл (6) сходится и определяет аналитическую функцию по  $x$  в области  $D$ , определенной в п. «а». Смещая контур интегрирования в (6) вправо и пользуясь теоремой о вычетах, получим

$$(9) \quad f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha(n) (-x)^n + R_N(x),$$

$$(10) \quad R_N(x) = (-1)^{N+1} \frac{x^{N+\gamma}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy x^{iy} \frac{\alpha(N+\gamma+iy)}{\sin \pi(\gamma+iy)} \quad (0 < \gamma < 1).$$

Можно показать, что интеграл в (10) сходится для любых  $N$  и существуют числа  $C$  и  $\sigma$  такие, что

$$(11) \quad |R_N(x)| < C |x|^{N+\gamma} (N+1)! N \sigma^{N+1}$$

для всех  $N > N^*$  ( $N^*$  — фиксированное число) и всех  $x \in D$  (см. приложение). Тогда

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow 0 \\ x \in D}} \left( f(x) - \sum_{n=1}^N \alpha_n (-x)^n \right) / x^N = 0,$$

т. е. ряд (5) является асимптотическим для  $f(x)$  при  $|x| \rightarrow 0$  равномерно в  $D$ . По теореме Карлемана [5] из (11) следует, что функция  $f(x)$  единственна. Сформулированное выше утверждение доказано.

Формула (6) является преобразованием типа Меллина. Такой способ суммирования широко используется в теории полюсов Редже [10] и получил название метода Зоммерфельда — Ватсона. Возможность такого суммирования рядов ТВ обсуждалась в [7].

Из аналитичности функции  $f(x)$  в  $D$  и неравенства (11) следует, что  $f(x)$  удовлетворяет сильному асимптотическому условию и имеет ряд (5) в качестве сильного асимптотического ряда в  $D$ . В силу теоремы Ватсона ряд (5) суммируем по Борелю и его борелевская сумма совпадает с суммой в смысле Зоммерфельда — Ватсона. Кроме того, используя (6), легко показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  в области аналитичности справедливо неравенство

$$|f(|x|e^{i\theta})| \leq |x|^{\sigma+\varepsilon} B(\sigma+\varepsilon, \theta),$$

$$B(\sigma+\varepsilon, \theta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\theta y} \left| \frac{\alpha(\sigma+\varepsilon+iy)}{\sin \pi(\sigma+\varepsilon+iy)} \right|.$$

Таким образом, если справедливы предположения «А»—«В», то ряд (1) суммируем по Зоммерфельду — Ватсону и его сумма  $\beta(g)$  аналитична по  $g$  в многолистной области  $\{g \mid |g| > 0, |\arg g| < 3\pi/2\}$ .

При  $\operatorname{Re} z \leq \sigma$  коэффициентная функция, вообще говоря, имеет особенности. Их характер и положение связаны с асимптотикой  $\beta(g)$  при  $|g| \rightarrow \infty$

в области аналитичности. Пусть, например, самой правой особенностью функции  $a(z)$  в комплексной  $z$ -плоскости является особенность  $a(z) = \alpha_0(z - \zeta_0)^{\gamma+1} + \dots$ . Тогда из формулы типа (6) следует, что

$$(12) \quad \beta(g) = \frac{\alpha_0 \sin \pi \gamma \Gamma(\gamma+1)}{\sin \pi \zeta_0} \frac{g^{\zeta_0}}{(\ln g)^{\gamma+1}} + o(|g|^{\zeta_0})$$

при  $|g| \rightarrow \infty$  (если  $\sin \pi \zeta_0 \neq 0$ ).

### 3. АППРОКСИМАЦИЯ СУММЫ РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Обычно в моделях квантовой теории поля известно лишь несколько первых коэффициентов ТВ. В некоторых случаях известен главный член асимптотики  $a_n$  при  $n \rightarrow \infty$ ; для модели  $\phi_{(4)}^4$  известна еще и первая поправка  $A_1/n$  (см. (3)). Всю эту информацию можно учесть при приближенном восстановлении функции  $\beta(g)$  по ряду (1) на основе формулы суммирования Зоммерфельда — Ватсона. Допустим, что единственными особенностями функции  $a(z)$  являются полюса и разрезы. При этом асимптотика  $\beta(g)$  при  $g \rightarrow \infty$  имеет вид (12). Введем функцию  $\tau(z) = A^z \mu(z) = A^z a(z) / \Gamma(z + \nu)$ . Из (3) следует, что при  $|z| \rightarrow \infty$  и  $\text{Re } z > \sigma$

$$(13) \quad \tau(z) = Cz^\alpha \left( 1 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right).$$

Выберем параметр  $\nu > 0$  таким, что  $\alpha$  — целое число. Тогда разумно аппроксимировать функцию  $\tau(z)$  рациональной функцией, так называемым многоточечным аппроксимантом Паде [14]:

$$\left[ \frac{M_1}{M} \right] (z) = Q_{M_1}(z) / P_{M_2}(z),$$

где  $Q_{M_1}$  и  $P_{M_2}$  — полиномы по  $z$  степеней  $M_1$  и  $M_2$ , соответственно, и  $P_{M_2}(0) = 1$ . Коэффициенты полиномов определяются по известным  $K$  членам ряда ТВ (1)

$$\left[ \frac{M_1}{M} \right] (n) = a_n A^n / \Gamma(n + \nu); \quad n = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + K - 1,$$

т. е. мы имеем задачу о рациональной интерполяции  $\tau(z)$ . На коэффициенты полиномов можно также наложить условие совпадения асимптотик аппроксиманта и функции  $\tau(z)$  (см. формулу (13)) при  $|z| \rightarrow \infty$  с точностью до известных членов.

Сходимость последовательности аппроксимантов Паде для случая, когда узлы интерполяции уходят на бесконечность, в настоящее время доказана лишь для некоторого класса мероморфных функций, так называемых функций типа Стильтьеса [12]. Однако хорошее согласие результатов, полученных в разделе 4, с другими теоретическими подходами и с экспериментом (для критических индексов) является указанием на применимость описанной выше процедуры аппроксимации.

Аппроксиманты для суммы Зоммерфельда — Ватсона ряда (1) вычисляются по формуле

$$\beta_{M_1, M_2}(g) = -\frac{1}{2i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} dz \left(\frac{g}{A}\right)^z \frac{\Gamma(z+\nu)}{\sin \pi z} \left[ \frac{M_1}{M_2} \right](z).$$

При расчетах выявилась замечательная черта этого подхода: если в данной физической задаче построить последовательность аппроксимантов, учитывающих различное число коэффициентов ТВ  $a_n$  и членов в асимптотической формуле (13) или соответствующих различным целым значениям  $\alpha$ , то для подавляющей части аппроксимантов самые правые полюса в комплексной  $z$ -плоскости лежат относительно близко друг другу. Это приводит к устойчивой аппроксимации асимптотического поведения  $\beta(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ .

#### 4. ФИЗИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Описанная выше процедура аппроксимации применялась для вычисления критических индексов фазовых переходов в рамках полевого подхода к критическим явлениям. Индексы  $\eta$ ,  $\nu$ ,  $\omega$  представлялись в виде разложения по параметру  $2\varepsilon$  до членов  $(2\varepsilon)^4$  включительно, учитывающих четырехпетлевое приближение в  $O(N)$ -симметричной модели  $\Phi_{(4)}^4$  [13]. Мы вычисляли приближенные значения этих индексов в точке  $2\varepsilon=1$ , учиты-

Т а б л и ц а 1

N		1	2	3	4
1	$\eta$	$0,0313 \pm 0,0005$	$0,0333 \pm 0,0001$	$0,0315 \pm 0,0025$	$0,016 \pm 0,014$ $0,625 \pm 0,005$
	$\nu$	$0,627 \pm 0,006$	$0,628 \pm 0,002$	$0,6300 \pm 0,0008$	
	$\omega$	$0,786 \pm 0,020$	$0,781 \pm 0,015$	$0,782 \pm 0,010$	
2	$\eta$	$0,034 \pm 0,001$	$0,0352 \pm 0,0001$	$0,0335 \pm 0,0025$	$0,675 \pm 0,001$
	$\nu$	$0,673 \pm 0,003$	$0,666 \pm 0,004$	$0,6693 \pm 0,0010$	
	$\omega$	$0,781 \pm 0,026$	$0,777 \pm 0,015$	$0,778 \pm 0,008$	
3	$\eta$	$0,036 \pm 0,002$	$0,0354 \pm 0,0001$	$0,0340 \pm 0,0025$	$0,7054 \pm 0,0011$ $0,779 \pm 0,006$
	$\nu$	$0,713 \pm 0,007$	$0,700 \pm 0,007$	$0,7054 \pm 0,0011$	
	$\omega$	$0,776 \pm 0,041$	$0,779 \pm 0,007$	$0,779 \pm 0,006$	

Т а б л и ц а 2

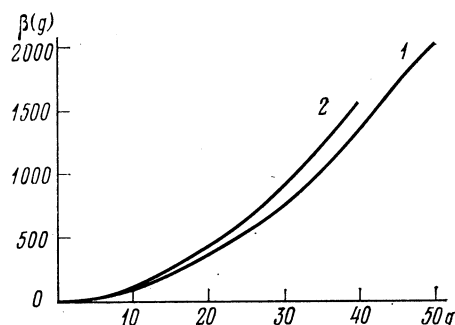
	N	$\eta$	$1/\nu$	$\omega$
$f_0$	1	$0,326 \pm 0,008$	$1,32 \pm 0,03$	$2,18 \pm 0,11$
	2	$0,448 \pm 0,003$	$1,82 \pm 0,10$	$2,37 \pm 0,09$
	3	$0,570 \pm 0,010$	$2,33 \pm 0,18$	$2,59 \pm 0,13$
$\zeta_0$	1	$2,40 \pm 0,16$	$1,18 \pm 0,05$	$0,88 \pm 0,04$
	2	$2,44 \pm 0,20$	$1,20 \pm 0,07$	$0,89 \pm 0,02$
	3	$2,46 \pm 0,23$	$1,20 \pm 0,12$	$0,89 \pm 0,03$
$\zeta_0$ [13]		$2 \div 3$	$1,0 \div 1,3$	$0,7 \div 0,9$

вая характер асимптотики коэффициентов ТВ  $a_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Результаты приведены в табл. 1 (1 столбец). Там же для сравнения приведены экспериментальные значения [14] (4 столбец), а также результаты расчетов в некоторых других теоретических подходах: методом конформ-Борель в рамках модели  $\Phi_{(3)}^4$  [14] (3 столбец) и в рамках  $\varepsilon$ -разложения [13]

(2 столбец). Мы получили также значения параметров  $f_0$  и  $\xi_0$ , определяющих асимптотику функций  $\eta(2\varepsilon)$ ,  $(1/\nu)(2\varepsilon)$ ,  $\omega(2\varepsilon)$  при  $2\varepsilon \rightarrow \infty$  ( $f \sim f_0(2\varepsilon)^{\xi_0}$ ) (табл. 2). Оценки величины  $\xi_0$  были получены в [13] из условия минимизации относительной ошибки аппроксимации. Абсолютные ошибки, указанные в табл. 1 и 2, определялись по наибольшему отклонению значений, даваемых аппроксимантами, построенными с учетом наибольшего числа коэффициентов ТВ, от среднего значения.

Вторая задача, которая решалась суммированием по Зоммерфельду — Ватсону — восстановление  $\beta$ -функции (функции Гелл-Мана — Лоу) в  $O(N)$ -инвариантной безмассовой теории  $(16\pi^2/4!)g\varphi_{(4)}^4$ . Главный интерес представляет вопрос о существовании нетривиального нуля у  $\beta$ -функции и вид асимптотики  $\beta(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ .

Мы восстановили поведение  $\beta(g)$  в интервале  $0 < g \leq 50$  для  $N=1$  (рисунок, кривая 1) и  $N=10$ . При построении аппроксимантов мы учитывали значения первых четырех коэффициентов ТВ [15], главный член асимптотики  $a_n$  при  $n \rightarrow \infty$  [1, 2] и первую поправку  $A_1$  в (13) ( $A_1 = -4,7$  для  $N=1$  и  $A_1 = 1,6$  для  $N=10$ ) [16]. Относительная ошибка аппроксимации при  $g=50$  составила примерно 20% для  $N=1$  и 6% для  $N=10$ . На рисунке приведены две кривые, аппроксимирующие поведение  $\beta(g)$  для  $N=1$ : кривая 1 вычислена усреднением по кривым, полученным суммированием по Зоммерфельду — Ватсону; кривая 2 вычислена методом конформ-Борель в [6] (в этом случае относительная ошибка равна 10% при  $g=40$ ). Результаты хорошо согласуются между собой. Мы получили следующие значения параметров  $\beta_0$  и  $\xi_0$  ( $\beta(g) \sim \beta_0 g^{\xi_0}$  при  $g \rightarrow \infty$ ):



$$\beta_0 = \begin{cases} 1,06 \pm 0,03, \\ 2,13 \pm 0,06, \end{cases} \quad \xi_0 = \begin{cases} 1,90 \pm 0,05 & \text{при } N=1, \\ 1,90 \pm 0,01 & \text{при } N=10, \end{cases}$$

что качественно согуласуется с асимптотикой  $\beta(g) \sim 0,9g^2$ , полученной в [6] для  $N=1$  из условия минимума относительной ошибки аппроксимации. Проведенный анализ поведения функции  $\beta(g)$  показывает, что, по-видимому, имеет место нульзарядная ситуация. Теория  $\varphi_{(4)}^4$  внутренне противоречива и может использоваться для описания взаимодействия частиц лишь вместе с другими полями и типами взаимодействий. Заметим, что все полученные результаты существенно используют предположения «А» — «В», сделанные в разделе 2.

В заключение я выражаю признательность Д. В. Ширкову, В. П. Волбуеву, Д. И. Казакову, О. В. Тарасову за полезные и стимулирующие обсуждения.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Выберем  $\varepsilon$  из условия  $0 < \varepsilon < \delta - \delta_1$ ; ему отвечает некоторое  $R = R(\varepsilon)$  такое, что при  $r > R$  выполняется неравенство (7), где индикатор  $h(\theta)$  удовлетворяет (8). Тогда при  $\tau_N = N + \gamma > R + \sigma$



$$|\mu(\tau_N - \sigma + iy)| < \exp[\kappa_1 |y| + \kappa_0 \tau_N + \varepsilon(\tau_N + |y|) - (\kappa_0 + \varepsilon)\sigma].$$

По формуле Стирлинга существует постоянная  $B$  такая, что при больших  $N$

$$|\Gamma(\tau_N + iy)| \leq B(\tau_N^2 + y^2)^{1/2(\tau_N - 1/2)} \exp\left(-y \operatorname{arctg} \frac{y}{\tau_N} - \tau\right).$$

Остаточный член  $R_N(x)$  (см. (10)) удовлетворяет неравенству

$$(П.1) \quad |R_N(x)| < \frac{4|x|^{\tau_N} \exp[(\varepsilon + \kappa_0)\tau_N - \sigma]}{|\sin \pi\gamma|} B \times \\ \times \int_0^\infty dy \exp(Uy - \tau_N - 1) [(\tau_N + 1)^2 + y^2]^{1/2(\tau_N + 1/2)}; \\ U = \frac{\pi}{2} - (\delta - \delta_1 - \varepsilon) - \operatorname{arctg} \frac{y}{\tau_N + 1}.$$

Выберем  $\lambda$  из условия  $0 < \lambda < \delta - (\delta_1 + \varepsilon)$ , а по нему найдем  $\omega$  такое, чтобы при  $y/(\tau_N + 1) \geq \omega$  выполнялось неравенство

$$\frac{\pi}{2} > \operatorname{arctg} \frac{y}{\tau_N + 1} \geq \frac{\pi}{2} - \lambda \equiv \operatorname{arctg} \omega.$$

Разобьем интервал интегрирования в (П.1) на  $(0, \omega(\tau_N + 1))$  и  $(\omega(\tau_N + 1), \infty)$  и оценим каждый из интегралов по отдельности:

$$а) \quad I_1 = \int_0^{\omega(\tau_N + 1)} dy \exp(Uy - \tau_N - 1) [(\tau_N + 1)^2 + y^2]^{1/2(\tau_N + 1/2)} < \\ < (\tau_N + 1)^{\tau_N + 1/2} e^{-\tau_N - 1} \int_0^{\omega(\tau_N + 1)} dy e^{Uy} \left[1 + \frac{y^2}{(\tau_N + 1)^2}\right]^{1/2(\tau_N + 1/2)} < \\ < C_1 (N+1)! \sigma_1^{N+1} N^\nu; \\ \sigma_1 = e^{\omega U_0} \sqrt{1 + \omega^2}; \quad U_0 = \frac{\pi}{2} - (\delta - \delta_1 - \varepsilon);$$

б) При  $y > \omega(\tau_N + 1) U < -\Delta(\varepsilon, \lambda) < 0$ , где  $\Delta(\varepsilon, \lambda) \equiv \delta - \delta_1 - \varepsilon - \lambda$ ,

$$I_2 < e^{-\tau_N - 1} (1 + \omega^2)^{1/2(\tau_N + 1/2)} \int_{\omega(\tau_N + 1)}^\infty e^{-\Delta(\varepsilon, \lambda)y} y^{\tau_N + 1/2} dy < \\ < C_2 (N+1)! N^{\nu - 1/2} \sigma_2^{N+1}; \quad \sigma_2 = \sqrt{1 + \omega^2} / (\varepsilon \Delta(\varepsilon, \lambda)).$$

Окончательно получаем оценку (1) для остаточного члена  $R_N(x)$ , где  $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2) \times \times e^{\varepsilon + \kappa_0}$ , справедливую для всех  $N \geq N^* > R - \sigma$  и для всех  $x \in D$ .

### Литература

- [1] Липатов Л. Н. — ЖЭТФ, 1977, 72, вып. 2, 411–427.
- [2] Brezin, Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. — Phys. Rev., 1977, D15, № 6, 1544–1557.
- [3] Bogomolny E. B., Fateev V. A., Lipatov L. N. Calculation of high orders of perturbation theory in quantum field theory — in Soviet Scientific Reviews, sect. A. Physics Reviews, v. 2, 1980 (ed. by Khalatnikov I. M.), p. 247–393.
- [4] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИИЛ, 1951, 504 с.
- [5] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4, Анализ операторов. М.: Мир, 1982, 428 с.
- [6] Казаков Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В. — ТМФ, 1979, 38, № 1, 15–25.
- [7] Липатов Л. Н. — ЖЭТФ, 1976, 71, вып. 6, 2010–2024.
- [8] Попов В. С., Елецкий В. Л., Турбинер А. В. — ЖЭТФ, 1978, 74, вып. 2, 445–465.
- [9] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956, 632 с.

- [10] Коллинз П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий. М.: Атомиздат, 1980, 432 с.
- [11] Диттес Ф. М., Кубышин Ю. А., Тарасов О. В.— ТМФ, 1978, 37, № 1, 66–73.
- [12] Baker G. A., Jr. Essentials of Pade approximants. New York, Academic Press, 1975, 306 p.
- [13] Лопес Г.— Матем. сборник, 1978, 107, № 1, 69–83.
- [14] Владимиров А. А., Казаков Д. И., Тарасов О. В.— ЖЭТФ, 1979, 77, вып. 3, 1035–1045.
- [15] Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.— Phys. Rev. Lett., 1977, 39, № 2, 95–98.
- [16] Кубышин Ю. А.— ТМФ, 1983, 57, № 3, 363–372.

Объединенный институт  
ядерных исследований

Поступила в редакцию  
3.I.1983 г.

## SOMMERFELD — WATSON SUMMATION OF PERTURBATION THEORY SERIES

Kubyshin Yu. A.

Conditions for the Sommerfeld – Watson summation of perturbation theory series are formulated. The procedure for an approximate restoration of the series sum is developed. The results for some physical problems are presented.