

## МЕХАНИКА

УДК 532.135; 542.61

С. С. Квашнина, В. Н. Пилипенко

### ДВИЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ ПРИ РАСТВОРЕНИИ НАБУХАЮЩИХ ПОКРЫТИЙ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Изучение процесса растворения набухающих покрытий, содержащих поверхностно-активные вещества или полимеры, представляет интерес для различных областей химической технологии [1], полиграфической промышленности [2] и гидромеханики [3]. В гидромеханике, в частности, растворяющиеся полимерные покрытия используются для введения в турбулентный поток жидкости макромолекул, уменьшающих сопротивление трения [4]. В настоящей работе на основе уравнений, описывающих процесс растворения набухающих покрытий [2], рассмотрена задача о движении плоского фронта раздела фаз: твердое покрытие — жидкость для слоя конечной толщины. Приведены также полученные экспериментально сведения о коэффициенте диффузии воды в покрытиях, содержащих полиакриламид и воду.

1. Уравнение, описывающее диффузию растворителя в твердой фазе, занимающей область  $x_0(t) < x < h_0$  ( $h_0$  — начальная толщина покрытия), имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( Dc \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где  $c$  — объемная концентрация вещества покрытия,  $D(c)$  — коэффициент диффузии растворителя в твердой фазе. Уравнение (1) — квазилинейное уравнение параболического типа. Его решение будем искать при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} x_0(0) = 0 < x < h_0, \quad c(x, 0) = 1, \quad t = 0; \\ x = x_0(t), \quad c = c^*, \quad t > 0; \\ x = h_0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим процесс растворения при обтекании покрытия установившимся потоком жидкости. При этом происходит унос вещества покрытия в жидкость с постоянной интенсивностью  $q^*$  ( $q^* \leq 0$ ). Формулы для расчета величины потока массы  $q^*$  при ламинарном и турбулентном режимах течения приведены в [4, 5]. Положение границы раздела фаз  $x_0(t)$  определяется соотношением

$$\frac{dx_0}{dt} = -D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} - q^*. \quad (3)$$

Толщина покрытия  $h(t)$  при растворении дается формулой

$$h(t) = h_0 - x_0(t).$$

Решение уравнения (1) при условиях (2) и (3) представляет собой проблему типа Стефана [6]. Отметим, что в [2] задача решалась в другой постановке, а именно рассматривался случай, когда покры-

тие растворялось в неподвижной жидкости. При этом величина  $q^*$  не постоянна и определяется интенсивностью процесса диффузии вещества твердой фазы в растворителе.

2. В том случае, когда толщина покрытия достаточно велика, с течением времени происходит стабилизация процесса «набухание — растворение» и фронт раздела фаз начинает двигаться с постоянной скоростью  $V$ . Рассмотрим стационарное решение уравнения (1), предположив, что  $h_0 = \infty$ . Пусть  $c = c(\xi)$ , где  $\xi = x - Vt$ . Тогда (1) — (3) примут вид

$$\begin{aligned} -V \frac{dc}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left( Dc \frac{dc}{d\xi} \right), \\ V &= -D \frac{dc}{d\xi} \Big|_{\xi=0} - q^*, \\ c &= c^* (\xi = 0), \quad c \rightarrow 1 (\xi \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (4)$$

Проинтегрируем (4) с учетом граничных условий

$$\frac{dc}{d\xi} = - \frac{Vc + c^*q^*}{Dc}. \quad (5)$$

Используя условие  $dc/d\xi \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , получаем

$$V = -c^*q^*. \quad (6)$$

Профиль концентрации определим из (5). Предположим, что  $D = \text{const}$ , тогда с учетом (6) будем иметь

$$c - c^* + \ln \frac{1-c}{1-c^*} = - \frac{q^*c^*}{D} \xi. \quad (7)$$

3. Решение нестационарной задачи разбивается на два этапа. Сначала находится асимптотическое поведение решения в начальный период времени. Следуя [7], перейдем к переменным  $z = x/\sqrt{t}$ ,  $\theta = \sqrt{t}$  и положим  $x_0(t) = \theta y(\theta)$ . Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( Dc \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} z \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{2} \theta \frac{\partial c}{\partial \theta}, \quad (8)$$

где  $y(\theta) < z < \infty$ .

Положим  $\theta = 0$  и  $c = c_0$ , тогда из (8) получим

$$\frac{d}{dz} \left( Dc_0 \frac{dc_0}{dz} \right) + \frac{1}{2} z \frac{dc_0}{dz} = 0, \quad (9)$$

где  $y_0 < z < \infty$ , причем  $c_0 = c^*$  при  $z = y_0$ ,  $c_0 \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow \infty$  ( $y_0 \equiv y(0)$ ). Граничное условие (3) при  $\theta = 0$  имеет вид

$$y_0 = -2D \frac{dc_0}{dz} \Big|_{z=y_0}. \quad (10)$$

Таким образом, задача сводится к численному интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Решение для  $c_0$  и  $y_0$  находилось методом «пристрелки». Оно справедливо для  $0 < t < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  достаточно мало. При этом  $x_0(t) \approx y_0 \sqrt{t}$ ,  $c \approx c_0(x/\sqrt{t})$  для  $x_0(t) < x < \infty$ . При  $t > \varepsilon$  уравнение диффузии растворителя в твердой фазе (1) с учетом (2) и (3) интегрировалось численно с использованием метода выпрямления фронта [8] на ЭВМ БЭСМ-6. На прямоугольной сетке узлов задача аппроксимировалась нелинейной системой разностных урав-

нений, для решения которой использовалась разностно-итерационная схема, предложенная в [9].

4. Исследуем растворение покрытий, содержащих полиакриламид с молекулярным весом  $3 \cdot 10^6$  и воду. Для определения зависимости концентрации полимера  $c_p$  от напряжения трения  $\tau$  на границе разде-

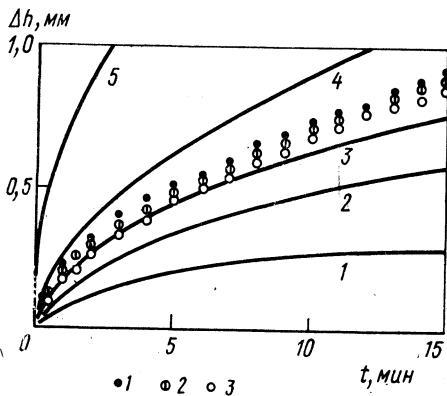


Рис. 1

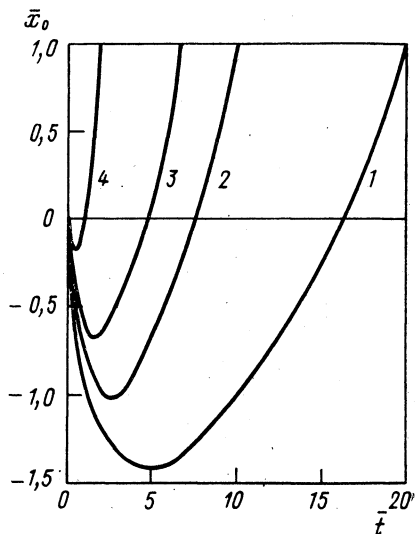


Рис. 2

ла фаз были проведены опыты при турбулентном течении воды в плоском канале, на одну из стенок которого нанесено однородное покрытие с весовым содержанием полимера  $E$  от 2 до 50%. При проведении опыта величина  $\tau$  постепенно увеличивалась от 0,25 до 10 г/см<sup>2</sup>. За величину  $c_p$  принималась концентрация полимера, при которой происходило разрушение покрытия. На основе этих опытов получена аппроксимационная зависимость  $c_p = 0,02 + 0,08 [1 - \exp(-A\tau)]$ , где  $A = 0,24$  см<sup>2</sup>/г. Величина  $c^*$  связана с  $c_p$  формулой  $c^* = c_p/E$ .

При  $E \leq 0,7$ , как показывают опыты [2],  $D$  не зависит от концентрации полимера. Для определения  $D$  в системе полиакриламид — вода проведены эксперименты по растворению полимерных покрытий в неподвижной воде ( $E = 0,4$ ). На рис. 1 показаны результаты измерений  $\Delta h$ , характеризующей увеличение толщины покрытия из-за набухания в процессе растворения (точки 1—3).

В связи с тем, что коэффициент диффузии макромолекул в жидкости мал ( $D_0 \approx 10^{-8}$  см<sup>2</sup>/с [2]), при набухании покрытия в неподвижной воде величина  $q^*$  также весьма мала. На рис. 1 приведены результаты расчетов  $\Delta h$  на основе (1)—(3) при  $q^* = 0$  для значений  $D$ , рав-

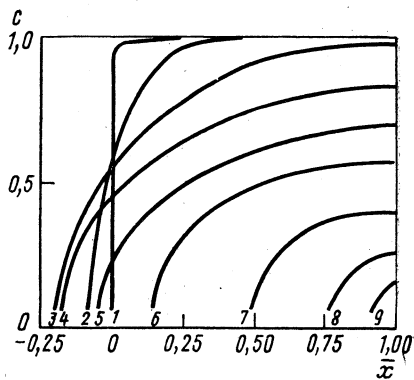


Рис. 3

ных  $10^{-6}$ ,  $3 \cdot 10^{-6}$ ,  $5 \cdot 10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  и  $10^{-4}$  (кривые 1—5), и  $c^* = 0,05$ . Сопоставление данных опытов с результатами расчетов показывает, что  $D \approx 5 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с.

На рис. 2 представлено положение границы раздела фаз  $\bar{x}_0 = x_0/h_0$  в зависимости от времени  $\bar{t} = tD/h_0^2$  при значениях  $\bar{q} = q^*h_0/D$ , равных  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$  и  $-10$  (кривые 1—4), и  $c^* = 0,05$ . После начала растворения толщина покрытия сначала увеличивается, а затем постепенно уменьшается. Степень набухания покрытия может быть значительна, особенно при малых величинах массоотдачи  $q^*$ .

На рис. 3 представлены профили концентрации  $c(\bar{x})$  при  $\bar{t} = 10^{-5}$ ;  $10^{-2}$ ;  $10^{-1}$ ;  $4 \cdot 10^{-1}$ ;  $7 \cdot 10^{-2}$ ;  $1,0$ ;  $1,4$ ;  $1,6$  и  $1,7$  (расчеты выполнены при  $c^* = 0,05$  и  $\bar{q} = -10$ ).

Приведенные данные позволяют рассчитать толщину покрытия в процессе растворения полимера и оценить изменение гидравлического радиуса при нанесении покрытий на стенки трубы или канала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фролов Ю. Г. Курс коллоидной химии. Поверхностные явления и дисперсные системы. М., 1982.
2. Yih-O Tu, Ouano A. C. Model for the kinematics of polymer dissolution//IBM J. Res. and Develop. 1977. 21, N 2. 131—142.
3. Thew M. T., Lee Y. T., Long R. F., Bragg R. Experiments with soluble polymeric drag reducing coatings//Drag Reduct. Pap. 2nd Int. Conf. Cambridge, 1977 s. a. G2/23—G2/40.
4. Пилипенко В. Н. Влияние добавок на пристенные турбулентные течения//Итоги науки и техники: Механ. жидкости и газа. М., 1980. 15. 156—257.
5. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, 1970.
6. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига, 1967.
7. Yih-O Tu. A multi-phase Stefan problem describing the swelling and the dissolution of glassy polymer//Quart. Appl. Math. 1977. 35, N 2. 14—20.
8. Будаков Б. М., Успенский А. Б. Разностный метод с выпрямлением фронтов для решения задач типа Стефана//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. 9, № 6. 1299—1315.
9. Будаков Б. М., Успенский А. Б. Разностно-итерационные схемы решений одномерных краевых задач и задач с неизвестной границей для квазилинейного параболического уравнения//Решения задач Стефана. М., 1971. 3—64.

Поступила в редакцию  
20.04.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. I, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 2

УДК 532.516

А. Е. Орданович, Н. Е. Поскрякова

#### РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ВОЛНИСТЫМИ СТЕНКАМИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Изучение влияния неровностей границ потоков и движения этих неровностей на течение жидкости представляет значительный интерес для широкого круга практически важных задач, из которых отметим проблемы генерации волн на воде, вопросы взаимодействия потоков жидкости с биологическими объектами, разнообразные технические приложения.

Литература, посвященная этому кругу вопросов, весьма обширна. Укажем на самые ранние теоретические исследования в этой области [1, 2, 3], на статьи [4, 5, 6], близкие по постановке к данной, и на работы [7, 8], содержащие обширную библиографию.