ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 1 (2010)

Труды VII Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы

УДК 511.43

О КОЛИЧЕСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ЦИКЛИЧЕСКИМИ БИНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ [1]

Ю. Ю. Евсеева (г. Владимир)

Аннотация

В работе представлена формула для нахождения количества представлений натурального числа произвольной многоклассной бинарной квадратичной формой. Получена формула для случая циклических многоклассных бинарных квадратичных форм. В качестве следствий даны основные арифметические свойства функции количества представлений.

Введение. Рассматривается одна из центральных проблем арифметической теории квадратичных форм — получение формул для количества представлений $r(f,m)$ натуральных чисел m бинарными квадратичными формами $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, т. е. нахождением количества целых решений диофантового уравнения

$$ax^2+bxy+cy^2=m.$$

Цель работы — получить формулу для количества представлений натуральных чисел циклическими бинарными многоклассными квадратичными формами. Для достижения поставленной цели в работе используются теория бинарных квадратичных форм, мнимых квадратичных полей, теория операторов Гекке и тета-рядов.

Задача о количестве представлений $r(f,m)$ является классической задачей теории чисел. Диксон в своей монографии [11] подробно описал историю изучения бинарных квадратичных форм. Основоположниками теории квадратичных форм являются Ферма и Эйлер. Задачи Диофанта привели Ферма к поиску целочисленных решений квадратных уравнений с двумя неизвестными. Ферма рассмотрел задачу представимости числа в виде

$$x^2+y^2=m.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 08-01-00326.

Эйлер, а затем Лагранж полностью решили задачу Ферма о двух квадратах. Ими же были рассмотрены и другие конкретные квадратичные формы. Гаусс [4] впервые начал изучать случай произвольных бинарных квадратичных форм. Он ввел понятие эквивалентности квадратичных форм. На множестве классов бинарных квадратичных форм фиксированного дискриминанта Гаусс определил операцию композиции, относительно которой множество классов образует коммутативную группу. В последствии операция умножения получила название гауссовой композиции.

На протяжениии XIX века была выявлена связь бинарных квадратичных форм с квадратичными полями [12] (Кронекер, Дирихле, Дедекинд). На основе этой связи удалось доказать общую формулу для суммы количества представлений натурального числа всеми формами данного дискриминанта. В случае если форма одноклассная эта формула принимает вид

$$r(f,m) = e(D)\rho(m), \tag{1}$$

где $e(D)$ — число целых автоморфизмов формы $f(x,y)$, $\rho(m)$ — мультипликативная функция, определенная на степенях простых чисел следующим образом:

$$\rho(p^\alpha) = \alpha + 1 \text{ для } \chi_1(p) = +1;$$

$$\rho(p^\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } 2 \mid \alpha \\ 0, \text{ если } 2 \nmid \alpha \end{cases} \quad \text{для } \chi_1(p) = -1;$$

$$\rho(p^\alpha) = 1 \text{ для } \chi_1(p) = 0.$$

В этих формулах $\chi_1(p)$ — характер Дирихле мнимого квадратичного поля дискриминанта D [2].

XX век ознаменовался в арифметической теории квадратичных форм появлением двух фундаментальных идей.

Первая — это идея связанная с модулярными формами (Пуанкаре, Клейн) и операторами Гекке (см., например, [1]). Каждой квадратичной форме ставится в соответствие ее тета-ряд, который является модулярной формой, её уровень определяется дискриминантом. Все такие модулярные формы образуют конечномерное векторное пространство, инвариантное относительно операторов Гекке. Любая модулярная форма может быть разложена по базису собственных функции операторов Гекке. Задача о представимости числа эквивалентна вычислению коэффициентов тета-ряда, что, в свою очередь, сводится к его разложению по базису из собственных функций. Данный подход подробно изложен в книге Петерссона [14], и в принципе позволяет получать формулы представлений в том случае, когда известен базис. Однако нахождение басиза представляет собой отдельную, крайне трудную, не решенную до сих пор задачу.

Вторая — это идея, основанная на дальнейшем развитиии идеи Гаусса о родах квадратичных форм. Зигель [16], [17] доказал общую формулу для числа представлений родом квадратичных форм. Наиболее сильные результаты в

этом направлении были получены Журавлевым [6] и Шимурой [15]. Для бинарных форм формула (1) вытекает как частный случай из формулы Зигеля.

Задача о количестве представлений чисел квадратичными формами была решена для некоторых форм специального вида [13], [10], [3], [9]. Однако, несмотря на все эти достижения, задача о количестве представлений числа произвольной бинарной квадратичной формой так и оставалась не решенной. Асимптотические формулы для числа представлений бинарных квадратичных форм получены Фоменко [7], Голубевой [5].

Основной результат. Опираясь на теорию операторов Гекке и гауссову композицию квадратичных форм, автором получена общая формула для количества представлений натуральных чисел бинарными квадратичными формами.

Рассматриваются бинарные квадратичные положительно определенные формы дискриминанта $D < 0$, где D совпадает с дискриминантом мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, D_1 — бесквадратная часть D, $\mathfrak{J}(D_1) = \{C_0, C_1, ..., C_{h-1}\}$ — группа классов форм, $f_i \in C_i$ и $r(f_i, m)$ — число решений уравнения

$$f_i(x, y) = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2 = m, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Для количества представлений $r(f_i, m)$ натурального числа бинарными квадратичными формами $f_i(x, y)$, выполняется формула*

$$r(f_i, m) = \frac{1}{h} \sum_{\varkappa} \varkappa(C_i)^{-1} r(\varkappa, m),$$

где $\varkappa$ пробегает все характеры группы $\mathfrak{J}(D_1)$ порядка h, $r(\varkappa, m)$ — коэффициенты Фурье тета-ряда $\Theta(z, \varkappa)$

$$\Theta(z, \varkappa) = \sum_{i=1}^{h} \varkappa(C_i) \Theta(z, C_i),$$

$$r(\varkappa, m) = r(\varkappa, 1) \widehat{\varkappa}(m),$$

$\widehat{\varkappa}(m)$ — собственные значения этого тета-ряда для операторов Гекке и при этом

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\widehat{\varkappa}(m)}{m^s} = \prod_{p \in P} (1 - \frac{\widehat{\varkappa}(p)}{p^s} + \frac{\chi_1(p)}{p^{2s}})^{-1}.$$

Степень сложности функций $r(f_i, m)$ представлений чисел m формами f_i суммарно зависит от структуры группы классов $\mathfrak{J}$. Простейшими являются циклические группы $\mathfrak{J}$.

Предположим, что

$$\mathfrak{J} =< f_1 >= \{f_0, f_1, f_2, ..., f_{h-1}\} \tag{2}$$

— циклическая группа собственных классов форм порядка h с образующей f_1, формами

$$f_i = f_1^i \quad (i = 1, 2, ..., h-1) \tag{3}$$

и определяющим соотношением

$$f_1^h = f_0. \tag{4}$$

Имеем, $1 = \varkappa(f_0) = \varkappa(f_1^h) = \varkappa(f_1)^h$, т.е. $\varkappa(f_1) = \sqrt[h]{1}$.

Пусть

$$\varkappa(f_1) = \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon - \quad \text{некоторый корень } \sqrt[h]{1}, \tag{5}$$

тогда

$$\varkappa(f_i) = \varkappa(f_1^i) = \varkappa(f_1)^i = \varepsilon^i \quad i = 0, 1, 2, .., h-1. \tag{6}$$

Таким образом, выбор (5) полностью определяет характер $\varkappa$ и мы естественным образом приходим к характерам $\varkappa_k$:

$$\varkappa_k(f_i) = \varepsilon^{k \cdot i} \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2, ..., h-1. \tag{7}$$

Из (5) и (6) следует, что любой характер $\varkappa$ группы $\mathfrak{J}$ имеет вид (7). Эти характеры различны, поскольку

$\varkappa_k(f_1) = \varepsilon^k \neq \varepsilon^l = \varkappa_l(f_1)$ если $k \not\equiv l \pmod h$, и мы, тем самым, получим все различные характеры $\varkappa_k$ (7) группы $\mathfrak{J}$.

Для $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ находим

$$\widehat{\varkappa}(m) = \widehat{\varkappa}(p_1^{\alpha_1}) \cdots \widehat{\varkappa}(p_n^{\alpha_n}) = \prod_{t=1}^{n} \widehat{\varkappa}(p_t^{\alpha_t}), \tag{8}$$

где

$$\widehat{\varkappa}(p^\alpha) = \sum_{\delta_1 \cdot \delta_2 = p^\alpha} \varkappa(\delta_1) \cdot \bar{\varkappa}(\delta_2)\chi_1(\delta_2) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \varkappa(p^\beta)\bar{\varkappa}(p^{\alpha-\beta})\chi_1(p^{\alpha-\beta}). \tag{9}$$

Поскольку,

$$\bar{\varkappa}(p^{\alpha-\beta}) = \varkappa(p^{\alpha-\beta})^{-1} = \varkappa(p^{\beta-\alpha})$$

и

$$\varkappa(p^\beta) \cdot \varkappa(p^{\beta-\alpha}) = \varkappa(p^{2\beta-\alpha}) = \varkappa(p)^{2\beta-\alpha},$$

то по (9)

$$\widehat{\varkappa}(p^\alpha) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \varkappa(p)^{2\beta-\alpha}\chi_1(p)^{\alpha-\beta}. \tag{10}$$

Предположим, что $\chi_1(p) = +1$. Тогда (10) принимает вид

$$\widehat{\varkappa}(p^\alpha) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \varkappa(p)^{2\beta-\alpha}. \tag{11}$$

Если $\chi_1(p) = -1$, то по определению имеем

$$\widehat{\varkappa}(p^\alpha) = \sum_{0\le\beta\le\alpha} (-1)^{\alpha-\beta} = (-1)^\alpha \sum_{0\le\beta\le\alpha} (-1)^\beta, \tag{12}$$

откуда следует

$$\widehat{\varkappa}(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha \equiv 0 \pmod 2, \\ 0 & \text{если } \alpha \equiv 1 \pmod 2. \end{cases} \tag{13}$$

Для $\chi_1(p) = 0$ получим формулу:

$$\widehat{\varkappa}(p^\alpha) = \varkappa(p^\alpha). \tag{14}$$

Фиксируем для m разложение на множители

$$m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_- \tag{15}$$

с взаимнопростыми m_0, m_+, m_- вида

$$m_0 = {p'}_1^{\gamma_1} \cdots {p'}_e^{\gamma_e} \quad \text{с} \quad \chi_1({p'}_i) = 0, \tag{16}$$

$$m_+ = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \quad \text{с} \quad \chi_1(p_i) = +1, \tag{17}$$

$$m_- = q_1^{\delta_1} \cdots q_f^{\delta_f} \quad \text{с} \quad \chi_1(q_i) = -1. \tag{18}$$

На множестве простых p с условием $\chi_1(p) = 0$ или $+1$ введем функцию

$$a(p) = i, \quad \text{если} \quad r(f_i, p) > 0 \quad \text{с} \quad 0 \le i \le h/2. \tag{19}$$

В приведенных обозначениях для характера $\widehat{\varkappa} = \varkappa_k$ (7) равенство (8), с учетом (11) — (14), перепишется в виде

$$\widehat{\varkappa_k}(m) = \varkappa_k(m_0) \cdot \varkappa_k(m_+) \quad \text{или} \quad \widehat{\varkappa_k}(m) = 0, \tag{20}$$

соответственно тому, будут ли все показатели δ_i четными

$$\delta_1 \equiv \cdots \equiv \delta_f \equiv 0 \pmod 2 \tag{21}$$

или среди δ_i найдется хотя бы один нечетный. При выполнении условия (21) получим:

$$\widehat{\varkappa_k} = \prod_{j=1}^{e} \varkappa_k({p'}_j)^{\gamma_j} \cdot \prod_{t=1}^{n} \sum_{0\le\beta_t\le\alpha_t} \varkappa_k(p_t)^{2\beta_t-\alpha_t} = \tag{22}$$

$$= \sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1} \cdots \sum_{0\le\beta_n\le\alpha_n} \varkappa_k({p'}_1)^{\gamma} \cdot \varkappa_k({p'}_e)^{\gamma}_e \cdot \varkappa_k(p_1)^{2\beta_1-\alpha_1} \cdots \varkappa_k(p_n)^{2\beta_n-\alpha_n}, \tag{23}$$

при этом, согласно (7) и (19):

$$\varkappa_k(p) = \varkappa_k(f_{a(p)}) = \varepsilon^{a(p)\cdot k}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в равенство (22), получаем

$$\widehat{\varkappa_k}(m) = \sum_{0\leq\beta_1\leq\alpha_1} \cdots \sum_{0\leq\beta_n\leq\alpha_n} \varepsilon^{a(m;\beta_1,\cdots,\beta_n)\cdot k}, \tag{25}$$

где

$$a(m,\beta_1\cdots\beta_n) = a(p'_1)\gamma_1+\cdots+a(p'_e)\gamma_e+a(p_1)(2\beta_1-\alpha_1)+\cdots+a(p_n)(2\beta_n-\alpha_n) \tag{26}$$

Теперь, вспоминая определение характера $\varkappa_k(f_i) = \varepsilon^{k\cdot i}$ (7) и подставляя его и (25) в формулу Теоремы 1, выводим:

$$\frac{1}{e(D_1)}r(f_i,m) = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{h-1}\varepsilon^{-ik}\sum_{0\leq\beta_1\leq\alpha_1}\cdots\sum_{0\leq\beta_n\leq\alpha_n}\varepsilon^{a;\beta_1,\cdots,\beta_n}\cdot k = \tag{27}$$

$$= \sum_{0\leq\beta_1\leq\alpha_1}\cdots\sum_{0\leq\beta_n\leq\alpha_n}\Big(\frac{1}{h}\sum_{0\leq k\leq h-1}\varepsilon^{(a(m;\beta_1,\cdots,\beta_n)-i)\cdot k}\Big).$$

Внутренние суммы в (27) — это суммы геометрических прогрессий:

$$\sum_{0\leq k\leq h-1}\varepsilon^{a\cdot k} = \frac{\varepsilon^{a\cdot h}-1}{\varepsilon^a-1} = 0, \quad \text{если} \quad a\not\equiv 0 \pmod h. \tag{28}$$

С другой стороны,

$$\sum_{0\leq k\leq h-1}\varepsilon^{a\cdot k} = \sum_{0\leq k\leq h-1} 1 = h, \quad \text{если} \quad a\equiv 0 \pmod h. \tag{29}$$

Принимая во внимание (28) и (29), равенство (27) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{e(D_1)}r(f_i,m) = r(i,m), \tag{30}$$

где $r(i,m)$ — число решений сравнения

$$a(m;\beta_1,...,\beta_n)\equiv i \pmod h \tag{31}$$

для $0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1,...,0\leqslant\beta_n\leqslant\alpha_n$ или, согласно (26), — сравнения

$$a(p_i)(2\beta_1-\alpha_1)+...+a(p_n)(2\beta_n-\alpha_n)\equiv i-a(p'_1)\gamma_1-...-a(p'_e)\gamma_e \pmod h. \tag{32}$$

Идеалы (p') для дискриминантных простых $p'|D_1$ в квадратном поле $\mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$ являются квадратами простых идеалов $\mathfrak{p}'$ нормы $N(\mathfrak{p}') = p'$

$$(p') = \mathfrak{p}'^2. \tag{33}$$

При отображении

$$\mathfrak{p}' \longrightarrow \bar{f}_{a(p')} \tag{34}$$

произведение классов переходит в композицию классов

$$(p') = \mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}' \longrightarrow \bar{f}_{a(p')} * \bar{f}_{a(p')} = \bar{f}_{2a(p')/ \bmod h}. \tag{35}$$

Идеал (p') главный, и поэтому $\bar{f}_{2a(p') \bmod h} = \bar{f}_0$, т.е. $2a(p') \equiv 0 \pmod h$ для всех $p'|D_1$:

$$a(p') = 0, \text{ если } h \text{ — нечетное и } a(p') = 0 \text{ или } \frac{h}{2}, \text{ если } h \text{ — четное.} \tag{36}$$

В (32) обозначим

$$a(m_0) = a(p'_1)\gamma_1 + ... + a(p'_e)\gamma_e, \tag{37}$$

тогда в силу (36) можем записать

$$a(m_0) = 0 \text{ для нечетных } h, \tag{38}$$

$$a(m_0) = 0 \text{ или } \frac{h}{2} \text{ для четных } h, \tag{39}$$

соответственно, если имеется четное число степеней $(p'_i)^{\gamma_i}|m_0$ (17) с

$$\gamma_i \equiv 1 \pmod 2 \text{ и } a(p'_i) = \frac{h}{2} \tag{40}$$

или указанных степеней нечетное число. Так как очевидно по (38) и (39)

$$a(m_0) \equiv -a(m_0) \pmod h,$$

то вводя новое обозначение

$$a(m_+; \beta_1, ..., \beta_n) = a(p_1)(2\beta_1 - \alpha_1) + ... + a(p_n)(2\beta_n - \alpha_n), \tag{41}$$

переписываем (32) в виде

$$a(m_+; \beta_1, ..., \beta_n) \equiv i + a(m_0) \pmod h. \text{ где } 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \tag{42}$$

Из формул (30) и (42) вытекает

Теорема 2. *Предположим, что группа собственных классов квадратичных форм $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(D_1) = f_0, f_1, ..., f_{h-1}$ циклическая. Тогда число представлений $r(f_i, m)$: $f_i(x, y) = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2 = m$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ натурального числа $m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_-$ (15) равно*

$$r(f_i, m) = 0 \text{ если } m_- \notin (21). \tag{43}$$

В противном случае

$$r(f_i, m) = e(D_1) \cdot r(i, m), \tag{44}$$

где $e(D_1)$ — число автоморфизмов формы, а $r(i, m)$ — число решений сравнения (42).

Из данной теоремы следуют арифметические свойства количества представлений.

Следствие 1. *Для нечетного порядка h количество представлений $r(f_i, m)$ числа $m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_-$ (15) с условием, что $m_- \in (21)$, не зависит от множителей m_0, m_+.*

Следствие 2. *Предположим h — нечетное и для $m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_-$ во множитель m_+ (17) входит степень $p_i^{\alpha_i}$ с Н.О.Д.$(a(p_i), h)$=1 и $\alpha_i \equiv h - 1 \pmod h$. При этих условиях выполняются равенства*

$$r(f_0, m) = r(f_1, m) = ... = r(f_{h-1}, m), \tag{45}$$

и, при дополнительном условии (21) на m_-, -

$$r(f_i, m) = \frac{e(D_1)}{h}(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_n + 1) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant h - 1. \tag{46}$$

Если $h = p$ — нечетное простое число, то достаточно потребовать существование степени $p_i^{\alpha_i} | m_+$ с $a(p_i) \neq 0$.

Числовой пример Рассмотрим пример пятиклассных циклических бинарных квадратичных форм. Первым дискриминантом D_1 с числом классов $h = 5$ является $D_1 = -47$. Группа $\mathfrak{J}(-47)$ содержит формы

$$f_0 = x_1^2 - x_1x_2 + 12x_2^2,\ f_1 = 2x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2,\ f_2 = 3x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 \tag{47}$$

и сопряженные с f_1 и f_2 формы f_4 и f_3. Поскольку

$$r(f_i, m) = r(f_{5-i}, m) \text{ для } i = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{48}$$

то ограничимся формами (47). Применение формулы (44) предполагает знание значений функции $a(p)$ (19) для простых p с

$$\chi_1(p) = \frac{p}{D_1} = +1 \tag{49}$$

Например,

$$\begin{aligned} &a(2) = 1, \text{ так как } f_1(x_1, x_2) = 2 \text{ для } x_1 = 1, x_2 = 0, \\ &a(3) = 2, \text{ так как } f_2(x_1, x_2) = 3 \text{ для } x_1 = 1, x_2 = 0, \\ &a(7) = 1, \text{ так как } f_1(x_1, x_2) = 7 \text{ для } x_1 = 1, x_2 = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Теперь найдем число решений уравнений:

$$f_0 = x_1^2 - x_1x_2 + 12x_2^2 = m,\ f_1 = 2x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 = m,\ f_2 = 3x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 = m \tag{51}$$

для $m = 10^n$ с $n = 0, 1, 2, ...$

Очевидно

$$m = m_+ \cdot m_- = 2^n \cdot 5^n. \tag{52}$$

В этом случае $m_- = 5^n$. Поэтому уравнения (51) могут иметь решения только, если степень n четная. Рассмотрим сравнение (42)

$$a(2)(2\beta - n) \equiv i \pmod 5 \text{ с } a(2) = 1 \text{ т.е. } 2\beta \equiv i + n \pmod 5,$$

откуда

$$\beta \equiv 3(i + n) \pmod 5, \text{ где } 0 \leqslant \beta \leqslant n. \tag{53}$$

Таким образом формула (44) показывает, что число решений уравнений (51) для $m = 10^n$ равно

$$r(f_i, 10^n) = 2([\frac{n}{5}] + \epsilon_{i,n}) \ (i = 0, 1.2,) \tag{54}$$

где $\epsilon_{i,n} = 1$ только если

$$i \equiv 2\beta - n \pmod 5 \text{ для некоторого } 0 \leqslant \beta \leqslant n - 5 \cdot [\frac{n}{5}], \tag{55}$$

и $\epsilon_{i,n} = 0$ — в остальных случаях; $[\cdot]$ — целая часть числа.

Например, уравнение

$$x_1^2 - x_1x_2 + 12x_2^2 = 10^n \ (x_1, x_2 \in Z) \tag{56}$$

может иметь решение только для четных n, при этом согласно формуле (54), число решений уравнения (56) будет

$$r(f_0, 10^n) = 2 \cdot [\frac{n}{5}] + 2 \text{ для } n \equiv 0, 2, 4 \pmod 5, \tag{57}$$

$$r(f_0, 10^n) = 2 \cdot [\frac{n}{5}] \text{ для } n \equiv 1, 3 \pmod 5 \tag{58}$$

при условии, что n четное, и

$$r(f_0, 10^n) = 0 \text{ для нечетных } n. \tag{59}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Андрианов А.Н., Журавлёв В.Г. Модулярные формы и операторы Гекке. М., Наука. 1990.

[2] Боревич З.И. Шафаревич И.Р. Теория чисел М.: Наука, 1984.

[3] Вепхвадзе Т.В., О представлении чисел положительными бинарными квадратичными формами нечетного дискриминанта, Тр. Тбилис. Мат. ин-та, АН. Груз. ССР, 1974.

[4] Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. М.: Издательство Академии наук СССР. 1959.

[5] Голубева Е.П., Об исключительных числах для бинарных квадратичных форм, Зап. научн. сем. ПОМИ, 1998, т.254.

[6] Журавлёв В.Г. Представление квадратичных форм родом квадратичных форм, Алгебра и анализ. 1996. Т.8.

[7] Фоменко О.М., Представление целых чисел, принадлежащих подпоследовательностям натурального ряда, бинарными квадратичными формами, Зап. научн. сем. ПОМИ, 1998, т. 254.

[8] Шимура Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М: Мир, 1973.

[9] Basilla J.M., On the solution of $x^2 + dy^2 = m$, Proc. Japan Acad., 80, Ser. A, 2004.

[10] Buel D.A. Binary Quadratic Forms, Classical Theory and Modern Computations, N.Y., 1989.

[11] Dickson L.E. History of the theory of numbers vol.3, Quadratic and higher forms N.Y. 1992.

[12] Dirichlet P. G. L., Lectures on Number Theory (Supplements by R. Dedekind), transl. by J. Stillwell, Amer. Math. Soc., 1999.

[13] Pall G., The distribution of intergers represented by binary quadratic forms, Bull. Amer. Math. Soc. 49, No.6, 1943.

[14] Petersson H., Modulfunktionen und quadratische Formen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, v. 100, 1982.

[15] Shimura G., The number of representations of an integer by a quadratic form. Duke Mathematical Journal, 1999, v. 100, n. 1.

[16] Siegel C.L. Über die analytische Theorie der Quadratischen Formen, Ann. Math. 1935.

[17] Siegel C.L. Lectures on the Analytical Theory of Quadratic Forms. G̈ottingen. Revised Edition. 1963.

Владимирский государственный гуманитарный университет
Получено 01.06.2010