Б. И. Филиппов, Апостериорный анализ надёжности радиоэлектронных систем, *Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ.*, 2015, номер 4, 81–91

# СИСТЕМЫ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И СЕТЕВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.3.019

*Б. И. Филиппов*

## АПОСТЕРИОРНЫЙ АНАЛИЗ НАДЁЖНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

Апостериорный анализ надёжности выполняется после изготовления опытной партии аппаратуры с целью определения характеристик ее надёжности. Такие испытания необходимы потому, что на стадии проектирования устройства конструктор не располагает полными априорными сведениями, которые позволили бы заранее определить показатели надёжности с достаточно высокой достоверностью. Важным источником сбора информации о надёжности является система сбора данных о работе изделий в процессе их эксплуатации. Существуют два основных вида испытаний на надёжность. Один из них – определительные испытания, задачей которых является оценка показателей надёжности. Объект таких испытаний – крупносерийные изделия. Другой вид испытаний – контрольные испытания, в ходе которых осуществляется проверка соответствия показателя надёжности системы техническим условиям. Исследуется первый вид испытаний. Показан порядок проведения статистических испытаний радиоэлектронных систем по различным процедурам. Определены оценки среднего времени безотказной работы, достоверности среднего времени безотказной работы, длительности испытаний. Показано, что при оценке среднего времени безотказной работы метод максимального правдоподобия эффективнее испытаний по процедуре [$n$, $Б$, $r$].

**Ключевые слова**: радиоэлектронная система, анализ надежности, показатели надежности, время безотказной работы, длительность испытаний.

**Введение**

Развитие радиоэлектронной промышленности приводит к быстрому росту функциональности выпускаемых изделий и усложнению структуры радиоэлектронных систем (РЭС) при одновременном повышении требований к их надёжности. Используемые модели имеют ряд недостатков, главным из которых является то, что они позволяют получить точную оценку показателей безотказной работы только в отдельных (частных) случаях [1–4]. Такая оценка пригодна для подтверждения требований технического задания, но не даёт возможности провести анализ надёжности РЭС после изготовления опытной партии аппаратуры.

Именно поэтому определение характеристик надёжности изготовленных образцов РЭС является актуальной задачей.

**Постановка задачи и решения**

**1. Задачи апостериорного анализа**

Апостериорный анализ надёжности выполняется после изготовления опытной партии аппаратуры с целью определения характеристик ее надёжности. Для этого проводятся статистические испытания РЭС по одной из нижеперечисленных процедур [5]:

а) процедура [$n$, $Б$, $r$] предполагает, что в испытаниях участвует $n$ РЭС до $r$ отказов без замены отказавших систем;

б) процедура [$n$, $В$, $r$] предполагает, что в испытаниях участвует $n$ РЭС до $r$ отказов с заменой отказавших систем (восстановление);

в) процедура [$n$, $Б$, $T$] предполагает, что в испытаниях участвует $n$ РЭС в течение заданного времени (длительность испытаний) без замены отказавших систем;

г) процедура [$n$, $В$, $T$] предполагает, что в испытаниях участвует $n$ РЭС в течение заданного времени $T$ с заменой отказавших систем (восстановление);

д) смешанные процедуры: [$n$, $Б$, $r/T$] или [$n$, $В$, $r/T$] предполагают, что задана длительность испытаний и число отказов. Испытания прекращаются, когда либо $r$, либо $T$ достигают заданного значения; при этом, если длительность испытаний до последнего отказа $t_r \le T$, то обработка результатов выполняется по процедурам [$n$, $Б$, $r$] или [$n$, $В$, $r$], если $t_r > T$, то обработка результатов выполняется по процедурам [$n$, $Б$, $T$] или [$n$, $В$, $T$];

е) процедура [$n$, $Б$, $r$] – испытания проводятся до отказа всех $n$ РЭС, участвующих в испытаниях; эта процедура используется редко, в основном в тех случаях, когда необходимо определить статистические характеристики последовательности отказов отдельных элементов РЭС.

Каждая из процедур имеет определённые достоинства и недостатки, некоторые из них будут показаны в последующих разделах.

Обработка результатов испытаний имеет целью решение одной из двух задач:

1-я задача. Определение характеристик надёжности изготовленных образцов РЭС.

2-я задача. Определение степени соответствия характеристик надёжности изготовленных образцов РЭС техническим условиям (решение этой задачи выходит за рамки нашего исследования).

**2. Определение характеристик надёжности по результатам испытаний (1-я задача)**

**2.1. Оценка среднего времени безотказной работы (процедуры [*n*, *Б*, *r*]).**

1. В результате испытаний по процедуре [$n$, $Б$, $r$] без замены отказавших систем получена выборка моментов времени отказов системы $(t_1, \ldots, t_r)$, по которой определена выборка интервалов времени между отказами $(y_1, \ldots, y_r)$ (рис. 1).

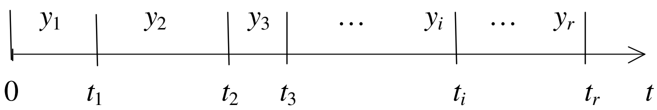


Рис. 1. Моменты отказов и интервалы между отказами

2. Сделана оценка полученной выборки на соответствие теоретической модели потока отказов (например, путём проверки соответствия функции распределения интервалов между отказами показательному закону распределения по критерию Колмогорова или критерию $\chi^2$).

**Решение задачи**

1. Так как моменты времени $t_1$, $t_2$, $t_3$, …, $t_i$ образуют последовательность зависимых случайных величин, в дальнейшем будем рассматривать интервалы времени между отказами $y_1$, $y_2$, …, $y_i$, которые являются взаимно независимыми случайными величинами с показательной функцией плотности вероятностей (ФПВ):

$$w\,(y_i) = \lambda\,(n - i + 1)\exp\{-\lambda\,(n - i + 1)\,y_i\}, \tag{1}$$

где $\lambda = \frac{1}{t^*}$ – интенсивность отказов одной системы; $t^*$ – среднее время безотказной работы одной системы; $(n - i + 1)$ – число систем, участвующих в испытаниях с учётом отказавших.

Совместная плотность вероятностей $r$ интервалов $y_i$ с учётом их независимости равна

$$w_r\,(y_i) = w_r(y_1, y_2, \ldots, y_r) = \prod_{i=1}^{r} w(y_i).$$

2. Для определения оценки среднего времени безотказной работы $\hat{t}^{\bullet}$ используем метод максимального правдоподобия (МП).

Обозначим функцию правдоподобия как

$$L_y(t^*) = \prod_{i=1}^{r} w(y_i). \tag{2}$$

В условиях решаемой задачи функция правдоподобия представляет собой ФПВ интервалов $y$ при данном значении параметра $t^*$.

Сущность метода МП заключается в том, что в процессе обработки статистических данных вычисляется функция правдоподобия, а значение оценки искомого параметра ($\hat{t}^{\bullet}$– оценка параметра $t^*$) равно значению аргумента, при котором функция правдоподобия максимальна (рис. 2).

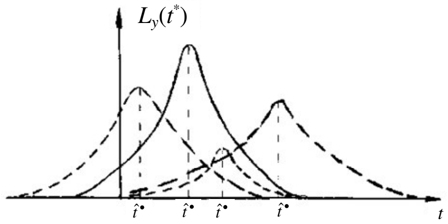


Рис. 2. Возможный вид функций правдоподобия

Тогда оценка среднего времени безотказной работы будет равна

$$\hat{t}^{\bullet} = \hat{t}^{\bullet}_{\text{МП}} = \arg\max L_y(t^*); \quad t^* \in (0; t).$$

3. Найдем $\hat{t}^{\bullet}_{\text{МП}}$.

Для поиска экстремума функции правдоподобия необходимо решить уравнение $\dfrac{\partial L_y(t^*)}{\partial t^*} = 0$. Так как любая монотонная функция от функции правдоподобия также является функцией правдоподобия, то для упрощения решения перейдём к уравнению

$$\frac{\partial \ln L_y(t^*)}{\partial t^*} = 0.$$

С учётом (1) и (2) получим:

$$L_y(t^{\bullet}) = \prod_{i=1}^{r} w(y_i) = \prod_{i=1}^{r} \lambda(n-i+1)e^{-\lambda(n-i+1)}y_i = e^{-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{t^*}(n-i+1)y_i} \prod_{i=1}^{r} \tfrac{1}{t^{\bullet}}(n-i+1),$$

$$\ln L_y(t^{\bullet}) = \sum_{i=1}^{r}\left[\ln(n-i+1) - \ln t^{\bullet} - \frac{(n-i+1)}{t^*}y_i\right].$$

Заменим $\lambda = 1/t^*$ и продифференцируем:

$$\frac{\partial \ln L_y(t^*)}{\partial t^*} = \sum_{i=1}^{r}\left[-\frac{1}{t^*} + \frac{n-i+1}{t^*}y_i\right] = 0. \qquad (3)$$

Решая (3), получим оценку среднего времени безотказной работы.

$$\hat{t}^{\bullet} = \hat{t}^{\bullet}_{\text{МП}} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)y_i. \qquad (4)$$

4. Преобразуем выражение (4) к моментам времени $t_1, t_2, \ldots, t_r$.

$y_i = t_i - t_{i-1}$;

$$\hat{t}^{\bullet} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)t_i - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)t_{i-1} = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i + (n-r)t_r\right].$$

Тогда

$$\hat{t}^{\bullet} = \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i + (n-r)t_r\right], \qquad (5)$$

где $(n-r)t_r$ – суммарное время работы не отказавших систем; $\sum_{i=1}^{r} t_i$ – суммарное время безотказной работы всех отказавших систем; $\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r$ – суммарное время работы всех систем до $r$-го отказа.

**2.2. Достоверность оценки среднего времени безотказной работы**

Оценка $\hat{t}^{\bullet}$, полученная по экспериментальным данным, является случайной величиной, точность приближения которой к истинному значению параметра $t^*$ зависит как от объёма испытаний, так и от методики испытаний и обработки результатов. В связи с этим требуется проверка полученной оценки на достоверность.

Проверка осуществляется по четырем позициям:

1. Состоятельность оценки.
2. Несмещённость оценки.
3. Эффективность оценки.
4. Достаточность оценки.

Проверка на ***состоятельность*** требует выполнения неравенства

$$\lim_{r\to\infty} P\left\{ \left|\hat{t}^{\bullet} - t^{\bullet}\right| > \varepsilon \right\} = 0 \text{ или } \lim_{r\to\infty} P\left\{ \left|\hat{t}^{\bullet} - t^{\bullet}\right| \le \varepsilon \right\} = 1,$$

где ε – сколь угодно малая величина.

Вероятность того, что отклонение оценки от истинного значения равно нулю при увеличении числа отказов. В нашем случае оценка состоятельна в силу закона больших чисел.

Для ***несмещённости*** оценки необходимо, чтобы математическое ожидание оценки было равно истинному значению параметра, т. е.

$$m\left\{ \hat{t}^{\bullet} \right\} = t^{\bullet}$$

для любого значения $r$.

Для полученной оценки

$$m\left\{ \hat{t}^{\bullet} \right\} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)\, m\left\{y_i\right\} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)\frac{t^{\bullet}}{(n-i+1)} = t^{\bullet}\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{1} 1 = t^{\bullet}$$

Следовательно, оценка $\hat{t}^{\bullet}$ является несмещенной.

Для проверки ***эффективности*** оценки необходимо убедиться, что удовлетворяется неравенство Рао – Крамера:

$$\sigma^2(\hat{t}^{\bullet}) \ge \frac{1}{J_y(t^{\bullet})}, \tag{6}$$

где $\sigma^2(\hat{t}^{\bullet})$ – дисперсия оценки; $J_y(t^*)$ – информация по Фишеру, которая содержится в статистике $y$ о параметре $t^*$.

$$J_y(\hat{t}^{\bullet}) = \sigma^2\left\{ \frac{\partial}{\partial t^{\bullet}} \ln L_y(t^{\bullet}) \right\}.$$

В рассматриваемом случае $L_y(t^*)$ – функция правдоподобия (2).

Оценка будет эффективной, если неравенство Рао – Крамера (6) становится равенством:

$$\sigma^2(\hat{t}^{\bullet}) = \frac{1}{J_y(t^*)}.$$

Найдем дисперсию полученной оценки:

$$\sigma^2(\hat{t}^\bullet) = M\left\{\left(\hat{t}^\bullet - t^\bullet\right)^2\right\} = M\left\{(\hat{t}^\bullet)^2\right\} - M\left\{\left(t^\bullet\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)^2\sigma^2(y_i) = \frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)^2\frac{(t^*)^2}{(n-i+1)^2} = \frac{(t^*)^2}{r},$$

где $\hat{t}^\bullet = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)y_i$ известно из (5), дисперсия интервалов $y_i$ равна $\sigma^2(y_i) = \frac{(t^*)^2}{(n-i+1)^2}$, т. к. $y_i$ – интервалы между отказами – имеют показательный закон распределения (1) который определяется одним параметром: $\lambda(n - i + 1)$.

Найдем информацию по Фишеру – $J_y(t^*)$.

Из (3) известно, что $\frac{\partial \ln L_y(t^*)}{\partial t^*} = -\frac{r}{t^*} + \frac{1}{(t^*)^2}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)y_i$ .

Тогда

$$J_r(t^*) = \sigma^2\left\{\frac{1}{(t^*)^2}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)y_i\right\} = \frac{1}{(t^*)^4}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)^2\sigma^2(y_i) = \frac{1}{(t^*)^4}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)^2\frac{(t^*)^2}{(n-i+1)^2} = \frac{r}{(t^*)^2}.$$

Следовательно, $\sigma^2\left(\hat{t}^\bullet\right) = \frac{1}{J_y(t^*)}$ и полученная оценка эффективна.

Для ***достаточности*** оценки необходимо выполнение равенства

$$J_y(t^*) = J_y(\hat{t}^\bullet), \tag{7}$$

где $J_y(\hat{t}^\bullet)$ – информация по Фишеру, которая содержится в статистике $y$ о параметре $\hat{t}^\bullet$. В то же время известно, что любая эффективная оценка достаточна.

Таким образом, полученная нами оценка $\hat{t}^\bullet$ является состоятельной, несмещенной, достаточной и эффективной.

Вместо оценки $\hat{t}^\bullet$ можно было искать оценку интенсивности отказов $\hat{\lambda}$, такую как $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{t}^*} = \frac{r}{t_\Sigma}$. Однако $\hat{\lambda}$ является смещённой и неэффективной оценкой. Математическое ожидание оценки не совпадает с измеряемым параметром, т. к. $m\{\hat{\lambda}\} = \frac{r}{r-1}\lambda$ .

Несмещённая оценка получится, если взять $\hat{\lambda} = \frac{r-1}{t_\Sigma}$, но дисперсия несмещённой оценки оказывается равной

$$M_r = \frac{\lambda^2}{r-2},$$

и оценка $\hat{\lambda}$ остаётся неэффективной.

### 2.3. Доверительный интервал среднего времени безотказной работы

Полученная в разделе 2.2 оценка среднего времени безотказной работы $\hat{t}^\bullet$ является точечной оценкой искомого параметра $t^\bullet$. Эта оценка является случайной величиной, которая в конкретном испытании может принять любое положительное значение – от 0 до $\propto$, поэтому в дополнение к точечной оценке обычно определяется интервальная оценка измеряемого параметра. Имеется в виду, что по одной оценке $\hat{t}^\bullet$ определяется доверительный интервал $(\hat{t}^\bullet_{\text{Н}},\ \hat{t}^\bullet_{\text{В}})$, в котором находится истинное значение измеряемого параметра $t^*$ с заданной доверительной вероятностью

$$P\left\{\ \hat{t}^\bullet_{\text{Н}} < t^* < \hat{t}^\bullet_{\text{В}}\ \right\} = \gamma\,,$$

где $\gamma$ – доверительная вероятность (или коэффициент доверия); $\hat{t}_{\text{Н}}^{\bullet}$ и $\hat{t}_{\text{В}}^{\bullet}$ – соответственно нижняя и верхняя границы доверительного интервала (рис. 3).

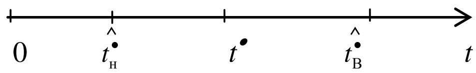


Рис. 3. Доверительный интервал

Для определения доверительного интервала надо знать функцию распределения вероятностей оценок $\hat{t}^*$. Для этого преобразуем выражение (7) для того, чтобы в нём использовались нормированные величины:

$$\hat{t}_{\text{Н}}^{\bullet} = \hat{t}^{\bullet}(1-\varepsilon_1),$$
$$\hat{t}_{\text{В}}^{\bullet} = \hat{t}^{\bullet}(1+\varepsilon_2),$$

при этом $\hat{t}_{\text{В}}{}^* - \hat{t}_{\text{Н}}{}^* = \hat{t}^*(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ – длина интервала.

Тогда (7) перепишется в виде

$$\underline{P}\left\{ \hat{t}^*(1-\varepsilon_1) < t^* < \hat{t}^*(1+\varepsilon_2) \right\} = \gamma. \tag{8}$$

С учётом того, что $t^* > \hat{t}^*(1-\varepsilon_1)$,

$$t^* < \hat{t}^*(1+\varepsilon_2) \text{ или } \hat{t}^* < \frac{t^*}{1-\varepsilon_1}, \quad \hat{t}^* > \frac{t^*}{1+\varepsilon_2}$$

выражение (8) примет вид

$$\underline{P}\left\{ \frac{t^*}{1+\varepsilon_2} < \hat{t}^* < \frac{t^*}{1-\varepsilon_1} \right\} = \gamma, \qquad \text{или } \underline{P}\left\{ \frac{1}{1+\varepsilon_2} < \frac{\hat{t}^*}{t^*} < \frac{1}{1-\varepsilon_1} \right\} = \gamma. \tag{9}$$

Таким образом, необходимо найти ФПВ величины $\frac{\hat{t}^*}{t^*}$, т. е. $w(\frac{\hat{t}^*}{t^*})$. Из (5) можно определить, что суммарное время наработки на отказ равно

$$t_\Sigma = \hat{t}^* \cdot r = \sum_{i=1}^{r} (n-i+1) y_i. \tag{10}$$

Функция плотности вероятностей интервалов $y_i$ известна (1):

$$w(y_i) = \frac{t^*}{(n-i+1)} e^{-\frac{n-i+1}{t*} y_i}, \; y_i > 0.$$

В этом законе необходимо заменить переменную, чтобы получить стандартное распределение вероятностей с дисперсией равной 1.

Обозначим:

$$z_i = \frac{n-i+1}{t^*} 2y_i; \quad \frac{dy_i}{dz_i} = \frac{t^*}{2(n-i+1)}. \tag{11}$$

Тогда $w(z_i) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z_i}{2}}$ – экспоненциальное распределение с единичной дисперсией. Известно, что в этом случае $\sqrt{z_i}$ имеет распределение Гаусса, а $\sum_{i=1}^{r} z_i$ имеет распределение $\chi^2(2r)$ с $2r$

степенями свободы, которое широко используется в статистике для обработки экспериментальных данных.

С учётом (10) и (11)

$$\sum_{i=1}^{r} z_i = \frac{2t_\Sigma}{t^\bullet}.$$

Введём переменную

$$\tau = \sum_{i=1}^{r} z_i = \frac{2t_\Sigma}{t^*} = \frac{2r\hat{t}^*}{t^*},$$

$\tau$ имеет распределение $\chi^2(2r)$ с $2r$ степенями свободы; $r$ – число отказов.

Распределения $\chi^2(2r)$ табулированы. Для большого числа степеней свободы это распределение стремится к нормальному.

Пусть $\frac{1}{1+\varepsilon_2} = \alpha_2$ и $\frac{1}{1-\varepsilon_1} = \alpha_1$, тогда выражение (9) для доверительного интервала преобразуется к виду

$$P\left\{ 2r\alpha_2 < \tau < 2r\alpha_1 \right\} = \gamma. \qquad (12)$$

На рис. 4 показана ФПВ $\chi^2$, заштрихованная площадь под кривой представляет собой доверительную вероятность $\gamma$ (вся площадь под кривой ФПВ, как известно, равна единице). Как видно из рис. 4, доверительный интервал можно расположить на оси $\tau$ по-разному, т. е. решение задачи неоднозначно.

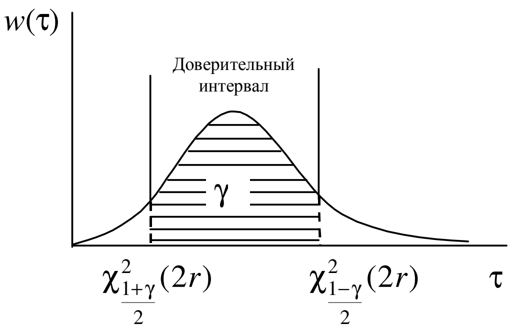


Рис. 4. Функция плотности вероятностей $\chi^2$

Обычно поступают так, чтобы границы интервала отсекали справа и слева одинаковые площади под кривой, равные $\frac{1-\gamma}{2}$.

Тогда нижняя граница доверительного интервала

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2r) \xrightarrow{\text{это}} \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\ \%\text{-я точка распределения } \chi^2(2r),$$

а верхняя граница доверительного интервала

$$\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2r) \xrightarrow{\text{это}} \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\ \%\text{-я точка распределения } \chi^2(2r),$$

значения которых определяются по таблицам квантилей $\chi^2(2r)$ распределения.

Затем, на основании (12),

$$P\left\{ \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2r) < \tau < \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2r) \right\} = \gamma, \text{ или } P\left\{ \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2r) < \frac{2r\hat{t}^\bullet}{t^\bullet} < \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2r) \right\} = \gamma,$$

или $$P\left\{\frac{2r\hat{t}^{\bullet}}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2r)} < t^{\bullet} < \frac{2r\hat{t}^{\bullet}}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2r)}\right\} = \gamma. \quad (13)$$

Из (13) очевидно, что нижняя граница доверительного интервала равна

$$t^* > \frac{2r\hat{t}^{\bullet}}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2r)} = \hat{t}^{\bullet}_{\text{Н}}, \quad (14)$$

а верхняя граница, соответственно, равна

$$t^* < \frac{2r\hat{t}^{\bullet}}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2r)} = \hat{t}^{\bullet}_{\text{В}}. \quad (15)$$

Таким образом, процедура определения верхней и нижней границ доверительного интервала сводится к следующему:

1. Перед испытанием задаётся $r$ – число отказов и $\gamma$ – доверительная вероятность.
2. В процессе испытаний определяется $t_{\Sigma}$ (суммарное время наработки на отказ $t_{\Sigma} = r\hat{t}^*$).
3. По формулам (14), (15) вычисляются $\hat{t}_{\text{В}}^*$ и $\hat{t}_{\text{Н}}^*$.

**2.4. Длительность испытаний**

Длительность испытаний $T = t_r$, т. е. совпадает с моментом $r$-го отказа, когда испытания прекращаются. Для процедуры испытаний ($n$, *Б*, $r$) это случайная величина. В то же время знание сроков проведения испытаний является важным как для исполнителей, так и для руководителей испытаний.

Функцию плотности вероятностей $w$ ($T$) найти трудно, т. к. $T = t_r = \sum_{i=1}^{r} y_i$, а величины $y_i$ разнородны (распределение $y_i$ зависит от $i$ (1)), поэтому определим только среднее значение времени испытаний и его дисперсию.

Среднее время испытаний

$$m(T) = m(t_r) = \sum_{i=1}^{r} m\{y_i\} = \hat{t}^{\bullet} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n-i+1}, \quad (16)$$

т. е. больше, чем оценка среднего времени безотказной работы $\hat{t}^{\bullet}$.

Запишем (16) в виде ряда

$$m(t_r) = \hat{t}^{\bullet} \sum_{k=n-r+1}^{n} \frac{1}{k},$$

где $k = n - i + 1$.

Тогда при $i = 1$ $k = n$, а при $i = r$ $k = n - r + 1$.

Обозначим $\varphi(m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$, тогда $m(t_r) = \hat{t}^{\bullet}[\varphi(m) - \varphi(n-r)]$.

Известно, что при $m >> 1$ функция $\varphi(m) \approx \ln m$.

Значит, если $r >> 1$, то среднее время испытаний

$$m(T) = m(t_r) \approx \hat{t}^{\bullet} \ln\left(\frac{n}{n-r}\right).$$

Если $n = r$, то $m(T) = m(t_r) = \hat{t}^{\bullet}\ \varphi(n) = \hat{t}^{\bullet} \ln n$.

Дисперсия времени испытаний равна

$$M_2(t_r)=\sum_{i=1}^{r}M_2(y_i)=(\hat{t}^{\bullet})^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(n-i+1)^2}.$$

Обозначим:

$$\varphi(m)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}\,;\ \varphi(\infty)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Тогда

$$M_2(t_r)=(\hat{t}^{\bullet})^2[\varphi(n)-\varphi(n-r)]\,.$$

Если

$$n=r\,,\ \text{то}\ M_2(t_r)=(\hat{t}^{\bullet})^2\ \varphi(n)\to(\hat{t}^{\bullet})^2\ \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Это означает, что дисперсия времени испытаний уменьшается с увеличением $r$, но эта процедура не очень эффективна, т. к. дисперсия стремится не к нулю, а к некоторому постоянному числу (как будет видно в дальнейшем, более эффективной процедурой испытаний является процедура с заменой отказавших блоков).

**2.5. Оценка среднего времени безотказной работы (процедуры [*n*, *B*, *r*])**

Рассмотрим испытания системы на надёжность по процедуре $[n,\ B,\ r]$, когда отказавшие системы заменяются или восстанавливаются. В остальном задача аналогична рассмотренной в разделе 2.1.

В результате испытаний получена выборка моментов отказов и интервалов между отказами (рис. 5).

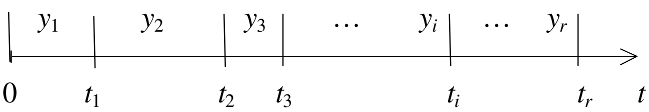


Рис. 5. Моменты отказов и интервалы между отказами

Модель отказов для одной системы

$$w(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t}\,,\ t>0\,,\ \lambda>0\,,$$

или

$$w(t)=\frac{1}{t^*}\,e^{-\frac{t}{t*}}\,,\ t>0\,,$$

где $t^*$ – среднее время наработки на отказ.

**Решение задачи**

1. Теперь выборка интервалов $y_i=t_i-t_{i-1}$ однородна и каждый интервал подчиняется закону

$$w(y_i)=n\cdot\lambda\cdot e^{-n\lambda y_i}\,,$$

где $n\cdot\lambda$ – общая интенсивность отказов систем, участвующих в испытаниях.

2. Для определения оценки среднего времени безотказной работы $\hat{t}^{\bullet}$ также используем метод МП.

В условиях решаемой задачи функция правдоподобия представляет собой закон распределения интервалов $y$ при данном значении параметра $t^*$:

$$L_y(t^*)=\prod_{k=1}^{r}w(y_k)=(\frac{n}{t^{\bullet}})^r\ e^{-\sum_{k=1}^{r}\frac{-n}{t*}y_k}\,.$$

3. Оценка $\hat{t}^*$ по максимуму правдоподобия определяется как параметр, соответствующий максимальному значению функции правдоподобия:

$$\frac{d\ln L_y(t^*)}{dt^*} = -\frac{r}{t^*} - \frac{n}{(t^*)^r}\sum_{k=1}^{r} y_k = 0 .$$

Тогда оценка

$$\hat{t}^* = \frac{n}{r}\sum_{k=1}^{r} y_k = \frac{n\cdot t_r}{r},$$

где $n\cdot t_r = t_\Sigma$ – суммарная наработка на отказ, общая для обоих планов испытаний. Отсюда следует, что $\hat{t}^* = \frac{t_\Sigma}{r}$, и, значит, качество оценки такое же, как и при процедуре [$n$, Б, $r$], при одинаковых $t_\Sigma$ и $r$.

4. Полученная оценка является несмещенной, т. к.

$$m\{\hat{t}^*\} = \frac{n}{r}\sum_{k=1}^{r} m_1\{y_k\} = t^* ,$$

и эффективной, т. к.

$$\sigma^2\{\hat{t}^*\} = \frac{n^2}{r^2}\sum_{1}^{r}\sigma^2\{y_i\} = \frac{(t^*)^2}{r} .$$

5. Средняя продолжительность испытаний равна

$$m_1\{t_r\} = \sum_{k=1}^{r} m_1\{y_k\} = \frac{r}{n}t^* .$$

Если $r = n$, то $m_1\{t_r\} = t^\bullet$, т. е. меньше, чем для процедуры [$n$, *Б*, $r$], когда она была равна ($t^\bullet \ln n$).

Дисперсия продолжительности испытаний равна

$$M_2\{t_r) = \sum_{1}^{r} M_2\{y_k\} = \frac{r}{n^2}(t^*)^2 .$$

Если $n = r$, то $M_2\{t_r\} = \frac{(t^*)^2}{n}$ и стягивается по $n$, чем больше участников испытаний, тем меньше $M_2\{t_r\}$. Следовательно, по сравнению с процедурой испытаний [$n$, *Б*, $r$] рассматриваемая процедура более эффективна.

**Выводы**

Рассмотрена процедура испытаний опытной партии РЭС и определены следующие характеристики надёжности:

– оценка среднего времени безотказной работы;

– достоверность оценки и доверительный интервал среднего времени безотказной работы.

Показано, что при определении оценки среднего времени безотказной работы метод МП эффективнее процедуры испытаний [$n$, *Б*, $r$].

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. *Жаднов В. В.* Проектная оценка надёжности радиотехнических систем / В. В. Жаднов, С. Н. Полесский // Надёжность и качество: тр. Междунар. симпоз.: в 2 т. Т. 1 / под ред. Н. К. Юркова. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2006. С. 24–29.

2. *Жаднов В. В.* Управление качеством при проектировании теплонагруженных радиоэлектронных средств / В. В. Жаднов, А. В. Сарафанов. М.: Солон-Пресс, 2004. 464 с.

3. *Артюхова М. А.* Метод учёта влияния системы менеджмента надёжности предприятия при расчётной оценке показателей надёжности электронных средств / М. А. Артюхова, В. В. Жаднов, С. Н. Полесский // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2013. № 2. С. 48–53.

4. *Надёжность* ЭРИ: Справочник. М.: МО, 2006. 641 с.
5. *Левин Б. Р.* Теория надёжности радиотехнических систем / Б. Р. Левин. М.: Сов. радио, 1978. 264 с.

Статья поступила в редакцию 8.09.2015

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

**Филиппов Борис Иванович** – Россия, 630073, Новосибирск; Новосибирский государственный технический университет; канд. техн. наук, доцент; доцент кафедры «Защита информации»; filippov-boris@rambler.ru.

*B. I. Filippov*

## A POSTERIORI ANALYSIS OF RELIABILITY OF RADIO-ELECTRONIC SYSTEMS

**Abstract.** The a posteriori analysis of reliability is made after production of a pilot batch of the equipment for the purpose of definition of its characteristics of reliability. Such tests are necessary because at a device design stage the designer has no full a priori data, which would allow to define the reliability indicators with rather high reliability in advance. An important source of data collection about reliability is the system of data collection about work of products in the course of their operation. There are two main types of fail-safe tests. One of them is a standard test, task of which is the assessment of indicators of reliability. The object of such tests is production-type devices. Other type of tests is control tests, which check the compliance to specifications of an indicator of reliability of the system. The first type of tests are investigated. The order of carrying out statistical tests of radio-electronic systems on various procedures is shown. The estimations of the average time of no-failure operation, reliability of average time of no-failure operation and duration of tests are made. It is shown that while assessing the average time of no-failure operation, the method of maximum likelihood is more effective than tests [*n*, *Б*, *r*].

**Key words:** radio-electronic system, analysis of reliability, characteristics of reliability, time of no-failure operation, duration of tests.

*REFERENCES*

1. Zhadnov V. V., Polesskii S. N. Proektnaia otsenka nadezhnosti radiotekhnicheskikh sistem [Design assessment of reliability of radio engineering system]. *Nadezhnost' i kachestvo. Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma.* V 2 t. T. 1. Pod redaktsiei N. K. Iurkova. Penza, Izd-vo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2006. P. 24–29.
2. Zhadnov V. V., Sarafanov A. V. *Upravlenie kachestvom pri proektirovanii teplonagruzhennykh radioelektronnykh sredstv* [Quality management at design heatloaded radio-electronic sredstv]. Moscow, Solon Press, 2004. 464 p.
3. Artiukhova M. A., Zhadnov V. V., Polesskii S. N. Metod ucheta vliianiia sistemy menedzhmenta nadezhnosti predpriiatiia pri raschetnoi otsenke pokazatelei nadezhnosti elektronnykh sredstv [Metod of taking note of system of management of reliability of the enterprise at a settlement assessment of indicators of reliability electronic sredstv]. *Radioelektronika, informatika, upravlinnia*, 2013, no. 2, pp. 48–53.
4. *Nadezhnost' ERI.* [Reliability of ERIE]. Spravochnik. Moscow, MO, 2006. 641 p.
5. Levin B. R. *Teoriia nadezhnosti radiotekhnicheskikh sistem* [Theory of reliability of the radio engineering systems]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1978. 264 p.

The article submitted to the editors 8.09.2015

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Filippov Boris Ivanovich** – Russia, 630073, Novosibirsk; Novosibirsk State Technical University; Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor; Assistant Professor of the Department "Information Protection"; filippov-boris@rambler.ru.