А. Н. Канатников, А. П. Крищенко, Симметрии и декомпозиция нелинейных систем,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 1880–1891

https://www.mathnet.ru/de8485

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.977

А. Н. КАНАТНИКОВ, А. П. КРИЩЕНКО

СИММЕТРИИ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Введение. Рассмотрим нелинейную управляемую динамическую систему (УДС)

$$\dot{x}=f(t, x, u), \tag{1}$$

где $x\in\mathbf{R}^n$ — состояние системы, $u\in\mathbf{R}^m$ — управление, $f:\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ — гладкая (класса C^∞) функция, $\dot{x}\equiv dx/dt$. Под решением этой системы будем понимать любую пару функций $(x(t), u(t))$ класса C^∞, заданных на некотором интервале $T\subset\mathbf{R}^1$, подстановка которой в (1) дает тождество на T. Система (1) может интерпретироваться как «недоопределенная» система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой недостает m уравнений вида $\dot{u}=g(t, x, u)$. Данная точка зрения позволяет изучать систему (1) в рамках геометрической теории [1—2] и группового анализа [3—5] дифференциальных уравнений. В этом случае УДС (1) можно рассматривать как подмногообразие в многообразии 1-струй (1-джетов) $J^1(\pi)$ гладкого N-мерного векторного расслоения $\pi:E\to\mathbf{R}^1$, $N=n+m$, коразмерность которого меньше N. На многообразии $J^1(\pi)$ имеется распределение Картана и преобразования $J^1(\pi)$, сохраняющие это распределение, называются преобразованиями Ли [1]. Преобразования Ли, сохраняющие УДС (1) (т. е. переводящие указанное выше подмногообразие в $J^1(\pi)$ в себя), называются симметриями УДС. В терминологии [1] — это классические внешние симметрии. Их частными случаями являются симметрии, изучавшиеся ранее в [5—9]. Использование симметрий позволяет продвинуться в решении ряда задач, типичных для вопросов управляемости, декомпозируемости и др.

Геометрическая интерпретация УДС. Введем на многообразии $J^1(\pi)$ локальные координаты $(t, x, u, p, q)=(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m)$, в которых p соответствует $\dot{x}(t)$, а q — $\dot{u}(t)$. Тогда УДС (1) запишется как система уравнений $p=f(t, x, u)$, где $f=(f_1, \dots, f_n)^{\mathrm{T}}$, и потому представляет собой подмногообразие $\Phi=\{(t, x, p, q)\in J^1(\pi):\tilde{f}(t, x, u, p, q)=0\}$ в $J^1(\pi)$ коразмерности n, где $\tilde{f}(t, x, u, p, q)=f(t, x, u)-p$. Каждое сечение $(x(t), u(t))$, $t\in T\subset\mathbf{R}^1$, имеет свое продолжение — кривую l_{xu} в $J^1(\pi)$ вида $t\to(t, x(t), u(t), \dot{x}(t), \dot{u}(t))$. Сечение $(x(t), u(t))$ является решением УДС (1) в том и только в том случае, когда $l_{xu}\subset\Phi$.

Распределение Картана на $J^1(\pi)$ в выбранных локальных координатах определяется системой 1-форм

$$\omega_i=dx_i-p_i dt,\ i=1, 2, \dots, n,\ \tau_j=du_j-q_j dt,\ j=1, 2, \dots, m.$$

Кривые l_{xu}, полученные продолжением сечений $(x(t), u(t))$, являются интегральными кривыми распределения Картана. Известно, что локально максимальное одномерное интегральное подмногообразие распределения Картана (за исключением особых точек проекции $\pi_1:J^1(\pi)\to\mathbf{R}^1$) локально имеет вид продолженных кривых l_{xu}. Эти подмногообразия называются R-многообразиями [1]. R-многообразия, содержащиеся в Φ, будем называть обобщенными решениями УДС (1). Преобразования Ли пространства $J^1(\pi)$ как сохраняющие распределение Картана переводят R-многообразия в R-многообразия. Если преобразование Ли переводит многообразие Φ в себя (и, следовательно, каждое обобщенное решение переходит снова в обобщенное решение), то оно называется (классической внешней) симметрией УДС (1). Поскольку $N=n+m>1$, то любое преобразование Ли является продолжением некоторого преобразования многообразия $J^0(\pi)=E$ [1—4].

Изложенное выше переносится на однопараметрические группы преобразований Ли, которым соответствуют их инфинитезимальные образующие — векторные поля, называемые полями Ли. В рассматриваемом случае, так как преобразования Ли поднимаются с многообразия E, векторные поля Ли также являются поднятием векторных полей, заданных на E. Именно если векторное поле на E в координатах (t, x, u) задается формулой

$$X=\xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u_j}, \tag{2}$$

то его поднятием $X^{(1)}$ на $J^1(\pi)$ будет поле [1—4]

$$X^{(1)}=X+\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(t, x, u, p, q)\frac{\partial}{\partial p_i}+\sum_{j=1}^{m}\psi_j(t, x, u, p, q)\frac{\partial}{\partial q_j}, \tag{3}$$

где $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)^{\mathrm{T}}$ и $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_m)^{\mathrm{T}}$ находятся по формулам

$$\zeta=D\eta-pD\xi, \quad \psi=D\varphi-qD\xi, \tag{4}$$

причем $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$, $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^{\mathrm{T}}$, $D=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}q_j\frac{\partial}{\partial u_j}$ — оператор полной производной по независимой переменной t.

Если поле Ли (3) касается подмногообразия Φ, то соответствующая локальная однопараметрическая группа преобразований Ли переводит Φ в себя. В этом случае поле (3) называется инфинитезимальной (классической внешней) симметрией УДС (1). Необходимым и достаточным условием того, что поле (3) касается Φ, является соотношение

$$X^{(1)}(\tilde{f}_i)\,|_{\Phi}=0, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)^{\mathrm{T}}=\tilde{f}$.

Определяющие уравнения для симметрий УДС. Условие (5) с учетом (2)—(4) в координатной форме преобразуется к виду

$$\xi(t, x, u)\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\eta(t, x, u)+\frac{\partial f}{\partial u}\varphi(t, x, u)-\frac{\partial \eta}{\partial t}-$$
$$-\frac{\partial \eta}{\partial x}f-\frac{\partial \eta}{\partial u}q+f\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial \xi}{\partial x}f+\frac{\partial \xi}{\partial u}q\right)=0 \tag{6}$$

и должно выполняться при любых (t, x, u, q). Система (6) является линейной по q и потому распадается на две:

$$\xi(t, x, u)\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\eta(t, x, u)+\frac{\partial f}{\partial u}\varphi(t, x, u)-$$
$$-\frac{\partial \eta}{\partial t}-\frac{\partial \eta}{\partial x}f+f\frac{\partial \xi}{\partial t}+f\frac{\partial \xi}{\partial x}f=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u}-f\frac{\partial \xi}{\partial u}=0. \tag{8}$$

Полученные уравнения (7), (8) будем называть определяющими уравнениями для инфинитезимальных симметрий УДС (1) (см. также [5, с. 188]).

Анализ системы (8). Система (8) означает, что для каждой функции η_i, $i=1, 2, \dots, n$, выполняется равенство $d_u\eta_i = f_i d_u\xi$, где d_u — дифференциал, взятый по переменным u при постоянных t и x. Следовательно, 1-форма $f_i d_u\xi$ является полным дифференциалом, что равносильно выполнению условий

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_k}\frac{\partial \xi}{\partial u_l} = \frac{\partial f_i}{\partial u_l}\frac{\partial \xi}{\partial u_k}, \quad k, l = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

Рассмотрим векторные поля $X_{kl} = \dfrac{\partial \xi}{\partial u_l}\dfrac{\partial}{\partial u_k} - \dfrac{\partial \xi}{\partial u_k}\dfrac{\partial}{\partial u_l}$. Тогда (9) означает, что $X_{kl}(f_i) = 0$ для всех комбинаций индексов. Семейство этих полей порождает распределение $\mathscr{X}(t, x, u)$ на E.

Теорема 1. *Если $d_u\xi(t_0, x_0, u_0) \neq 0$, то существует окрестность $O(M_0)$ точки $M_0(t_0, x_0, u_0)$ такая, что:*

a) $\dim \mathscr{X}$ постоянна в $O(M_0)$ и равна $m-1$;

b) распределение $\mathscr{X}$ инволютивно в $O(M_0)$.

Доказательство. Выберем такой индекс l, что $\dfrac{\partial \xi}{\partial u_l}(t_0, x_0, u_0) \neq 0$. Тогда это условие выполняется в некоторой окрестности $O(M_0)$ точки M_0 и из него следует, что векторные поля X_{kl}, $k=1, \dots, m$, $k \neq l$, линейно независимы в каждой точке окрестности $O(M_0)$. Поэтому в любой точке из $O(M_0)$ $\dim \mathscr{X} \geqslant m-1$.

С другой стороны, распределение $\mathscr{X}$ имеет не менее $n+2$ функционально независимых интеграла: функции x_i, $i=1, \dots, n$, функция t и функция ξ. Поэтому размерность этого распределения не может быть более $(n+m+1)-(n+2) = m-1$. Следовательно, в окрестности $O(M_0)$ $\dim \mathscr{X} = m-1$. Более того, инволютивное замыкание $\mathscr{X}^*$ распределения $\mathscr{X}$ имеет размерность не выше $m-1$. Таким образом, распределение $\mathscr{X}^*$ имеет ту же размерность, что и $\mathscr{X}$, и, следовательно, совпадает с ним.

Теорема 2. *Если УДС (1) имеет инфинитезимальную симметрию X вида (2), для которой $d_u\xi(t_0, x_0, u_0) \neq 0$, то существуют такие функции $h_i = h_i(t, x, v)$, что в некоторой окрестности $O(M_0)$ точки $M_0(t_0, x_0, u_0)$ $f_i(t, x, u) = h_i(t, x, \xi(t, x, u))$, $i=1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Согласно доказательству теоремы 1, функции x_i, $i=1, \dots, n$, t, ξ образуют для распределения $\mathscr{X}$ полную систему интегралов. В то же время функции f_i, $i=1, \dots, n$, также являются интегралами $\mathscr{X}$, а потому выражаются через полную систему интегралов, что равносильно утверждению теоремы.

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 УДС (1) сводится к системе со скалярным управлением $\dot{x} = h(t, x, v)$, причем новое скалярное управление имеет вид $v = \xi(t, x, u)$.*

Следствие 2. *Если всюду на E $\operatorname{rank}(\partial f/\partial u) \geqslant 2$, то для любой инфинитезимальной симметрии X УДС (1), определяемой формулой (2), $d_u\xi = 0$, $d_u\eta_i = 0$, $i=1, 2, \dots, n$, всюду в E, т. е. компоненты ξ и η_i поля X не зависят от управлений.*

Замечание. Если $\operatorname{rank}(\partial f/\partial u) = k < m$, то локально при определенных условиях УДС (1) заменой переменных сводится к системе с k-мерным управлением. Поэтому далее будем считать, что $\operatorname{rank}(\partial f/\partial u) = m$.

Преобразование системы (7). Если ввести новое векторное поле $H = \xi \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, то система (7) при помощи скобки Ли (коммутатора векторных полей) запишется в виде

$$[F, H] - F(\xi)F = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial u_j}, F\right]\varphi_j, \tag{10}$$

где F — векторное поле УДС (1), определяемое соотношением $F=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Условие (10) означает, что поле $[F, H]-F(\xi)F$ является линейной комбинацией полей $F_j=[\partial/\partial u_j, F]$, а функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ — коэффициенты этой комбинации. Следовательно, это поле принадлежит распределению $\mathcal{F}_u$, порожденному полями F_j:

$$[F, H]-F(\xi)F\in\mathcal{F}_u. \tag{11}$$

Отметим, что $\dim\mathcal{F}_u=\operatorname{rank}(\partial f/\partial u)=m$.

Некоторые частные случаи УДС. В случае $n=m\geqslant 2$, согласно следствию 2, имеем $d_u\xi\equiv 0$ и $d_u\eta\equiv 0$, что равносильно выполнению условия (8). Так как размерность $\mathcal{F}_u$ равна n, выполняется также соотношение (11), а система (10) относительно φ имеет единственное решение. Таким образом, в указанном случае каждая инфинитезимальная симметрия X полностью определяется набором функций $(\xi(t,x), \eta(t,x))$.

В случае $n>m\geqslant 2$ также $\xi'_u=0$ и $\eta'_u=0$ и условие (8) выполняется. Соотношение (11) можно выразить в виде рангового условия

$$\operatorname{rank}(\mathcal{F}_u, [F, H]-F(\xi)F)=m, \tag{12}$$

которое является некоторым функциональным условием, связывающим $\xi(t,x)$, $\eta(t,x)$ и $f(t,x,u)$, и которое должно выполняться в некоторой области E. Поскольку функции ξ и η не зависят от управлений, то условие (12), вообще говоря, является некоторым ограничением и на функцию f. Для конкретной УДС функция f может не подчиняться этому ограничению, так что в таком случае УДС не будет иметь симметрий вообще.

Если условие (12) выполнено для набора функций ξ, η, то $\varphi(t,x,u)$ однозначно определяется как координаты разложения векторного поля $[F, H]-F(\xi)F$ по векторным полям F_j, $j=1, 2, \dots, m$. Таким образом, в этом случае инфинитезимальная симметрия X вида (2) определяется любым набором функций ξ, η, удовлетворяющим условию (12).

Если $m=1$, то условие $\xi'_u=0$, $\eta'_u=0$ может не выполняться. Например, если $n=1$, $m=1$, то уравнение (8) позволяет, зная функцию ξ, найти функцию η с точностью до некоторой функции $\tilde{\eta}(t,x)$, уравнение (7) определяет для данных ξ и η функцию φ. Таким образом, в случае $n=1$, $m=1$ все симметрии однозначно определяются произвольной парой функций $\xi(t,x,u)$ и $\tilde{\eta}(t,x)$.

Первые интегралы УДС и симметрии. Первый интеграл УДС (1) — это функция $\alpha(t,x,u)$, которая постоянна на любом решении $(x(t), u(t))$ системы. Это значит, что $\alpha(t, x(t), u(t))=\mathrm{const}$ или $\alpha(t, x(t), u(t))'_t=0$. Распишем подробнее:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\dot{x}_i(t)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\alpha}{\partial u_j}\dot{u}_j(t)\equiv 0.$$

Учтем, что $\dot{x}(t)=f(t,x,u)$:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}f_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\alpha}{\partial u_j}\dot{u}_j(t)\equiv 0.$$

Так как управлением может быть любая гладкая функция, то должно быть $\partial\alpha/\partial u_j=0$, $j=1, \dots, m$, и

$$F(\alpha)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}f_i=0.$$

Итак, можно сказать, что первый интеграл УДС (1) — это функция

$\alpha(t,x)$, для которой ее производная $\dot{\alpha}(t,x)|_{(1)}$ в силу системы (1) равна нулю.

Теорема 3. *Множество всех первых интегралов УДС (1) является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения функций.*

Действительно, если функции α и β постоянны вдоль любого решения, то это же верно и относительно их суммы и произведения.

Теорема 4. *Если векторное поле X — симметрия УДС (1), то для любого первого интеграла $\alpha(t,x)$ поле αX тоже симметрия УДС (1).*

Доказательство. Пусть X имеет вид (2). Тогда для αX система (8) принимает вид $\partial(\alpha\eta)/\partial u - f\partial(\alpha\xi)/\partial u = 0$ или, так как α не зависит от u, $\alpha(\partial\eta/\partial u - f\partial\xi/\partial u) = 0$, т. е. условие (8) для αX выполнено. Остановимся на условии (10), равносильном системе (7). Если для симметрии X вида (2) выполняется (10), то

$$[F,\alpha H] - F(\alpha\xi)F = F(\alpha)H + \alpha[F,H] - (F(\alpha)\xi + \alpha F(\xi))F =$$

$$= \alpha[F,H] - \alpha F(\xi)F = \alpha([F,H] - F(\xi)F) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha\varphi_j)\left[\frac{\partial}{\partial u_j}, F\right],$$

так как $F(\alpha) = 0$. Таким образом, условие (10) для αX выполнено и αX — симметрия.

Следствие. *Множество всех симметрий УДС (1) является модулем над кольцом первых интегралов (относительно обычных операций сложения и умножения на функцию).*

Теорема 5. *Пусть $F_t = [\partial/\partial t, F] \in \mathscr{F}_u$. Если $\alpha = \alpha(t,x)$ — первый интеграл УДС (1), то существует векторное поле вида*

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \frac{\partial}{\partial u_j}, \tag{13}$$

являющееся симметрией УДС (1).

Доказательство. Для поля (13) $H = \alpha\partial/\partial t$, $\xi = \alpha$, $\eta \equiv 0$. Поэтому

$$[F,H] - F(\alpha)F = \left[F, \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right] - F(\alpha)F =$$

$$= F(\alpha)\frac{\partial}{\partial t} - F(\alpha)F + \alpha\left[F, \frac{\partial}{\partial t}\right] = F(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t} - F\right) + \alpha F_t = \alpha F_t \in \mathscr{F}_u$$

и условие (10) выполнено. Так как $\alpha(t,x)$ не зависит от u и $\eta \equiv 0$, то система (8) выполняется автоматически. Теорема доказана.

Следствие 1. *Координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ симметрии X вида (13) являются коэффициентами разложения векторного поля αF_t по векторным полям $F_1, \ldots, F_m$.*

Следствие 2. *Если $\alpha(t,x)$ — первый интеграл стационарной УДС $\dot{x} = f(x,u)$, то векторное поле $H = \alpha\partial/\partial t$ является симметрией этой УДС.*

Действительно, для стационарной системы $F_t \equiv 0 \in \mathscr{F}_u$. Поэтому выполняются условия теоремы 5 и, кроме того, все коэффициенты $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ равны нулю.

Теорема 6. *Если стационарная УДС, для которой $F - \partial/\partial t \notin \mathscr{F}_u$, имеет симметрию вида (13), то $\alpha(t,x)$ — первый интеграл УДС (1).*

Действительно, в этом случае $F(\alpha)(\partial/\partial t - F) \in \mathscr{F}_u$ (см. доказательство теоремы 6), в то время как $\partial/\partial t - F \notin \mathscr{F}_u$. Следовательно, $F(\alpha) = 0$.

Замечание. Так как для стационарной УДС $F_t = 0$, то векторное поле (13) является симметрией этой УДС, только если $\varphi_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$ (следствие 1 из теоремы 5).

Представляется интересным изучение симметрий X вида (2) УДС (1), для которых $\xi(t,x)$ — первый интеграл УДС. Так как ξ не зависит от

u, то система (8) определяющих уравнений для инфинитезимальных симметрий равносильна тому, что функции η_i не зависят от u.

Рассмотрим семейство $\mathscr{X}$ симметрий X УДС (1) вида

$$X=\xi(t,x)\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u_j}, \qquad (14)$$

для которых $\xi(t,x)$ — первый интеграл.

Теорема 7. *Если $X_1, X_2\in\mathscr{X}$, то $[X_1,X_2]\in\mathscr{X}$, т. е. семейство $\mathscr{X}$ инволютивно.*

Доказательство. Пусть $\xi_1(t,x)$, $\xi_2(t,x)$ — координаты соответственно полей X_1 и X_2 по переменной t, а $\xi(t,x)$ — аналогичная координата для поля $X=[X_1,X_2]$. Тогда $\xi=X_1(\xi_2)-X_2(\xi_1)$. Вычислим производную функции ξ в силу УДС (1), т. е. функцию $F(\xi)$:

$$F(\xi)=F(X_1(\xi_2))-F(X_2(\xi_1))=F(X_1(\xi_2))-X_1(F(\xi_2))-$$

$$-F(X_2(\xi_1))+X_2(F(\xi_1))=[F,X_1](\xi_2)-[F,X_2](\xi_1),$$

где использованы равенства $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$.

Так как X_1 — симметрия, то в силу соотношения (10)

$$[F,X_1]=\left[F,H_1+\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\frac{\partial}{\partial u_j}\right]=[F,H_1]+\sum_{j=1}^{m}\left[F,\varphi_j\frac{\partial}{\partial u_j}\right]=$$

$$=[F,H_1]+\sum_{j=1}^{m}F(\varphi_j)\frac{\partial}{\partial u_j}-\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\left[\frac{\partial}{\partial u_j},F\right]=$$

$$=F(\xi_1)F+\sum_{j=1}^{m}F(\varphi_j)\frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Поэтому $[F,X_1](\xi_2)=F(\xi_1)F(\xi_2)+\sum_{j=1}^{m}F(\varphi_j)\dfrac{\partial\xi_2}{\partial u_j}=0+0=0$. Аналогично $[F,X_2](\xi_1)=0$ и, следовательно, $F(\xi)=0$. Теорема доказана.

Аффинные системы. Аффинная УДС (АУДС) — это УДС (1), линейная по управлению. В этом случае она может быть записана в виде

$$\dot{x}=a(t,x)+\sum_{j=1}^{m}b_j(t,x)u_j, \qquad (15)$$

где $a, b_1, \dots, b_m\colon \mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — гладкие функции. Системе (15) однозначно соответствуют векторные поля

$$A=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad B_j=\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i},\quad j=1,\dots,m,$$

где $(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}=a(t,x)$, $(b_{1j},\dots,b_{nj})^{\mathrm{T}}=b_j(t,x)$. При этом векторное поле F имеет вид $F=A+\sum_{j=1}^{m}u_jB_j$. Векторные поля F_j, $j=1,2,\dots,m$, совпадают с B_j, а распределение $\mathscr{F}_u$ порождается полями $B_1,\dots,B_m$ (подчеркивая это, введем для этого распределения второе обозначение $\mathscr{B}$). В соответствии с замечанием к теореме 2 считаем, что $\operatorname{rank}\{(B_1,\dots,B_m)\}=m$.

Для произвольной инфинитезимальной симметрии X вида (2) система (7) определяющих уравнений в форме (10) имеет вид

$$([A,H]-A(\xi)A)+\sum_{j=1}^{m}u_j([B_j,H]-A(\xi)B_j-B_j(\xi)A)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} u_j u_k B_j(\xi) B_k = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j B_j. \tag{16}$$

Если $m \geqslant 2$ (т. е. управление чисто векторное), то координаты векторного поля H не зависят от управлений (следствие 2). Так как поля $A, B_1, \ldots$ $\ldots, B_m$ также не зависят от u, из (16) следует, что в этом случае функции φ_j являются многочленами по u степени не выше 2. Пусть

$$\varphi_j(t, x, u) = \varphi_j^{(0)}(t, x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_{jk}^{(1)}(t, x) u_k + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \varphi_{jkl}^{(2)}(t, x) u_k u_l.$$

Тогда соотношение (16) распадается на три группы:

$$[A, H] - A(\xi) A = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^{(0)} B_j,$$

$$[B_k, H] - A(\xi) B_k - B_k(\xi) A = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{jk}^{(1)} B_j, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{17}$$

$$B_k(\xi) B_l = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{jkl}^{(2)} B_j, \quad k, l = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $m = n$, системы уравнений (17) разрешимы относительно $\varphi_j^{(0)}$, $\varphi_{jk}^{(1)}$, $\varphi_{jkl}^{(2)}$ однозначным образом. В случае $m < n$ последняя система в (17) по-прежнему однозначно определяет $\varphi_{jkl}^{(2)}$: $\varphi_{jkl}^{(2)} = B_k(\xi)\delta_{jl}$, где δ_{jl} — символ Кронекера. Первая система в (17) разрешима относительно $\varphi_j^{(0)}$, если

$$[A, H] - A(\xi) A \in \mathscr{B}, \tag{18}$$

а вторая система в (17) — относительно $\varphi_{jk}^{(1)}$, если

$$[B_k, H] - A(\xi) B_k - B_k(\xi) A \in \mathscr{B},$$

или, имея в виду, что $A(\xi) B_k \in \mathscr{B}$,

$$[B_k, H] - B_k(\xi) A \in \mathscr{B}, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{19}$$

В случае $m = 1$, если для симметрии X АУДС (15) вида (2) $d_u\xi \equiv 0$, то векторное поле H не зависит от u и тогда остается в силе сказанное выше. Условия (18), (19) верны и при $d_u\xi \neq 0$.

Локальная декомпозиция АУДС. Если АУДС автономна, т. е. если векторные поля A и B_j не зависят от t, их можно рассматривать как поля в пространстве состояний $\mathbf{R}^n$. Распределение $\mathscr{D}$ в $\mathbf{R}^n$ называется инвариантным относительно автономной АУДС, если $[A, \mathscr{D}] \subset \mathscr{D}$, $[B_i, \mathscr{D}] \subset \mathscr{D}$, $i = 1, \ldots, m$.

Известно [10], что если автономная АУДС имеет инвариантное распределение $\mathscr{D}$, инволютивное и постоянной размерности k, то существует такая система координат $(t, y_1, \ldots, y_n)$, $y_i = y_i(x)$, что в этой системе координат АУДС имеет вид

$$\dot{y}^1 = f^1(y^1, y^2) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j^1(y^1, y^2), \quad \dot{y}^2 = f^2(y^2) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j^2(y^2),$$

где $y^1 = (y_1, \ldots, y_k)$, $y^2 = (y_{k+1}, \ldots, y_n)$, $f^1 = (f_1, \ldots, f_k)$, $f^2 = (f_{k+1}, \ldots, f_n)$, $g_j^1 = (g_{j1}, \ldots, g_{jk})$, $g_j^2 = (g_{j,k+1}, \ldots, g_{jn})$, $j = 1, \ldots, m$.

Этот результат распространяется на неавтономный случай. Распределение $\mathscr{D}$ в расширенном пространстве состояний $\mathbf{R}^{n+1}$ назовем инвариантным относительно АУДС (15), если $[A, \mathscr{D}] \subset \mathscr{D}$, $[B_j, \mathscr{D}] \subset \mathscr{D}$, $j = 1, \ldots, m$. Здесь возможны два варианта.

В первом случае, если функция t — интеграл инволютивного регулярного распределения $\mathscr{D}$ размерности k, то ее можно дополнить до полного набора из $n-k+1$ интегралов этого распределения некоторыми функциями $y_{k+1}, \dots, y_n$. Расширяя этот набор произвольными функциями $y_1, \dots, y_k$ так, чтобы $t, y_1, \dots, y_n$ были функционально независимыми, получим замену координат (t, y^1, y^2), где $y^1=(y_1, \dots, y_k)$ и $y^2=(y_{k+1}, \dots$ $\dots, y_n)$. В этой системе координат любое поле $X \in \mathscr{D}$ удовлетворяет соотношениям $X(y_j)=0$, $j=k+1, \dots, n$, $X(t)=0$. Это значит, что в новой системе координат поле X имеет вид $X=\sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\partial}{\partial y_j}$. Отсюда вытекает, что распределение $\mathscr{D}$ порождается векторными полями $\partial/\partial y_j$, $j=1, \dots, k$: $\mathscr{D}=\operatorname{span}\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_k\}$. Значит, относительно новых переменных АУДС будет иметь вид

$$\dot{y}^1=f^1(t, y^1, y^2)+\sum_{j=1}^{m} u_j g_j^1(t, y^1, y^2), \quad \dot{y}^2=f^2(t, y^2)+\sum_{j=1}^{m} u_j g_j^2(t, y^2). \quad (20)$$

Во втором случае функция t не является интегралом распределения $\mathscr{D}$. Выберем замену координат (t, y^1, y^2), в которой функции $y^2=(y_k, \dots, y_n)$ составляют полный набор функционально независимых интегралов $\mathscr{D}$, а $y^1=(y_1, \dots, y_{k-1})$ выбраны произвольно. Тогда $\mathscr{D}=\operatorname{span}\{\partial/\partial t, \partial/\partial y_1, \dots$ $\dots, \partial/\partial y_{k-1}\}$, а АУДС в новой системе координат будет иметь вид

$$\dot{y}^1=f^1(t, y^1, y^2)+\sum_{j=1}^{m} u_j g_j^1(t, y^1, y^2), \quad \dot{y}^2=f^2(y^2)+\sum_{j=1}^{m} u_j g_j^2(y^2). \quad (21)$$

Если распределение $\mathscr{D}$ содержит все поля B_j, то в представлениях (20) и (21) функции g_j^2 равны нулю, и мы получаем представления

$$\dot{y}^1=f^1(t, y^1, y^2)+\sum_{j=1}^{m} u_j g_j^1(t, y^1, y^2), \quad \dot{y}^2=f^2(t, y^2) \quad (22)$$

вместо (20) и

$$\dot{y}^1=f^1(t, y^1, y^2)+\sum_{j=1}^{m} u_j g_j^1(t, y^1, y^2), \quad \dot{y}^2=f^2(y^2) \quad (23)$$

вместо (21).

Рассмотрим случай $m=1$, $n>1$.

Теорема 8. *Если АУДС (15) имеет симметрию X вида (2), для которой $d_u\xi(t_0, x_0, u) \not\equiv 0$ и $B(t_0, x_0) \neq 0$, то в окрестности точки $M_0(t_0, x_0)$ существует такая система координат с координатными функциями $t, y_1, \dots, y_n$, что АУДС приводится к виду*

$$\begin{aligned} \dot{y}_i&=a_i(t, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i=1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{y}_n&=a_n(t, y_1, \dots, y_n)+b(t, y_1, \dots, y_n)u. \end{aligned} \quad (24)$$

Доказательство. Так как $B(t_0, x_0) \neq 0$, в некоторой окрестности точки M_0 одномерное распределение $\mathscr{B}$, порожденное векторным полем B, будет регулярным. Покажем, что если $\xi_u=\partial\xi(t, x)/\partial u \not\equiv 0$ для некоторой симметрии X вида (2), то это распределение инвариантно, т. е. $[A, B] \in \mathscr{B}$. Векторное поле H, соответствующее выбранной симметрии X, удовлетворяет соотношению (19) при $m=1$: $[B, H]-B(\xi)A \in \mathscr{B}$.

Прокоммутируем это соотношение с векторным полем $\partial/\partial u$ и, используя тождество Якоби, получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}, [B, H]\right]-\left[\frac{\partial}{\partial u}, B(\xi)A\right]=\left[B, \left[\frac{\partial}{\partial u}, H\right]\right]-\frac{\partial}{\partial u}(B(\xi))A=$$

$$=[B, \xi_u(A+uB)]-B(\xi_u)A \in \mathscr{B}, \quad (25)$$

где использовано соотношение $[\partial/\partial u, H]=\xi_u(A+uB)$, равносильное системе (8) для АУДС (15). Из полученного соотношения (25) заключаем, что $[B, \xi_u A]+B(\xi_u)uB-B(\xi_u)A\in\mathscr{B}$, так как $[B, \xi_u uB]=u[B, \xi_u B]=uB(\xi_u)B$, или

$$[B, \xi_u A]-B(\xi_u)A\in\mathscr{B}. \tag{26}$$

Воспользовавшись тождеством $[B, \xi_u A]=B(\xi_u)A+\xi_u[B, A]$, приходим к соотношению $\xi_u[B, A]\in\mathscr{B}$, которое в силу условия $\xi_u\neq 0$ равносильно $[B, A]\in\mathscr{B}$. Теорема доказана.

Для АУДС (15) рассмотрим семейство $\mathscr{X}$ симметрий вида (14), для которых ξ — первый интеграл АУДС. Каноническая проекция $\pi:(t, x, u)\to(t, x)$ проецирует каждое поле X этого семейства в поле

$$H=\xi(t, x)\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t, x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{27}$$

и совокупность этих полей — инволютивное семейство. Распределение $\mathscr{H}$, порожденное таким семейством, будет инволютивным в любой области, в которой оно имеет постоянную размерность.

Теорема 9. *Если в окрестности точки (t_0, x_0) распределения $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}\cap\mathscr{B}$ имеют постоянную размерность, причем размерность $\mathscr{H}$ равна k, то существует такая система координат $(t, y)=(t, y_1, \dots, y_n)$ и такая обратная связь, т. е. замена управлений*

$$u=\alpha(t, y)+\beta(t, y)v, \tag{28}$$

$\alpha:\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, $\beta:\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m$, $v\in\mathbf{R}^m$, $\det\beta(t, y)\neq 0$, *что в новой системе координат и с новым управлением АУДС будет иметь вид:*

a) если t — интеграл распределения $\mathscr{H}$, то

$$\dot y^1=f^1(t, y^1, y^2)+\sum_{j=1}^{m}v_j g_j^1(t, y^1, y^2),\ \dot y^2=f^2(t, y^2)+\sum_{j=1}^{m}v_j g_j^2(t, y^2),$$

где $y^1=(y_1, \dots, y_k)$, $y^2=(y_{k+1}, \dots, y_n)$,

b) если t не является интегралом $\mathscr{H}$, то

$$\dot y^1=f^1(t, y^1, y^2)+\sum_{j=1}^{m}v_j g_j^1(t, y^1, y^2),\ \dot y^2=f^2(y^2)+\sum_{j=1}^{m}v_j g_j^2(y^2),$$

где $y^1=(y_1, \dots, y_{k-1})$, $y^2=(y_k, \dots, y_n)$.

Доказательство. Распределение $\mathscr{D}$ назовем локально управляемо инвариантным для АУДС (15), если существует обратная связь (28), переводящая АУДС в систему, для которой $\mathscr{D}$ является локально инвариантным. Это понятие рассматривалось ранее [10] в автономном случае. Найдены достаточные условия для таких распределений. Отметим, что соответствующие результаты без изменений переносятся на неавтономный случай, при этом обратная связь может быть неавтономной. Для доказательства утверждения нам достаточно убедиться, что в окрестности точки (t_0, x_0) распределение $\mathscr{H}$ локально управляемо инвариантно. Согласно [10], это сводится к проверке условий: $[A, \mathscr{H}]\subset\mathscr{B}+\mathscr{H}$, $[B_j, \mathscr{H}]\subset\mathscr{B}+\mathscr{H}$, $j=1, \dots, m$.

Так как $\mathscr{H}$ постоянной размерности в окрестности (t_0, x_0), оно порождается набором из k векторных полей $H_1, \dots, H_k$, являющихся проекциями вида (27) симметрий (14). Для этих полей координата по времени есть первый интеграл и, с другой стороны, выполняются условия (18), (19). Следовательно, $[A, H_l]\in\mathscr{B}$, $[B_j, H_l]\in\mathscr{B}$, $j=1, \dots, m$; $l=1, \dots, k$.

Пусть $H\in\mathscr{H}$. Тогда векторное поле H представимо в виде $H=$

$= \sum_{l=1}^{k} h_l(t, x) H_l$. Поэтому

$$[A, H] = \left[A, \sum_{l=1}^{k} h_l H_l\right] = \sum_{l=1}^{k} A(h_l) H_l + \sum_{l=1}^{k} h_l [A, H_l] \in \mathscr{B} + \mathscr{H},$$

$$[B_j, H] = \left[B_j, \sum_{l=1}^{k} h_l H_l\right] = \sum_{l=1}^{k} B_j(h_l) H_l + \sum_{l=1}^{k} h_l [B_j, H_l] \in \mathscr{B} + \mathscr{H},$$

т. е. $\mathscr{H}$ управляемо инвариантно в окрестности точки (t_0, x_0). Теорема доказана.

Замечание. В качестве $\mathscr{H}$ можно также выбирать любое распределение, являющееся инволютивным замыканием лишь части полей вида (27), являющихся проекциями полей семейства $\mathscr{X}$. В частности, можно получить декомпозицию по каждому такому полю. Отметим, что семейство $\mathscr{X}$ содержит все симметрии вида (2), у которых $\xi \equiv 0$.

Примеры. Рассмотрим АУДС вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n &= a(t, x) + b(t, x) u \end{aligned} \tag{29}$$

со скалярным управлением u. Такие системы называют системами канонического вида (см. [11]). Для указанной АУДС векторные поля A и B имеют вид

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} + a \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad B = b \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Если $b(t, x) \neq 0$, что ниже будет предполагаться, то распределение $\mathscr{B}$ порождается векторным полем $\partial/\partial x_n$. Любая симметрия X АУДС однозначно определяется своей компонентой H, содержащей временную координату и координаты пространства состояний. Введем вспомогательное векторное поле $\tilde{H} = H - \xi(A + uB)$. Тогда соотношение (11) запишется в виде

$$[F, \tilde{H}] \in \mathscr{B}, \quad F = A + uB, \tag{30}$$

а система (8) приводит к соотношению

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}, \tilde{H}\right] = -\xi B. \tag{31}$$

Пусть $\tilde{H} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\eta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда

$$\begin{aligned} [F, \tilde{H}]\,(t) &= F(\tilde{H}(t)) - \tilde{H}(F(t)) = 0 - \tilde{H}(1) = 0, \\ [F, \tilde{H}]\,(x_i) &= F(\tilde{H}(x_i)) - \tilde{H}(F(x_i)) = F(\tilde{\eta}_i) - \tilde{H}(x_{i+1}) = \\ &= F(\tilde{\eta}_i) - \tilde{\eta}_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ [F, \tilde{H}]\,(x_n) &= F(\tilde{\eta}_n) - \tilde{H}(a + bu) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$[F, \tilde{H}] = \sum_{i=1}^{n-1} (F(\tilde{\eta}_i) - \tilde{\eta}_{i+1}) \frac{\partial}{\partial x_i} + (F(\tilde{\eta}_n) - \tilde{H}(a + bu)) \frac{\partial}{\partial x_n},$$

так что условие (30) равносильно системе

$$F(\tilde{\eta}_i) = \tilde{\eta}_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{32}$$

Аналогично $\left[\frac{\partial}{\partial u}, \tilde{H}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\eta}_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_i}$ и соотношение (31) равносильно системе

$$\frac{\partial\tilde\eta_i}{\partial u}=0,\ i=1,\dots,n-1,\ \frac{\partial\tilde\eta_n}{\partial u}=-\xi b. \tag{33}$$

Из соотношений (32) и (33) получаем

$$\frac{\partial\tilde\eta_{i+1}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}((A+uB)\tilde\eta_i)=B\tilde\eta_i=0,\ i=1,\dots,n-2.$$

Таким образом, условия на симметрию X свелись к системе уравнений

$$\tilde\eta_{i+1}=A\tilde\eta_i,\ B\tilde\eta_i=0,\ i=1,\dots,n-2,\ \frac{\partial\tilde\eta_1}{\partial u}=0,$$

$$\tilde\eta_n=(A+uB)\tilde\eta_{n-1},\ \xi=-\frac{1}{b}\frac{\partial\tilde\eta_n}{\partial u}$$

или

$$\frac{\partial\tilde\eta_1}{\partial u}=0,\ BA^{i-1}\tilde\eta_1=0,\ i=1,\dots,n-2,\ \tilde\eta_i=A^{i-1}\tilde\eta_1,\ i=2,\dots,n-1,$$

$$\tilde\eta_n=A^{n-1}\tilde\eta_1+uBA^{n-2}\tilde\eta_1,\ \xi=-\frac{1}{b}BA^{n-2}\tilde\eta_1,$$

где $A^k\eta=A(A^{k-1}\eta)$, $k=2,3,\dots$

Таким образом, симметрия X определяется произвольной функцией $\tilde\eta_1(t,x)$, удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений $BA^{i-1}\tilde\eta_1=0$, $i=1,\dots,n-2$, которая эквивалентна системе $(n-2)$ линейных уравнений в частных производных первого порядка (см. [11]) $\mathrm{ad}^i_AB\tilde\eta_1=0$, $i=0,\dots,n-3$, где $\mathrm{ad}^i_AB=[A,\mathrm{ad}^{i-1}_AB]$, $\mathrm{ad}^0_AB=B$. Решение этой системы имеет вид $\tilde\eta_1=\tilde\eta_1(t,x_1,x_2)$, где $\tilde\eta_1$ — произвольная гладкая функция.

В качестве второго примера рассмотрим АУДС вида

$$\dot x_i=b_i(t,x)u,\ i=1,\dots,n. \tag{34}$$

Для этой системы $A=\dfrac{\partial}{\partial t}$, $B=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Пусть $B(t_0,x_0)\neq0$. В некоторой окрестности точки (t_0,x_0) выберем систему координат $(t,y_1,\dots,y_n)$, в которой векторное поле B имеет простой вид: $B=b(t,y)\partial/\partial y_n$, где $b(t,y)\neq0$. Тогда, как и в предыдущем примере, любая симметрия X однозначно определяется векторным полем $\tilde H=H-\xi F$, удовлетворяющим соотношениям (30) и (31). При этом если $\tilde H=\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde\eta_i\dfrac{\partial}{\partial y_i}$, то

$$[F,\tilde H]=\sum_{i=1}^{n}[F,\tilde H](y_i)\frac{\partial}{\partial y_i}=\sum_{i=1}^{n-1}F(\tilde\eta_i)\frac{\partial}{\partial y_i}+(F(\tilde\eta_n)-u\tilde H(b))\frac{\partial}{\partial y_n}$$

и из соотношений (30), (31) следует, что

$$(A+uB)\tilde\eta_i=0,\ \frac{\partial\tilde\eta_i}{\partial u}=0,\ i=1,\dots,n-1,$$

или

$$\frac{\partial\tilde\eta_i}{\partial t}=0,\ \frac{\partial\tilde\eta_i}{\partial y_n}=0,\ \frac{\partial\tilde\eta_i}{\partial u}=0,\ i=1,\dots,n-1.$$

Это значит, что симметрии АУДС (34) описываются произвольным набором из n функций $\tilde\eta_1(y_1,\dots,y_{n-1}),\dots,\tilde\eta_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})$, $\tilde\eta_n(t,y_1,\dots$ $\dots,y_n,u)$. Непосредственный подсчет приводит к выражению для симметрии:

$$X=-\frac{1}{b}\frac{\partial\tilde{\eta}_n}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{\eta}_i\frac{\partial}{\partial y_i}+\left(\tilde{\eta}_n-u\frac{\partial\tilde{\eta}_n}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial y_n}+$$

$$+\left[\frac{1}{b}\frac{\partial\tilde{\eta}_n}{\partial t}+u\left(\frac{\partial\tilde{\eta}_n}{\partial y_n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{\eta}_i}{b}\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}.$$

Работа частично поддержана программой «Университеты России» по направлению «Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление» (проект НДС—11) и Российским фондом фундаментальных исследований (93—012—615).

Литература

1. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1986.
2. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. М., 1989.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М., 1983.
5. Павловский Ю. Н., Яковенко Г. Н. // Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск, 1982. С. 155—189.
6. Яковенко Г. Н. // Прикл. механика и процессы управления. М., МФТИ. 1991. С. 17—31.
7. Яковенко Г. Н. // Прикл. механика и математика. М., МФТИ. 1992. С. 155—176.
8. Grizzle J. W. and Marcus S. I. // IEEE Trans. Automat. Controll. 1985. Vol. 30, N 3. P. 248—257.
9. Schaft A. J. van der. // Systems & Contr. Letters. 1981. Vol. 1. P. 108—115.
10. Nijmejer H., Schaft A. J. van der. Nonlinear dunamical control Systems. N. Y., 1990.
11. Жевнин А. А., Крищенко А. П. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805—809.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию 6 июня 1994 г.