С. З. Джамалов, О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянным коэффициентом для многомерного уравнения смешанного типа второго порядка, *Математические заметки СВФУ*, 2017, том 24, выпуск 4, 17–27

DOI: 10.25587/SVFU.2018.4.11313

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2017. Том 24, № 4

УДК 517.956.6

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. З. Джамалов

Аннотация. Описана постановка нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка. Класс таких уравнений охватывает классические уравнения эллиптического типа, гиперболического типа и параболические уравнения. Доказана регулярная разрешимость поставленной нелокальной краевой задачи в пространствах С. Л. Соболева.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.4.11313

Ключевые слова: многомерное уравнение смешанного типа второго рода второго порядка, нелокальная краевая задача, обобщенное решение, регулярное решение, единственность решения, существование решения, метод ε-регуляризации, метод Галёркина, априорные оценки.

Введение и постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей $\partial\Omega$, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \partial\Omega \times (0, T)$ — его боковая граница.

В цилиндрической области Q рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{x_j}) + a(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и $a_{ij}(x)$, $a(x,t)$, $c(x,t)$ — заданные в цилиндре $\overline{Q}$ достаточно гладкие функции.

Теории краевых задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков посвящены работы многих авторов [1–6]. Отметим, что уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(x,t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений, т. е. функция $K(x,t)$ внутри области может менять знак [2].

Краевая задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия*

$$u(x,0)=\gamma\cdot u(x,T), \tag{2}$$

$$u|_S=0, \tag{3}$$

где γ — постоянное число, отличное от нуля, значение которого будет уточнено ниже.

Пусть выполнены неравенства

$$K(x,0)\le 0\le K(x,T), \quad x\in\overline{\Omega}. \tag{4}$$

Впервые нелокальные краевые задачи с постоянными коэффициентами для уравнений смешанного типа второго рода и второго порядка (1) рассматривались функциональными методами в работах [6, 7], когда $\gamma\neq 0$ — постоянное число. В случае $K(x,0)=K(x,T)=0$ в [8, 9] была доказана корректность решения краевой задачи (1)–(3). Кроме того, в работе [10] на плоскости для случая, когда выполнены неравенства (4), доказаны корректность и гладкость решения нелокальной краевой задачи (1)–(3) в пространствах С. Л. Соболева.

В настоящей работе в случае, когда выполнено (4), методами ε-регуляризации, Галёркина и априорных оценок доказывается регулярная разрешимость нелокальной краевой задачи (1)–(3) в пространствах С. Л. Соболева.

Пусть выполнено одно из следующих условий:
(a) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge a_0|\xi|^2$, где $a_0>0$ — константа, $x\in\overline{\Omega}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$;
(b) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le a_1|\xi|^2$, где $a_1<0$ — константа, $x\in\overline{\Omega}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Замечание 1. В дальнейшем для простоты изучим случай (a), случай (b) изучается аналогично.

1. Единственность решения задачи

Лемма. *Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (1), *кроме того, пусть*

$$2a(x,t)-K_t(x,t)+\lambda K(x,t)\ge\delta_1>0,$$

$$\lambda c(x,t)-c_t(x,t)\ge\delta_2>0 \text{ при } (x,t)\in\overline{Q},$$

$$c(x,0)\le c(x,T), \text{ где } \lambda=-\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0,$$

причем $|\gamma|<1$ при выполнении условия (a).

Тогда имеет место неравенство

$$\|u\|_1\le c_1\|f\|_0, \quad c_1>0. \tag{5}$$

Доказательство. Для любой функции $u \in W_2^2(Q)$ после интегрирования по частям нетрудно получить следующее тождество:

$$2\int\limits_Q Lu\exp(-\lambda t)u_t\,dxdt$$
$$=\int\limits_Q \exp(-\lambda t)\big[(2\alpha - K_t + \lambda K)u_t^2 + \lambda a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + (\lambda c - c_t)u^2\big]\,dxdt$$
$$+\int\limits_{\partial Q}\exp(-\lambda t)\big[Ku_t^2\nu_0 - 2a_{ij}u_{x_j}u_t\nu_i + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\nu_0 + cu^2\nu_0\big]\,ds, \quad (6)$$

где $\nu = (\nu_0 = \cos(\nu,t),\ \nu_i = \cos(\nu,x_i))$ — единичный вектор внешней нормали к ∂Q. Пусть $u \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (2), (3), тогда выражение $-\big[Ku_t^2 + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + cu^2\big]\nu_0\exp(-\lambda t)$ неотрицательно на основаниях области Q, а на боковой границе S равно нулю. Наконец, $a_{ij}u_{x_i}u_t\nu_i$ равны нулю на S, так как $\nu_i = 0$ на основаниях области Q и $u(x,t) = 0$ на S. Отбрасывая неотрицательные слагаемые, из тождества (6) получаем

$$2\int\limits_Q Lu\exp(-\lambda t)u_t\,dxdt$$
$$\geq \int\limits_Q \exp(-\lambda t)\big[(2a - K_t + \lambda K)u_t^2 + \lambda a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + (\lambda c - c_t)u^2\big]\,dxdt. \quad (7)$$

Условия леммы обеспечивают неотрицательность интеграла в (7) по области Q. Применяя неравенство Юнга к (7), получим искомую оценку (5). Лемма доказана.

Замечание 2. Из леммы следует, что при выполнении условий леммы регулярное решение задачи (1)–(3) единственно.

2. Уравнения составного типа

Для доказательства существования регулярного решения задачи (1)–(3) из $W_2^2(Q)$ используем метод ε-регуляризации в сочетании с методом Галёркина [2, 4, 8, 10].

Рассмотрим нелокальную краевую задачу для уравнения составного типа

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon + Lu_\varepsilon = f(x,t), \quad (8)$$

$$D_t^q u_\varepsilon\big|_{t=0} = \gamma D_t^q u_\varepsilon\big|_{t=T}, \quad q = 0,1,2, \quad (9)$$

$$u_\varepsilon|_S = 0, \quad (10)$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

— оператор Лапласа,

$$D_t^q = \frac{\partial^q}{\partial t^q}, \quad q = 0, 1, 2;$$

ε — достаточно малое положительное число, причем $|\gamma| < 1$ при выполнении условия (a).

Уравнение составного типа (8) будем использовать в качестве ε-регуляризирующего уравнения для (1) [2, 4, 7, 8, 10, 11].

Через V будем обозначать класс функций u_ε таких, что $u_\varepsilon(x,t) \in W_2^2(Q)$, $\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon \in L_2(Q)$, удовлетворяющих условиям (9), (10).

Определение. *Регулярным решением краевой задачи* (8)–(10) будем называть функцию $u_\varepsilon(x,t) \in V$, удовлетворяющую уравнению (8).

Теорема 1. *Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (8), *кроме того, всюду в области* $\overline{Q}$ *выполнены условия*

$$2\alpha - |K_t| + \lambda K \geq \delta_1 > 0, \quad \lambda c - c_t \geq \delta_2 > 0,$$

$$c(x,0) = c(x,T), \quad a(x,0) = a(x,T), \quad \text{где } \lambda = -\frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0,$$

причем $|\gamma| < 1$ *при выполнении условия* (a), $|K_{x_j}|$ *— ограниченная функция в области* $\overline{Q}$. *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t), f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = \gamma f(x,T)$, *существует единственное регулярное решение задачи* (8)–(10) *и для него справедливы следующие оценки:*

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\varepsilon\right\|_0^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u_\varepsilon\right\|_0^2\right) + ||u_\varepsilon\|_1^2 \leq c_2\|f\|_0^2, \tag{I}$$

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon\right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq c_3\big(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\big). \tag{II}$$

Доказательство неравенства (I) проводится так же, как в лемме, в результате получаем единственность регулярного решения задачи (8)–(11) [2, 4, 7–11].

Докажем вторую априорную оценку. Пусть $\varphi_j(x,t)$ — собственные функции спектральной задачи

$$\Delta\varphi_j = \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial^2 t} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\mu_j^2\varphi_j, \tag{11}$$

$$D_t^p\varphi_j\big|_{t=0} = D_t^p\varphi_j|_{t=T}, \quad \text{где } p = 0, 1, \tag{12}$$

$$\varphi_j|_S = 0. \tag{13}$$

Из общей теории линейных самосопряженных эллиптических операторов [12, 13] известно, что все собственные функции задачи (11)–(13) образуют фундаментальную систему в $C^\infty(Q)$, ортогональную в $L_2(Q)$. Далее с помощью этих последовательностей функций построим решение вспомогательной задачи

$$\ell\omega_j \equiv \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\frac{\partial\omega_j}{\partial t} = \varphi_j, \tag{14}$$

$$\omega_j(x,0) = \gamma\omega_j(x,T), \tag{15}$$

где $\gamma \neq 0$, причем $|\gamma| < 1$. Очевидно, что задача (14), (15) однозначно разрешима и ее решение имеет вид

$$\ell^{-1}\varphi_j = \omega_j = \int\limits_0^t \exp\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right)\varphi_j\,d\tau + \frac{\gamma}{1-\gamma}\int\limits_0^T \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\varphi_j\,dt.$$

Ясно, что функции $\omega_j(x,t) \in C^\infty(Q)$ линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{j=1}^N c_j\omega_j = 0$$

для какого-нибудь набора последовательностей функций $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, то, действуя на эту сумму оператором ℓ, имеем

$$\sum_{j=1}^N c_j\ell\omega_j = \sum_{j=1}^N c_j\varphi_j = 0.$$

Отсюда следует, что $c_j = 0$ для всех $j = \overline{1,N}$. Отметим, что из построения функции $\varphi_j(x,t)$ вытекают следующие условия на функции $\omega_j(x,t) \in C^\infty(Q)$:

$$D_t^q\omega_j\big|_{t=0} = \gamma D_t^q\omega_j\big|_{t=T}, \quad q = 0,1,2, \tag{16}$$

$$\omega_j|_S = 0. \tag{17}$$

Приближенное решение задачи (8)–(10) ищем в виде

$$w(x,t) = u_\varepsilon^N(x,t) = \sum_{j=1}^N c_j\omega_j(x,t),$$

где коэффициенты c_j для любого j от 1 до N определяются как решение линейной алгебраической системы

$$\int\limits_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\varphi_j\,dxdt = \int\limits_Q f\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\varphi_j\,dxdt. \tag{18}$$

Докажем однозначную разрешимость алгебраической системы (18). Умножая каждое уравнение из (18) на $2c_j$ и суммируя по j от 1 до N, учитывая задачу (14), (15) и алгебраическую систему (18), получим тождество

$$\int\limits_Q L_\varepsilon w\exp(-\lambda t)w_t\,dxdt = \int\limits_Q f\exp(-\lambda t)w_t\,dxdt, \tag{19}$$

откуда в силу условия теоремы 1 интегрированием тождества (19) получим для приближенного решения задачи (8)–(10) оценки (I), т. е.

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\varepsilon^N\right\|_0^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u_\varepsilon^N\right\|_0^2\right) + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_1^2 \le c_4\|f\|_0^2. \tag{20}$$

Отсюда вытекает разрешимость системы (18) [6–8, 10, 13].

Докажем вторую априорную оценку (II). Используя задачу (11)–(15), из тождества (18) получим

$$-\frac{1}{\mu_j^2}\int\limits_Q L_\varepsilon w \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\Delta\ell\omega_j\,dxdt = -\frac{1}{\mu_j^2}\int\limits_Q f \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\Delta\ell\omega_j\,dxdt. \tag{21}$$

Умножая каждое уравнение в (21) на $2\mu_j^2 c_j$, суммируя по j от 1 до N и учитывая условия (16), (17), из (21) получим следующее тождество:

$$\int\limits_Q (L_\varepsilon w - f)e^{-\lambda t}\left[\frac{\partial\Delta w}{\partial t} - \lambda w_{tt} + \frac{\lambda^2}{4}w_t\right]dxdt = 0. \tag{22}$$

Интегрируя (22) с учетом условий теоремы 1 и краевых условий (16), (17), приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} c_5\big(\|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2\big) \geq \varepsilon\left\|\frac{\partial\Delta w}{\partial t}\right\|_0^2 &+ \int\limits_Q e^{-\lambda t}\big\{(2a + K_t + \lambda K)w_{tt}^2 + (2a - K_t + \lambda K)w_{tx_i}^2 \\ &+ \lambda a_0 w_{x_i t}^2 + \lambda a_0 w_{x_i x_j}^2\big\}\,dxdt + \int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda t}\big\{K\big(w_{tt}^2 + w_{tx_i}^2\big) \\ &+ \alpha w_t w_{tt} + (a_{ij}w_{x_i})_{x_j}(w_{x_i x_j} + w_{tt}) + 2cw(w_{tt} + w_{x_i x_j})\big\}\nu_0\,ds \\ &+ \int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda t}\{K w_{tt} w_{tx_i} + 2\alpha w_t w_{tx_i} + (a_{ij}w_{x_i})_{x_j t} w_{tt}\}\nu_i\,ds = \sum_{i=1}^{3} J_i, \end{aligned} \tag{23}$$

где J_1 — интеграл по области, J_i, $i = 2, 3$, — интегралы по границе. Учитывая условие теоремы 1 и используя неравенство Юнга, получим, что интеграл J_1 допускает следующую оценку:

$$J_1 = \varepsilon\left\|\frac{\partial\Delta w}{\partial t}\right\|_0^2 + c_6\int\limits_Q \exp(-\lambda t)\big[w_{tt}^2 + w_{tx_i}^2 + w_{x_i x_j}^2\big]\,dxdt \leq \mathrm{const}\,. \tag{24}$$

Учитывая краевые условия (9), (10) и условия теоремы 1, получим, что

$$J_i = 0, \quad i = 2, 3. \tag{25}$$

Постоянная в правой части (24) не зависит от N, следовательно, из (20)–(25) вытекает вторая оценка для приближенного решения задачи (8)–(10). Оценка (20) вместе с оценкой (24) позволяют выполнить предельный переход по $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\big\{u_\varepsilon^{N_k}(x,t)\big\}$ сходится в силу единственности решения (неравенства (I)) в $L_2(Q)$ вместе с производными первого и второго порядков к искомому регулярному решению $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (8)–(10), обладающему свойствами, указанными в теореме 1 [2, 4, 7–11, 13].

В силу (24) для $u_\varepsilon(x,t)$ справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \le c_7 \big(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \big). \tag{26}$$

Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству разрешимости краевой задачи (1)–(3).

3. Существование решения задачи

С помощью метода ε-регуляризации докажем регулярную разрешимость задачи (1)–(3).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда регулярное решение задачи* (1)–(3) *из* $W_2^2(Q)$ *существует и единственно.*

Доказательство. Единственность решения задачи (1)–(3) в пространстве $W_2^2(Q)$ доказана в лемме. Докажем существование регулярного решения задачи (1)–(3) в $W_2^2(Q)$. Для этого рассмотрим в области Q уравнение (8) и краевые условия (9), (10) при $\varepsilon > 0$. Так как выполнены все условия теоремы 1, существует единственное регулярное решение задачи (8)–(10) при $\varepsilon > 0$ и для него справедливы первая и вторая оценки. Отсюда следует, что из множества функций $\{u_\varepsilon(x,t)\}$, $\varepsilon > 0$, можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций в V такую, что $\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\} \to u(x,t)$ при $\varepsilon_i \to 0$. Покажем, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ (уравнению (1)). В самом деле, так как последовательность $\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\}$ слабо сходится в $W_2^2(Q)$, а последовательность $\big\{\frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}(x,t)}{\partial t}\big\}$ равномерно ограничена и оператор L линейный, имеем

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \tag{27}$$

Из равенства (27), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, получим единственное регулярное решение задачи (1)–(3) [2, 8, 10]. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. При постановке краевой задачи (1)–(3) знак квадратичной формы существенной роли не играет, хотя в случае (a) в класс уравнений (1) входят параболические уравнения, а в случае (b) входят обратно-параболические уравнения, тем не менее для задачи (1)–(3) в случае (a) и в случае (b) получены аналогичные результаты лишь с изменением значения γ, т. е. $|\gamma| < 1$ в случае (a) и $|\gamma| > 1$ в случае (b).

Замечание 4. Возникает вопрос: существенны ли ограничения на γ при постановке задачи? Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. В прямоугольнике $Q = (0, \ell) \times (0, T)$ рассмотрим модельную задачу

$$\Pi_1 u = u_t - u_{xx} = 0, \tag{28}$$

$$u(x,0) = \gamma u(x,T), \tag{29}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \tag{30}$$

Пусть $\omega(x)$ — собственная функция, а λ — соответствующее собственное значение задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\omega'' = \lambda^2\omega, \quad \omega(0) = \omega(\ell) = 0.$$

Нетрудно проверить, что все условия леммы и теоремы 1 выполнены, но, несмотря на это, нетривиальным решением изучаемой нелокальной задачи (28)–(30) будут функции $u(x,t) = Ae^{-\lambda^2 t}\omega(x)$, где A — произвольная постоянная и $\gamma = e^{\lambda^2 T} > 1$.

Пример 2. В области Q рассмотрим задачу

$$\Pi_2 u = u_t + u_{xx} = 0, \tag{31}$$

$$u(x,0) = \gamma u(x,T), \tag{32}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \tag{33}$$

Решая задачу (31)–(33), так же, как выше, убедимся, что $u(x,t) = Ae^{\lambda^2 t}\omega(x)$, где A — произвольная постоянная, и $\gamma = e^{-\lambda^2 T} < 1$ будет нетривиальным решением задачи (31)–(33).

Таким образом, ограничения на γ в случаях (a) и (b) существенны. При невыполнении этих условий, как показано выше, единственность решения задачи нарушается.

Автор приносит глубокую благодарность профессорам А. И. Кожанову и И. Е. Егорову за обсуждение результатов работы и ценные советы в подготовке данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4, С. 739–740.
2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
3. *Врагов В. Н.* О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. С. 5–13.
4. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990.
5. *Егоров И. Е, Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
6. *Терехов А. Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. С. 148–158.
7. *Глазатов С. Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 162–164.
8. *Джамалов С. З.* О корректности нелокальных краевых задач для многомерного уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. С. 63–70.
9. *Каратопраклиева М. Г.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 68–79.

10. *Джамалов С. З.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка // Узб. мат. журн. 2014. Т. 1, № 1. С. 5–14.
11. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Ленинград: ЛГУ, 1990.
12. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
13. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М: Наука, 1973.

Статья поступила 26 февраля 2017 г.

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович
Институт математики при Академии наук Республики Узбекистан,
ул. М. Улугбека, 81, Академгородок, Ташкент 100170, Узбекистан
`siroj63@mail.ru`

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2017. Том 24, № 4

UDC 517.956.6

ON CORRECTNESS OF NONLOCAL EDGE PROBLEM WITH CONSTANT COEFFICIENT FOR MULTIDIMENSIONAL SECOND ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

S. Z. Jamalov

Abstract: We formulate a nonlocal boundary-value problem for a second order multidimensional equation of mixed type covering classical elliptic, hyperbolic, and parabolic equations. We prove regular solvability of the posed nonlocal boundary-value problem in Sobolev spaces.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.4.11313

Keywords: second order multidimensional equation of mixed type, nonlocal boundary value problem, generalized solution, regular solution, uniqueness, existence, smoothness of solution, method of ε-regularization, Galerkin method, a priori estimates.

REFERENCES

1. Bitsadze A. V. and Samarskii A. A., "About some protozoa generalizations of linear elliptic boundary-value problems," Russ. Math., **185**, No. 4, 739–740 (1969).
2. Vragov V. N., Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1983).
3. Vragov V. N., "On the statement and solvability of boundary value problems for equations of mixed-composite type [in Russian]," in: Mathematical Analysis and Related Questions of Mathematics, pp. 5–13, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk (1978).
4. Kozhanov A. I., Boundary Value Problems for Equations Mathematical Physics of Odd Order [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1990).
5. Egorov I. E. and Fedorov V. E., Higher-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Vychislit. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).
6. Terekhov A. N., "Nonlocal boundary value problems for equations of the variable type [in Russian]," in: Nonclassical Equations of Mathematical Physics, pp. 148–158, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk (1985).
7. Glazatov S. N., "Nonlocal boundary value problems for equations of mixed type in a rectangle," Sib. Math. J., **26**, No 6, 162–164 (1985).
8. Jamalov S. Z., "On the correctness of non-local boundary problems for a multidimensional equation of mixed type [in Russian]," in: Application of Methods of Functional Analysis to Nonclassical Equations of Mathematical Physics, pp. 63–70, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk (1989).
9. Karatopraklieva M. G. "On a nonlocal edge problem for a mixed-type equation," Differ. Equ., **27**, No 1, 68–79 (1991).
10. Jamalov S. Z., "On a nonlocal boundary-value problem for an equation of mixed type of the second kind of second order," Uzbek. Mat. Zhurn., **1**, No 1, 5–14 (2014).
11. Kuzmin A. G., Nonclassical Equations of Mixed Type and Their Applications to Gas Dynamics [in Russian], Leningr. Gos. Univ., Leningrad (1990).

12. Berezanskiy Yu. M., Expansion by Eigenfunctions of Selfadjoint Operators [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1965).
13. Ladyzhenskaya O. A., Boundary-Value Problems of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1973).

Submitted February 26, 2017

Sirozhiddin Z. Jamalov
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Institute of Mathematics,
81 M. Ulugbek Street, Akademgorodok, Tashkent 100170, Uzbekistan
sirojj63@mail.ru