



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. S. Volosivets, R. N. Fadeev, Weighted integrability of double series with respect to multiplicative systems,
Fundam. Prikl. Mat., 2013, Volume 18, Issue 5, 69–87

<https://www.mathnet.ru/eng/fpm1542>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

April 21, 2025, 20:40:20



Весовая интегрируемость двойных рядов по мультипликативным системам*

С. С. ВОЛОСИВЕЦ

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Р. Н. ФАДЕЕВ

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: belal_templier@mail.ru

УДК 517.518.36

Ключевые слова: мультипликативная система, весовая L^p -интегрируемость, степенной вес, двойная обобщённо-монотонная последовательность.

Аннотация

Получены необходимые и достаточные условия L^p -интегрируемости со степенным весом функции f , представимой двойным рядом по мультипликативной системе с обобщённо-монотонными коэффициентами. Эти условия даны в терминах коэффициентов или их вторых смешанных разностей. Кроме того, изучается интегрируемость разностного отношения $(f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0))/(xy)$.

Abstract

S. S. Volosivets, R. N. Fadeev, Weighted integrability of double series with respect to multiplicative systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 69–87.

Necessary and sufficient conditions for L^p -integrability with power weight of a function f represented by the double series with respect to a multiplicative system with generalized monotone coefficients are obtained. These conditions are given in terms of the coefficients or their second mixed differences. In addition, the integrability of the difference quotient $(f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0))/(xy)$ is studied.

1. Введение

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $2 \leq p_n \leq N$. Определим $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad x_n \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_n). \quad (1)$$

*Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К). Работа первого автора поддержана РФФИ (проект № 13-01-00238).

Представление (1) является единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < k < m_l$, мы берём разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i).$$

Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right).$$

Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[0, 1)$ и полной в $L^1[0, 1)$. Подробнее её свойства рассматриваются в [6, § 1.5]. Измеримая на $[0, 1)$ функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{\alpha}^r[0, 1)$, $1 \leq r < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, если конечна норма

$$\|f\|_{r,\alpha} = \left(\int_0^1 |f(x)|^r x^{\alpha} dx\right)^{1/r}.$$

Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) =: D_n(x)$$

называется n -м ядром Дирихле. Для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \tag{2}$$

рассмотрим частичные суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

и максимальную функцию

$$M^*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)|.$$

Будем писать $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \text{GM}$, если

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad |a_0 - a_1| \leq C a_0. \tag{3}$$

Можно показать, что для $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \text{GM}$ при дополнительном условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < \infty$$

ряд (2) сходится при $x \neq 0$ (см. лемму 5). Класс GM, введённый С. Ю. Тихоновым [23], включает в себя класс последовательностей RBVS, введённый Л. Лейндлером [19] и определяемый неравенством

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Он содержит также класс QM квазимонотонных последовательностей, рассматривавшийся А. А. Конюшковым [7].

В одномерном случае

$$\Delta a_j = a_j - a_{j+1}, \quad \Delta^2 a_j = a_j - 2a_{j+1} + a_{j+2}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Для двойных последовательностей $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ положим при $j, k \geq 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{10} a_{jk} &= a_{jk} - a_{j+1,k}, & \Delta_{01} a_{jk} &= a_{jk} - a_{j,k+1}, \\ \Delta_{11} a_{jk} &= \Delta_{10}(\Delta_{01} a_{jk}), & \Delta_{22} a_{jk} &= \Delta_{11}(\Delta_{11} a_{jk}). \end{aligned}$$

Для ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \tag{4}$$

рассмотрим прямоугольные частные суммы

$$S_{mn}(x, y) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Ряд (4) определяет следующую максимальную функцию:

$$M^*(x, y) = \sup_{m, n \in \mathbb{N}} |S_{mn}(x, y)|. \tag{5}$$

Пусть $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ — неотрицательная последовательность, такая что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| < \infty$$

и

$$\lim_{j+k \rightarrow \infty} a_{jk} = 0.$$

В этом случае ряд (4) сходится по Прингсхейму на $(0, 1)^2$, т. е. $S_{mn}(x)$ сходятся при $\min(m, n) \rightarrow \infty$ (см. [22] в двоичном случае, т. е. при $p_i \equiv 2$). По аналогии с важным свойством одномерного класса GM, отражённым в лемме 2, следуя [14], будем писать $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \in \text{GM}^2$, если

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} a_{mn} = 0$$

и при $m, n \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| \leq C \beta_{mn}^* := C \left(a_{mn} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{a_{jn}}{j} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{mk}}{k} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{jk} \right). \tag{6}$$

Мы предполагаем, что ряды из правой части (6) сходятся и можно рассматривать сумму $f(x, y)$ ряда (4) при $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \in \text{GM}^2$. Будем писать $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^\infty \in \text{RBVS}^2$, если

$$\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| \leq C a_{lq}, \quad l, q \in \mathbb{Z}_+, \quad (7)$$

и $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^\infty \in \text{RBVS}^{(2)}$, если вдобавок к (7) имеем

$$\{a_{jk}\}_{j=0}^\infty \in \text{RBVS}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \{a_{jk}\}_{k=0}^\infty \in \text{RBVS}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Ясно что класс $\text{RBVS}^{(2)}$ содержит класс монотонных по Харди двойных последовательностей $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^\infty$, таких что $a_{jk} \geq 0$, $\Delta_{10} a_{jk} \geq 0$, $\Delta_{01} a_{jk} \geq 0$, $\Delta_{11} a_{jk} \geq 0$ для всех $j, k \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводится класс $\text{GM}^{(2)}$: $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \in \text{GM}^{(2)}$, если, кроме неравенства (6), выполнены включения

$$\{a_{jk}\}_{j=0}^\infty \in \text{GM}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \{a_{jk}\}_{k=0}^\infty \in \text{GM}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

причём постоянная в неравенствах вида (3) не зависит от $k \in \mathbb{Z}_+$ или $j \in \mathbb{Z}_+$ соответственно. В этом случае

$$\begin{aligned} a_{pq} &\geq C a_{mn}, \quad p \leq m \leq 2p, \quad q \leq n \leq 2q; \\ a_{pq} &\geq C a_{p+1,q}, \quad C a_{p,q+1} \geq C^2 a_{p+1,q+1}, \quad p, q, m, n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (8)$$

и C не зависит от p, q .

Пусть $1 \leq r < \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Через $L_{\alpha,\beta}^r[0,1]^2$ мы обозначим множество измеримых на $[0,1]^2$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{r,\alpha,\beta} = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|^r x^\alpha y^\beta dx dy \right)^{1/r}.$$

В силу неравенства Гёльдера $L_{\alpha,\beta}^r[0,1]^2 \subset L^1[0,1]^2$ при $\alpha, \beta < r-1$. По ряду (4) можно определить величину

$$S_{r,\alpha,\beta}(a) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|^r (j+1)^{r-2-\alpha} (k+1)^{r-2-\beta} \right)^{1/r}.$$

Ясно, что $S_{r,\alpha,\beta}(a)$ убывает, когда α или β возрастает. С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера $S_{r,\alpha,\beta}(a)$ почти возрастает, когда r возрастает, т. е.

$$S_{r,\alpha,\beta}(a) \leq C S_{q,\alpha,\beta}(a), \quad 0 < r < q < \infty.$$

Выражение $A(f) \asymp B(f)$ означает, что $C_1 A(f) \leq B(f) \leq C_2(f)$, где $C_1, C_2 > 0$ не зависят от f . Константы C, C_1, C_2, \dots разные в различных случаях.

Обзор ранних работ по проблеме L^r -интегрируемости со степенным весом суммы тригонометрического ряда можно найти в [12]. В случае рядов по синусам или косинусам с монотонными коэффициентами $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ и суммой $f(x)$

условие $f \in L^r_\alpha[0, 2\pi]$ равносильно сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha+r-2} a_n^r$ для подходящих r и α (см. [12, § 6]). В ряде работ (см., например, [15, 19, 23]) этот результат распространён на более общие классы $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Ф. Мориц [20] получил достаточное условие L^r -интегрируемости мажоранты $M^*(x)$ ряда по системе Уолша с монотонными коэффициентами и необходимое условие такой интегрируемости его суммы $f(x)$. Вместе эти условия дают критерий принадлежности $M^*(x)$ и $f(x)$ пространству $L^r_0[0, 1)$. Другие результаты типа теоремы Харди—Литтлвуда для рядов (2) с монотонными коэффициентами были приведены в [8] без доказательства. В [3] критерий $f \in L^r_\alpha[0, 1)$ получен для рядов (2) с коэффициентами классов RBVS и QM. В [24] даны оценки сверху наилучших приближений функций в L^r и пространстве Харди при некоторых условиях на разности коэффициентов Фурье—Виленкина, близких к тем, которые использовались в [11]. В [4] получены двусторонние одинаковые по порядку оценки L^r -нормы сумм ряда по косинусам с выпуклыми коэффициентами и ряда по синусам с монотонными коэффициентами, где $r \in (0, \infty)$.

Для случая двойных рядов Уолша (а также двойных рядов по косинусам и синусам) Ф. Мориц [21] установил аналоги своих одномерных результатов из [20].

Теорема А.

1. Пусть $p_j \equiv 2$, $r \geq 1$ и последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^\infty$ такова, что $a_{jk} \geq 0$, $\Delta_{10}a_{jk} \geq 0$, $\Delta_{01}a_{jk} \geq 0$, $\Delta_{11}a_{jk} \geq 0$ при всех $j, k \in \mathbb{Z}_+$, M^* определена по ряду (4). Тогда

$$\|M^*\|_r := \|M^*\|_{r,0,0} \leq C(r)S_{r,0,0}(a).$$

2. Пусть $p_j \equiv 2$, $r > 1$, последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^\infty$ удовлетворяет условиям первой части теоремы и, кроме того,

$$\lim_{j+k \rightarrow +\infty} a_{jk} = 0.$$

Если сумма f ряда (4) принадлежит $L^r[0, 1)^2$, $r > 1$, то

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{jk}^r (jk)^{r-2} \right)^{1/r} \leq C(r) \|f\|_r.$$

Позже в работах М. И. Дьяченко, Е. М. Нурсултанова и С. Ю. Тихонова появились другие многомерные варианты теоремы Харди—Литтлвуда о тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами. Отметим упоминавшуюся статью [14]. В [24] установлены оценки приближения углом функций в терминах коэффициентов Фурье по двойной мультипликативной системе. Из этих результатов вытекает оценка сверху L^r -нормы, $1 < r < \infty$, функции с рядом Фурье (4) и $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \in \text{RBVS}^{(2)}$ (см. [24, следствие 4]). Используя идеи из работы С. Ю. Тихонова [9], Н. А. Бокаев и Ж. Б. Муканов [2] получили оценки весовых L^r -норм сумм рядов (4) с коэффициентами из $\text{RBVS}^{(2)}$. Веса,

использовавшиеся ими, были более общими, чем степенные и удовлетворяли условиям Бари—Стечкина и Δ_2 -условию. Т. М. Вуколова и М. И. Дьяченко [5] вывели двусторонние одинаковые по порядку оценки L^r -норм функций с монотонными двойными коэффициентами представляющего их тригонометрического ряда. Для двойных рядов по косинусам и косинусам, синусам и синусам, косинусам и синусам использовались различные разности коэффициентов. Отметим результат для двойных рядов по косинусам и косинусам.

Теорема В. Пусть $0 < r < \infty$, последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ такова, что $\lim_{j+k \rightarrow +\infty} a_{jk} = 0$ и $\Delta_{22}a_{jk} \geq 0$ при всех $j, k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для

$$f(x, y) := \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \cos jx \cos ky,$$

имеем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy \asymp \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (j+1)^{2r-2} (k+1)^{2r-2} (\Delta_{11}a_{jk})^r.$$

В [13] исследовалась обычная L^r -интегрируемость и более общая ϕ -интегрируемость со степенным весом суммы $f_c(x, y)$ ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} (1 - \cos jx)(1 - \cos ky)$$

в случае $a_{jk} \geq 0$ при всех $j, k \in \mathbb{N}$ и была установлена следующая теорема.

Теорема С. Пусть $1 \leq r < \infty$ и $a_{jk} \geq 0$ при всех $j, k \in \mathbb{N}$. Тогда для $-r < \alpha, \beta < 0$ справедливо соотношение

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} f_c^r(x, y) dx dy \asymp \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\alpha-1} n^{-\beta-1} \left(\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{jk} \right)^r.$$

Целью настоящей работы является получение двусторонних оценок, аналогичных результатам теорем А (с распространением на весовой случай) и С, для ряда (4) с обобщённо-монотонными коэффициентами a_{jk} . Кроме того, в случае $\Delta_{22}a_{jk} \geq 0$ получена оценка сверху нормы $\|f\|_{r, \alpha, \beta}$, где f — сумма ряда (4), отличающаяся от аналогичного результата из теоремы В.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (см. [1, гл. 4, § 3; 6, гл. 1, § 1.5]).

1. Пусть $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. Тогда $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где X_E — характеристическая функция множества E .

2. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0, 1)$ имеет место неравенство $|D_n(x)| \leq N/x$, где $p_i \leq N$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Лемма 2 [23]. Если $\{a_n\}_{n=0}^\infty \in \text{GM}$, то справедливы неравенства

$$\sum_{j=k}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| \leq C \left(\sum_{j=k}^{n-1} \frac{a_j}{j} + a_k \right), \quad n \geq k+1, \quad n, k \in \mathbb{Z}_+;$$

$$a_n \leq C a_j, \quad j \leq n \leq 2j, \quad a_1 \leq C a_0.$$

Первый пункт леммы 3 представляет известное неравенство Харди—Литтлвуда [10, теорема 346], а второй содержит двумерное обобщение этого неравенства, данное Ф. Морицем [21].

Лемма 3.

1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $r > 1$, $a_n \geq 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p \leq C(p, r) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r} (n a_n)^p.$$

2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $r_1, r_2 > 1$ и $a_{jk} \geq 0$ при $j, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-r_1} n^{-r_2} \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \right)^p \leq C(r_1, r_2, p) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} j^{p-r_1} k^{p-r_2} a_{jk}^p.$$

Лемма 4.

1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $s < 1$, $a_n \geq 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i \right)^p \leq C(p, s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} (n a_n)^p.$$

2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $s_1, s_2 < 1$ и $a_{jk} \geq 0$ при $j, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-s_1} n^{-s_2} \left(\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{jk} \right)^p \leq C(s_1, s_2, p) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} j^{p-s_1} k^{p-s_2} a_{jk}^p.$$

3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $s < 1 < r$ и $a_{jk} \geq 0$ при $j, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-s} n^{-r} \left(\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_{jk} \right)^p \leq C(s, r, p) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} j^{p-s} k^{p-r} a_{jk}^p.$$

Доказательство. Утверждение 1 установлено Г. Харди и Дж. Литтлвудом (см. [10, теорема 346]). Для доказательства утверждения 2 рассмотрим

$$A_{jn} = n^{-s_2/p} \sum_{k=n}^{\infty} a_{jk}.$$

Тогда согласно пункту 1 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-s_1} n^{-s_2} \left(\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{jk} \right)^p &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-s_1} \left(\sum_{j=m}^{\infty} A_{jn} \right)^p \leq \\ &\leq C_1(p, s_1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m^{p-s_1} (A_{mn})^p = C_1(p, s_1) \sum_{m=1}^{\infty} m^{p-s_1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s_2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{mk} \right)^p \leq \\ &\leq C_2(p, s_1, s_2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{p-s_1} n^{p-s_2} a_{mn}^p. \end{aligned}$$

Пункт 3 доказывается аналогично пункту 2. Лемма доказана. \square

Аналогично работе [23] с помощью лемм 1 и 2 доказывается лемма 5.

Лемма 5. Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \text{GM}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/k < \infty$. Тогда ряд (2) сходится при $x \neq 0$.

Лемма 6.

1. Пусть $f \in L^1[0, a)$ ($f \in L^1_{\text{loc}}[0, a)$ при $a = +\infty$), $1 \leq p < \infty$, $f(x) \geq 0$ на $[0, a)$ и

$$F(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt, \quad x \in (0, a).$$

Тогда при $r < p - 1$ справедливо неравенство

$$\int_0^a x^r F^p(x) dx \leq \left(\frac{p}{r-1} \right)^p \int_0^a x^r f^p(x) dx.$$

2. Пусть $f \in L^1[0, a)^2$ ($f \in L^1_{\text{loc}}[0, a)^2$ при $a = +\infty$), $1 \leq p < \infty$, $f(x, y) \geq 0$ на $[0, a)^2$ и

$$F(x, y) = x^{-1} y^{-1} \int_0^x \int_0^y f(u, v) du dv, \quad x, y \in (0, a).$$

Тогда при $r_1, r_2 < p - 1$ справедливо неравенство

$$\int_0^a \int_0^a x^{r_1} y^{r_2} F^p(x, y) dx dy \leq C(p, r_1, r_2) \int_0^a x^{r_1} y^{r_2} (f(x, y))^p dx.$$

Неравенство пункта 1 установил Г. Харди [10, теорема 330], неравенство пункта 2 приведено в [21], где указано, что его доказательство принадлежит А. Торчинскому.

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется квазиубывающей, если $a_n \geq C a_{n+j}$ при $1 \leq j \leq n$. Лемма 7 доказана Л. Лейндлером в [18, теорема 1] и [17].

Лемма 7.

1. Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ квазиубывает и последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ неотрицательна, то имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-1} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p, \quad p > 1.$$

2. Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ неотрицательна и последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ положительна, $p \geq 1$, то имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^p a_n^p.$$

Лемму 8, доказанную первым из авторов, можно найти в [16].

Лемма 8. Пусть

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{D_k(x)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для $x \in (0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|nF_n(x)| \leq Cx^{-2}.$$

3. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $-1 < \alpha, \beta < r - 1$, $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^\infty \in \text{GM}^{(2)}$, $r \in [1, \infty)$ и $S_{r,\alpha,\beta}(a) < \infty$. Тогда функция M^* , определяемая равенством (5), содержится в $L_{\alpha,\beta}^r[0, 1]^2$ и при этом $\|M^*\|_{r,\alpha,\beta} \leq CS_{r,\alpha,\beta}(a)$.

Доказательство. Для заданных $x, y \in (0, 1)$ находим $p, q \in \mathbb{N}$ из неравенств $1/(p+1) < x \leq 1/p$, $1/(q+1) < y \leq 1/q$. Тогда

$$\begin{aligned} |S_{mn}(x)| &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} + \sum_{k=0}^{q-1} \left| \sum_{j=p}^{m-1} a_{jk} \chi_j(x) \right| + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-1} \left| \sum_{k=q}^{n-1} a_{jk} \chi_k(y) \right| + \left| \sum_{j=p}^{m-1} \sum_{k=q}^{n-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Используя преобразование Абеля и лемму 2, получаем оценки

$$I_2 \leq C_1 \sum_{k=0}^{q-1} p \left(\sum_{j=p}^{m-1} \frac{a_{jk}}{j} + a_{pk} \right), \quad I_3 \leq C_2 \sum_{j=0}^{p-1} q \left(\sum_{k=q}^{n-1} \frac{a_{jk}}{k} + a_{jq} \right).$$

Применяя дважды преобразование Абеля, находим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{j=p}^{m-1} \sum_{k=q}^{n-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) &= \sum_{j=p}^{m-2} \sum_{k=q}^{n-2} \Delta_{11} a_{jk} D_{j+1}(x) D_{k+1}(y) + \\
&+ \sum_{j=p}^{m-2} \Delta_{10} a_{j,n-1} D_{j+1}(x) D_n(y) + \sum_{k=q}^{n-2} \Delta_{01} a_{m-1,k} D_m(x) D_{k+1}(y) - \\
&- \sum_{j=p}^{m-2} \Delta_{10} a_{j,q} D_{j+1}(x) D_q(y) - \sum_{k=q}^{n-2} \Delta_{01} a_{p,k} D_p(x) D_{k+1}(y) + \\
&+ a_{m-1,n-1} D_m(x) D_n(y) - a_{p,n-1} D_p(x) D_n(y) - \\
&- a_{m-1,q} D_m(x) D_q(y) + a_{pq} D_p(x) D_q(y).
\end{aligned}$$

С учётом равенств

$$\Delta_{10} a_{jk} = \sum_{l=k}^{\infty} \Delta_{11} a_{jl}, \quad a_{jk} = \sum_{i=j}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \Delta_{11} a_{il}$$

и им подобных отсюда выводим, что

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=p}^{m-1} \sum_{k=q}^{n-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right| &\leq \frac{N^2}{x} y \left(\sum_{j=p}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| + \right. \\
&+ \sum_{j=p}^{m-2} |\Delta_{10} a_{j,n-1}| + \sum_{k=q}^{n-2} |\Delta_{01} a_{m-1,k}| + \sum_{j=p}^{m-2} |\Delta_{10} a_{j,q}| + \\
&+ \left. \sum_{k=q}^{n-2} |\Delta_{01} a_{p,k}| + a_{m-1,n-1} + a_{p,n-1} + a_{m-1,q} + a_{p,q} \right) \\
&\leq C_3 N^2 (xy)^{-1} \sum_{j=p}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}|.
\end{aligned}$$

Поэтому для $(x, y) \in (1/(p+1), 1/p] \times (1/(q+1), 1/q]$ находим, что

$$\begin{aligned}
M^*(x, y) &\leq C_4 \left(\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} + p \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=p}^{\infty} \frac{a_{jk}}{j} + q \sum_{k=q}^{\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_{jk}}{k} + \right. \\
&+ \left. pq \left(a_{pq} + \sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{a_{jq}}{j} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{a_{pk}}{k} + \sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{jk} \right) \right).
\end{aligned}$$

Применяя леммы 3 и 4, получаем, что

$$\int_0^1 \int_0^1 (M^*(x, y))^r x^\alpha y^\beta dx dy = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/(p+1)}^{1/p} \int_{1/(q+1)}^{1/q} (M^*(x, y))^r x^\alpha y^\beta dx dy \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C_5 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{-\alpha-2} q^{-\beta-2} \times \\
 &\times \left[\left(\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} \right) + \left(p \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=p}^{\infty} \frac{a_{jk}}{j} \right)^r + \left(q \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=q}^{\infty} \frac{a_{jk}}{k} \right)^r + (pq\beta_{pq}^*)^r \right] \leq \\
 &\leq C_6 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{r-\alpha-2} q^{r-\beta-2} a_{p-1, q-1}^r. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Например, по первому утверждению леммы 4 при $r - \alpha - 2 > -1$ имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{-\alpha-2} q^{-\beta-2} \left(pq \sum_{j=p}^{\infty} \frac{a_{jq}}{j} \right)^r \leq C_7 \sum_{q=1}^{\infty} q^{r-\beta-2} p^{r-\alpha-2} \left(\frac{pa_{pq}}{p} \right)^r,$$

а по третьему утверждению леммы 4 ввиду условий $r - \alpha - 2 > -1$ и $\beta + 2 > 1$ получаем, что

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{-\alpha-2} q^{-\beta-2} \left(p \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=p}^{\infty} \frac{a_{jk}}{j} \right)^r &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{r-\alpha-2} q^{-\beta-2} \left(\sum_{k=1}^q \sum_{j=p}^{\infty} \frac{a_{j,k-1}}{j} \right)^r \\
 &\leq C_8 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{r-\alpha-2} q^{r-\beta-2} a_{p, q-1}^r \leq C_9 S_{r, \alpha, \beta}(a).
 \end{aligned}$$

Аналогично оцениваются другие слагаемые из средней части неравенства (9), из которого следует результат теоремы. \square

Теорема 2. Пусть $r \in (1, \infty)$, $\alpha, \beta < r - 1$, последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ неотрицательна, удовлетворяет условию (8) и

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{11} a_{j,k}| < \infty, \quad \lim_{j+k \rightarrow \infty} a_{jk} = 0.$$

Если $f(x, y)$ — сумма ряда (4) и $f \in L_{\alpha, \beta}^r[0, 1]^2$, то $S_{r, \alpha, \beta}(a) \leq C \|f\|_{r, \alpha, \beta}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(u, v) du dv.$$

Ввиду ортонормированности системы $\{\chi_j(x)\chi_k(y)\}_{j,k=0}^{\infty}$, леммы 1 и (8) при $l, q \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_q}\right) &= \int_0^{1/m_l} \int_0^{1/m_q} f(x, y) dx dy = m_l^{-1} m_q^{-1} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) D_{m_l}(x) D_{m_q}(y) dx dy = \\
 &= m_l^{-1} m_q^{-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \sum_{k=0}^{m_q-1} a_{jk} \geq m_l^{-1} m_q^{-1} \sum_{j=m_l-1}^{m_l-1} \sum_{k=m_q-1}^{m_q-1} a_{jk} \geq C_1 a_{m_l, m_q}.
 \end{aligned}$$

При $l = q = 1$ аналогично выводим, что

$$F\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_1}\right) \geq m_1^{-1} m_1^{-1} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 a_{jk} \geq \frac{a_{00}}{N^2},$$

при $l = 1, q \geq 2$ верно

$$F\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_q}\right) \geq N^{-1} m_q^{-1} \sum_{k=m_{q-1}}^{m_q-1} a_{0k},$$

и при $l \geq 2, q = 1$ верно

$$F\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_1}\right) \geq N^{-1} m_l^{-1} \sum_{k=m_{l-1}}^{m_l-1} a_{j0}.$$

Снова применяя неравенства (8) и неравенства, полученные выше, мы видим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (j+1)^{r-2-\alpha} (k+1)^{r-2-\beta} a_{jk}^r = a_{00}^r + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1} (j+1)^{r-\alpha-2} a_{j,0}^r + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=m_{q-1}}^{m_q-1} (k+1)^{r-\beta-2} a_{0,k}^r + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1} \sum_{k=m_{q-1}}^{m_q-1} (j+1)^{r-\alpha-2} (k+1)^{r-\beta-2} a_{jk}^r \leq \\ & \leq C_1 \left(F^r\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_1}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{r-1-\alpha} F^r\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_1}\right) + \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^{\infty} m_q^{r-1-\beta} F^r\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_q}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m_l^{r-1-\alpha} m_q^{r-1-\beta} F^r\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_q}\right) \right). \end{aligned}$$

Так как

$$F(x, y) \leq G(x, y) = \int_0^x \int_0^y |f(u, v)| du dv,$$

то по лемме 6 при $\alpha, \beta < r - 1$ получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (j+1)^{r-2-\alpha} (k+1)^{r-2-\beta} a_{jk}^r \\ & \leq C_2 \left(G^r\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_1}\right) m_1^{2r-\alpha-\beta-2} + \sum_{l=1}^{\infty} G^r\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_1}\right) m_l^{r-\alpha-1} m_1^{r-\beta-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + C_2 \left(\sum_{q=1}^{\infty} G^r \left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_q} \right) m_1^{r-\alpha-1} m_q^{r-\beta-1} + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} G^r \left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_q} \right) m_l^{r-\alpha-1} m_q^{r-\beta-1} \right) \\
 & \leq C_3 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/m_l}^{1/m_{l-1}} \int_{1/m_q}^{1/m_{q-1}} (x^{-1} y^{-1} G(x, y))^r x^\alpha y^\beta dx dy \leq \\
 & \leq C_4 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)|^r x^\alpha y^\beta dx dy.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Используя дважды преобразование Абеля и леммы 1, 8, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| < \infty, \quad \lim_{j+k \rightarrow \infty} a_{jk} = 0$$

и $f(x, y)$ — сумма ряда (4). Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{22} a_{jk}| < \infty$$

и

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{22} a_{jk} (j+1) F_{j+1}(x) (k+1) F_{k+1}(y), \quad (x, y) \in (0, 1)^2.$$

Теорема 3. Пусть $r \in (1, \infty)$, последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ такова, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| < \infty, \quad \lim_{j+k \rightarrow \infty} a_{jk} = 0$$

и

$$Q_{r,\alpha,\beta}(a) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (j+1)^{3r-2-\alpha} (k+1)^{3r-2-\beta} |\Delta_{22} a_{jk}|^r \right)^{1/r} < \infty.$$

Тогда сумма f ряда (4) принадлежит $L_{\alpha,\beta}^r[0, 1]^2$ и $\|f\|_{r,\alpha,\beta} \leq C Q_{r,\alpha,\beta}(a)$.

Доказательство. Пусть $F_{j,k}(x, y) = (j+1)F_{j+1}(x)(k+1)F_{k+1}(y)$. По предложению 1 можно записать

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{22} a_{jk} F_{j,k}(x, y), \quad (x, y) \in (0, 1)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|f\|_{r,\alpha,\beta}^r &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \int_{1/(q+1)}^{1/q} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{22} a_{jk} F_{j,k}(x,y) \right|^r x^\alpha y^\beta dx dy \leq \\
&\leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \int_{1/(q+1)}^{1/q} \left| \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{q-1} \Delta_{22} a_{jk} F_{j,k}(x,y) \right|^r x^\alpha y^\beta dx dy + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \int_{1/(q+1)}^{1/q} \left| \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=0}^{q-1} \Delta_{22} a_{jk} F_{j,k}(x,y) \right|^r x^\alpha y^\beta dx dy + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \int_{1/(q+1)}^{1/q} \left| \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=q}^{\infty} \Delta_{22} a_{jk} F_{j,k}(x,y) \right|^r x^\alpha y^\beta dx dy + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \int_{1/(q+1)}^{1/q} \left| \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} \Delta_{22} a_{jk} F_{j,k}(x,y) \right|^r x^\alpha y^\beta dx dy = \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Так как $|D_n(x)| \leq n$, $x \in [0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, то легко убедиться, что

$$|nF_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n k \leq n^2.$$

В результате по лемме 8 и второму утверждению леммы 3 имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C_1 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{-2-\alpha} q^{-2-\beta} \left(\sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{q-1} |\Delta_{22} a_{jk}| (j+1)^2 (k+1)^2 \right)^r \leq \\
&\leq C_2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{-2-\alpha} q^{-2-\beta} (l^3 q^3 |\Delta_{22} a_{l-1,q-1}|)^r = C_2 Q_{r,\alpha,\beta}^r(a).
\end{aligned}$$

Применяя третье утверждение леммы 4, лемму 8 и оценку $|nF_n(x)| \leq n^2$, находим, что

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C_3 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \int_{1/(q+1)}^{1/q} \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=0}^{q-1} |\Delta_{22} a_{jk}| x^{-2} (k+1)^2 \right)^r l^{-\alpha} q^{-\beta} dx dy \leq \\
&\leq C_4 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{-\alpha} q^{-2-\beta} \int_{1/(l+1)}^{1/l} x^{-2r} dx \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=1}^q |\Delta_{22} a_{j,k-1}| k^2 \right)^r \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_5 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{2r-2-\alpha} q^{-2-\beta} \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=1}^q |\Delta_{22} a_{j,k-1}| k^2 \right)^r \leq \\ &\leq C_6 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{3r-2-\alpha} q^{3r-2-\beta} |\Delta_{22} a_{l,q-1}|^r \leq C_7 Q_{r,\alpha,\beta}^r(a). \end{aligned}$$

Ясно, что аналогичная оценка верна для I_3 . Наконец, для I_4 используем лемму 8 и второе утверждение леммы 4 и получаем

$$\begin{aligned} I_4 &\leq C_8 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \int_{1/(q+1)}^{1/q} \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{22} a_{jk}| x^{-2} y^{-2} \right)^r l^{-\alpha} q^{-\beta} dx dy \leq \\ &\leq C_9 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{2r-2-\alpha} q^{2r-2-\beta} \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{22} a_{jk}| \right)^r \leq \\ &\leq C_{10} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{3r-2-\alpha} q^{3r-2-\beta} |\Delta_{22} a_{lq}|^r \leq C_{11} Q_{r,\alpha,\beta}^r(a) < \infty. \end{aligned}$$

Объединяя полученные результаты, находим, что $\|f\|_{r,\alpha,\beta} \leq C_{12} Q_{r,\alpha,\beta}(a)$. Теорема доказана. \square

Теорема 4. Пусть $r \in (1, \infty)$, $\alpha, \beta < -1$, последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ неотрицательна, удовлетворяет условию (8) и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} < \infty.$$

Если $f_d(x, y)$ — сумма ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} (1 - \chi_j(x)) (1 - \chi_k(y)),$$

то

$$\|f_d\|_{r,\alpha,\beta} \asymp \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{-\alpha-2} q^{-\beta-2} \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} a_{jk} \right)^r \right)^{1/r}.$$

Доказательство. Пусть $x \in [1/m_l, 1/m_{l-1})$, $y \in [1/m_q, 1/m_{q-1})$, $l, q \in \mathbb{N}$. Тогда по определению χ_n

$$|f_d(x, y)| = \left| \sum_{j=m_{l-1}}^{\infty} \sum_{k=m_{q-1}}^{\infty} a_{jk} (1 - \chi_j(x)) (1 - \chi_k(y)) \right| \leq 4 \sum_{j=m_{l-1}}^{\infty} \sum_{k=m_{q-1}}^{\infty} a_{jk},$$

поэтому

$$\int_0^1 \int_0^1 |f_d(x, y)|^r x^\alpha y^\beta dx dy = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/m_l}^{1/m_{l-1}} \int_{1/m_q}^{1/m_{q-1}} |f_d(x, y)|^r x^\alpha y^\beta dx dy \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha} m_q^{-\beta} (m_{l-1}^{-1} - m_l^{-1}) (m_{q-1}^{-1} - m_q^{-1}) \left(4 \sum_{j=m_{l-1}}^{\infty} \sum_{k=m_{q-1}}^{\infty} a_{jk} \right)^r \leq \\
&\leq C_1 \left(m_1^{-\alpha-1} m_1^{-\beta-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \right)^r + \right. \\
&+ \sum_{q=2}^{\infty} m_1^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} \sum_{k=m_{q-2}}^{m_{q-1}-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} a_{ji} \right)^r (m_{q-1} - m_{q-2})^{-1} + \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_1^{-\beta-1} \sum_{j=m_{l-2}}^{m_{l-1}-1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \right)^r (m_{l-1} - m_{l-2})^{-1} + \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{q=2}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} \sum_{j=m_{l-2}}^{m_{l-1}-1} \sum_{k=m_{q-2}}^{m_{q-1}-1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} a_{is} \right)^r m_{l-2}^{-1} m_{q-2}^{-1} \leq \\
&\leq C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} j^{-\alpha-2} k^{-\beta-2} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} a_{is} \right)^r.
\end{aligned}$$

С другой стороны, при $x \in [1/m_l, 1/m_{l-1})$, $y \in [1/m_q, 1/m_{q-1})$ и $j \in [m_{l-1}, 2m_{l-1})$, $k \in [m_{q-1}, 2m_{q-1})$ верно равенство

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{Im} \left((1 - \chi_j(x))(1 - \chi_k(y)) \right) = \\
&= \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x_l}{p_l} \right) \right) \sin \left(\frac{2\pi y_q}{p_q} \right) + \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi y_q}{p_q} \right) \right) \sin \left(\frac{2\pi x_l}{p_l} \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

При $p_l, p_q \geq 3$ мы видим, что левая часть (10) не меньше $4 \sin^2(\pi/N) \sin(2\pi/N)$, где $2 \leq p_i \leq N$, $i \in \mathbb{N}$. При $p_l = 2$ или $p_q = 2$ имеем $1 - \chi_j(x) = 2$ или $1 - \chi_k(x) = 2$ соответственно, и

$$\operatorname{Re} \left((1 - \chi_j(x))(1 - \chi_k(y)) \right) \geq 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{N} \right),$$

если ровно одно из равенств $p_l = 2$ или $p_q = 2$ имеет место. Если же $p_l = p_q = 2$, то $(1 - \chi_j(x))(1 - \chi_k(y)) = 4$. В итоге мы получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 |f_d(x, y)|^r x^\alpha y^\beta dx dy \geq \\
&\geq C_3 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{1/m_l}^{1/m_{l-1}} \int_{1/m_q}^{1/m_{q-1}} \left(\sum_{j=m_{l-1}}^{2m_{l-1}-1} \sum_{k=m_{q-1}}^{2m_{q-1}-1} a_{jk} \right)^r m_l^{-\alpha} m_q^{-\beta} dx dy \geq \\
&\geq C_4 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} \left(\sum_{j=m_{l-1}}^{2m_{l-1}-1} \sum_{k=m_{q-1}}^{2m_{q-1}-1} a_{jk} \right)^r. \quad (11)
\end{aligned}$$

Согласно (8)

$$\sum_{j=m_{l-1}}^{2m_{l-1}-1} \sum_{k=m_{q-1}}^{2m_{q-1}-1} a_{jk} \geq C_5 \sum_{j=m_{l-1}}^{m_{l-1}-1} \sum_{k=m_{q-1}}^{m_{q-1}-1} a_{jk} =: b_{l,q}. \quad (12)$$

Пусть

$$B_{lq} = \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} b_{jk}.$$

Тогда, применяя дважды второе утверждение леммы 7, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} B_{lq}^r &\leq \\ &\leq r^r \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-(\alpha+1)(1-r)} \left(\sum_{i=1}^l m_i^{-\alpha-1} \right)^r m_q^{-(\beta+1)} \left(\sum_{k=q}^{\infty} b_{lk} \right)^r \leq \\ &\leq C_6 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} b_{lq}^r. \end{aligned} \quad (13)$$

Наконец, аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 2, показывается, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} B_{lq}^r \geq C_7 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} j^{-\alpha-2} k^{-\beta-2} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} a_{is} \right)^r. \quad (14)$$

Из неравенств (11)–(14) вытекает оценка снизу $\|f_d\|_{r,\alpha,\beta}^r$. Теорема доказана. \square

Следствие. Если $r, \{a_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ те же, что в теореме 4, $\alpha, \beta < r - 1$, $f(x, y)$ — сумма ряда (4), то $R(x, y) := (f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0))/(xy)$ принадлежит $L_{\alpha,\beta}^r[0, 1)^2$ в том и только в том случае, когда

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l^{r-\alpha-2} q^{r-\beta-2} \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} a_{jk} \right)^r < \infty.$$

4. Одномерные аналоги двумерных результатов

В этом разделе представлены одномерные аналоги теорем 1–4. Их доказательства могут быть проведены по аналогии с доказательствами из предыдущего раздела с использованием первых частей лемм 3, 4 и 6.

Теорема 1'. Пусть $-1 < \alpha < r - 1$, $r \geq 1$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \text{GM}$ и

$$S_{r,\alpha}(a) := \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^r (j+1)^{r-2-\alpha} \right)^{1/r} < \infty.$$

Тогда

$$M^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi_j(x) \right|$$

принадлежит $L_\alpha^r[0, 1)$ и при этом $\|M^*\|_{r, \alpha} \leq CS_{r, \alpha}(a)$.

Теорема 2'. Пусть $-1 < \alpha < r - 1$, $r > 1$, $\{a_k\}_{k=0}^\infty \in \text{GM}$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < \infty.$$

Если сумма $f(x)$ ряда (2) принадлежит $L_\alpha^r[0, 1)$, то $S_{r, \alpha}(a) \leq C\|f\|_{r, \alpha} < \infty$.

Теорема 3'. Пусть $-1 < \alpha < 2r - 1$, $r \geq 1$, $\Delta^2 a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$ и

$$Q_{r, \alpha}(a) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{3r-2-\alpha} (\Delta^2 a_i)^r \right)^{1/r} < \infty.$$

Тогда сумма $f(x)$ ряда (2) принадлежит $L_\alpha^r[0, 1)$ и $\|f\|_{r, \alpha} \leq CQ_{r, \alpha}(a)$.

Теорема 4'. Пусть $a_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$, $\alpha < -1$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$ и $f_d(x)$ равна сумме ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i (1 - \chi_i(x))$. Тогда

$$\|f_d\|_{r, \alpha} \asymp \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha-2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^r \right)^{1/r}.$$

Замечание. Теоремы 1' и 2' обобщают результаты из [11], теорема 4' является мультипликативным аналогом теоремы 6.7 из [7]. Теорема 3' близка по своему содержанию к оценке сверху в теореме из [14], однако в [14] оценка для ряда по косинусам получена в терминах первых разностей выпуклых коэффициентов.

Литература

- [1] Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. — Баку: Элм, 1981.
- [2] Бокаев Н. А., Муканов Ж. Б. Весовая интегрируемость двойных тригонометрических рядов и двойных рядов по мультипликативным системам с коэффициентами класса $R_0^+ BVS^2$ // Мат. заметки. — 2012. — Т. 91, № 4. — С. 617–620.
- [3] Волосивец С. С. О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // Anal. Math. — 2007. — Vol. 33, no. 3. — P. 227–246.
- [4] Вуколова Т. М., Дьяченко М. И. О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика, механика. — 1994. — № 3. — С. 22–31.

- [5] Вуколова Т. М., Дьяченко М. И. Оценки норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1994. — № 7. — С. 20—28.
- [6] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. — М.: Наука, 1987.
- [7] Конюшков А. А. Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. — 1958. — Т. 44, № 1. — С. 53—84.
- [8] Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И. О вложении классов функций, определённых на нуль-мерных группах // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1980. — № 6. — С. 66—76.
- [9] Тихонов С. Ю. Об интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, № 3. — С. 476—480.
- [10] Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. — М.: Изд. иностр. лит., 1948.
- [11] Askey R., Wainger S. Integrability theorems for Fourier series // Duke Math. J. — 1966. — Vol. 33, no. 2. — P. 223—228.
- [12] Boas R. P. Integrability Theorems for Trigonometric Transforms. — Berlin: Springer, 1967.
- [13] Chen C. P., Chen M. C. Weighted integrability of double cosine series with nonnegative coefficients // Stud. Math. — 2003. — Vol. 156, no. 3. — P. 133—141.
- [14] Dyachenko M., Tikhonov S. A Hardy—Littlewood theorem for multiple series // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 339, no. 1. — P. 303—310.
- [15] Dyachenko M., Tikhonov S. Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. — 2009. — Vol. 193, no. 3. — P. 285—306.
- [16] Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier—Vilenkin series in Hölder and L^p norm // East J. Approx. — 2009. — Vol. 15, no. 2. — P. 143—158.
- [17] Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1970. — Vol. 31, no. 1-2. — P. 279—285.
- [18] Leindler L. Inequalities of Hardy—Littlewood type // Anal. Math. — 1976. — Vol. 2, no. 2. — P. 117—123.
- [19] Leindler L. A new class of numerical sequences and its application to sine and cosine series // Anal. Math. — 2002. — Vol. 28, no. 4. — P. 279—286.
- [20] Moricz F. On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero // Acta Math. Hungar. — 1983. — Vol. 38, no. 1-4. — P. 183—189.
- [21] Moricz F. On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Am. Math. Soc. — 1990. — Vol. 109, no. 2. — P. 417—425.
- [22] Moricz F., Schipp F., Wade W. R. On the integrability of double Walsh series with special coefficients // Michigan Math. J. — 1990. — Vol. 37, no. 2. — P. 191—201.
- [23] Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 326, no. 1. — P. 721—735.
- [24] Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems // Anal. Math. — 2011. — Vol. 37, no. 3. — P. 215—238.

