Д. В. Васильев, Д. В. Коледа, Теорема Минковского о последовательных минимумах и ее приложения в метрической теории диофантовых приближений, *Тр. Ин-та матем.*, 2007, том 15, номер 1, 10–14

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2007. Том 15. № 1. С. 10–14

УДК 511.36

ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ МИНИМУМАХ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Д. В. Васильев, Д. В. Коледа

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: vasilyev@im.bas-net.by
Поступила 15.03.2007

Работы Минковского [1, 2] (на русском языке см. [3]) положили начало новой области теории чисел, которая получила название геометрия чисел. Три теоремы Минковского имеют многочисленные приложения в теории чисел, в целочисленном программировании и особенно в теории диофантовых приближений.

В данной работе мы коснемся приложений теоремы Минковского о последовательных минимумах в метрической теории совместных диофантовых приближений. Для этого мы доказываем теорему о совместном приближении точек комплексной плоскости и действительной прямой.

Теорема 1. *Пусть область* $D \in \mathbb{R}^{n+1}$ *задана всеми векторами* $(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *координаты которых удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{gathered} |t_i| \le Q, \quad i = 1, \ldots, n, \\ |\gamma_n t_n + \ldots + \gamma_1 t_1 + t_0| < \delta_1, \quad |\omega_n t_n + \ldots + \omega_1 t_1 + t_0| < \delta_2, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\gamma_i = \alpha_i + i\beta_i \in \mathbb{C}$, $\omega_i \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, $\rho_i = \alpha_i - \omega_i$, $d = \max\limits_{1 \le i < j \le n} |\Delta_{ij}| = |\Delta_{km}| \ne 0$,

$$\Delta_{ij} = \det \begin{pmatrix} \beta_i & \beta_j \\ \rho_i & \rho_j \end{pmatrix}.$$

Тогда объем области D *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\pi 2^{n-1} (Q-\varepsilon)^{n-2} \delta_1^2 \delta_2}{\mu^{n-2} d} \le V(D) \le \frac{\pi 2^{n-1} Q^{n-2} \delta_1^2 \delta_2}{d}, \tag{2}$$

где

$$\mu = \max\Bigg(1, \frac{1}{d} \sum_{\substack{i \ne k \\ i \ne m}} |\Delta_{im}|, \frac{1}{d} \sum_{\substack{i \ne k \\ i \ne m}} |\Delta_{ki}|\Bigg),$$

$$\varepsilon = \frac{1}{d} \max(\delta_1 |\rho_m| + (\delta_1 + \delta_2)|\beta_m|, (\delta_1 + \delta_2)|\beta_k| + \delta_1 |\rho_k|).$$

Доказательство. Для произвольных фиксированных индексов $0 \le k, m \le n$ в системе уравнений (1) сделаем линейную замену переменных:

$$\begin{gathered}\xi_i = t_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i \neq k, \quad i \neq m, \\ \xi_k = \beta_n t_n + \ldots + \beta_1 t_1, \quad \xi_m = \alpha_n t_n + \ldots + \alpha_1 t_1 + t_0, \\ \xi_0 = \omega_n t_n + \ldots + \omega_1 t_1 + t_0. \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда система неравенств (1) примет следующий вид:

$$\begin{gathered} |\xi_i| \leq Q, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i \neq k, \quad i \neq m, \\ \xi_k^2 + \xi_m^2 < \delta_1^2, \quad |\xi_0| < \delta_2. \end{gathered} \tag{4}$$

Система неравенств (4) определяет цилиндр Π_{km} при условии $\det(\xi_i) \neq 0$. Очевидно, что область D заключена в любом из цилиндров Π_{km}. Тогда

$$V(D) \leq \min_{1 \leq k < m \leq n} V(\Pi_{km}).$$

Так как

$$\det(\xi_i) = \det \begin{pmatrix} \beta_k & \beta_m \\ \omega_k - \alpha_k & \omega_m - \alpha_m \end{pmatrix},$$

то по условию теоремы $\det(\xi_i) \leq d$ и имеет место оценка

$$V(D) \leq \frac{\pi 2^{n-1} Q^{n-2} \delta_1^2 \delta_2}{d},$$

что доказывает правую часть неравенства (2). Выберем k, m так, чтобы выполнялось условие $|\det(\xi_i)| = d$. Выразим t_k и t_m через t_i $(i \neq k,\ i \neq m)$ и ξ_k, ξ_m, ξ_0. В силу (3) имеем

$$\beta_n t_n + \ldots + \beta_1 t_1 = \xi_k,$$

$$(\alpha_n - \omega_n) t_n + \ldots + (\alpha_1 - \omega_1) t_1 = \xi_m - \xi_0.$$

Обозначив для краткости $\alpha_i - \omega_i = \rho_i$, получим

$$\beta_k t_k + \beta_m t_m = \xi_k - \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq m}} \beta_i t_i, \quad \rho_k t_k + \rho_m t_m = \xi_m - \xi_0 - \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq m}} \rho_i t_i.$$

Решение данной системы дает

$$t_k = \frac{1}{\Delta_{km}} \left(\xi_k \rho_m - (\xi_m - \xi_0) \beta_m - \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq m}} \Delta_{im} t_i \right),$$

$$t_m = \frac{1}{\Delta_{km}} \left((\xi_m - \xi_0) \beta_k - \xi_k \rho_k - \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq m}} \Delta_{ki} t_i \right).$$

Пусть $\theta_{ij} = \Delta_{ij}/\Delta_{km}$. Тогда в силу неравенств (4) для $|t_k|$ и для $|t_m|$ имеем следующие оценки:

$$|t_k| \leq \varepsilon_k + \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq m}} |\theta_{im}||t_i|, \quad |t_m| \leq \varepsilon_m + \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq m}} |\theta_{ki}||t_i|,$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{1}{d}(\delta_1 |\rho_m| + (\delta_1 + \delta_2)|\beta_m|), \quad \varepsilon_m = \frac{1}{d}((\delta_1 + \delta_2)|\beta_k| + \delta_1 |\rho_k|).$$

Очевидно, что если выбрать $t_i \le (Q-\varepsilon)/\mu$, где $\varepsilon = \max(\varepsilon_k, \varepsilon_m)$ и

$$\mu = \max\biggl(1, \sum_{\substack{i\neq k\\ i\neq m}} |\theta_{im}|, \sum_{\substack{i\neq k\\ i\neq m}} |\theta_{im}|\biggr),$$

то $|t_i| \le Q$, $|t_m| \le Q$. Таким образом, цилиндр $\widetilde{\Pi}_{km}$, задаваемый условиями

$$|\xi_i| \le \frac{Q-\varepsilon}{\mu}, \quad i = 1,\dots,n, \quad i \neq k, \quad i \neq m,$$

$$\xi_k^2 + \xi_m^2 < \delta_1^2, \quad |\xi_0| < \delta_2,$$

полностью содержится в области D и, следовательно, $V(\widetilde{\Pi}_{km}) \le V(\Pi_{km})$. Вычисляя объем цилиндра $V(\widetilde{\Pi}_{km})$, получаем левое неравенство в условии теоремы. Теорема 1 доказана.

Условие теоремы 1 предполагает, что векторы

$$\bar{\alpha} = (\operatorname{Re}\gamma_n, \dots, \operatorname{Re}\gamma_1, 1), \quad \bar{\beta} = (\operatorname{Im}\gamma_n, \dots, \operatorname{Im}\gamma_1, 0) \quad \text{и} \quad \bar{\omega} = (\omega_n, \dots, \omega_1, 1)$$

линейно независимы над $\mathbb{R}$. Рассмотрим теперь ситуацию, когда эти векторы линейно зависимы. Нетривиальный случай рассмотрен в теореме 2.

Теорема 2. *Пусть область $D \in \mathbb{R}^{n+1}$ задана всеми векторами $(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, координаты которых удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{gathered} |t_i| \le Q, \quad i = 1,\dots,n, \\ |\gamma_n t_n + \ldots + \gamma_1 t_1 + t_0| < \delta_1, \quad |\omega_n t_n + \ldots + \omega_1 t_1 + t_0| < \delta_2, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\gamma_i \in \mathbb{C}, \quad \omega_i \in \mathbb{R}, \quad \bar{\alpha} = (\operatorname{Re}\gamma_n, \dots, \operatorname{Re}\gamma_1, 1), \quad \bar{\beta} = (\operatorname{Im}\gamma_n, \dots, \operatorname{Im}\gamma_1, 0), \quad \bar{\omega} = (\omega_n, \dots, \omega_1, 1)$$

и

$$\bar{\omega} - \bar{\alpha} = \nu\bar{\beta}, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \bar{\beta} \neq \bar{0}.$$

Тогда объем области D удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi 2^{n-1}(Q-\varepsilon)^{n-1}\delta_1\delta_2}{\mu^{n-1} d\sqrt{1+\nu^2}} \le V(D) \le \frac{\pi 2^{n+1} Q^{n-1}\delta_1\delta_2}{d\sqrt{1+\nu^2}}, \tag{6}$$

где

$$d = \max_{1\le i\le n} |\operatorname{Im}\gamma_i|, \quad \mu = \max\biggl(1, \frac{1}{d}\sum_{1\le i\le n} |\operatorname{Im}\gamma_i| - 1\biggr), \quad \varepsilon = \frac{1}{d}\min\biggl(\delta_1, \frac{\delta_1+\delta_2}{|\nu|}\biggr).$$

Доказательство. Перейдем к новым переменным так же, как и в доказательстве теоремы 1. Для фиксированного индекса k положим

$$\begin{gathered} \xi_i = t_i, \quad i = 1,\dots,n, \quad i \neq k, \\ \xi_k = \beta_n t_n + \ldots + \beta_1 t_1, \quad \xi_0 = \alpha_n t_n + \ldots + \alpha_1 t_1 + t_0. \end{gathered} \tag{7}$$

Тогда система неравенств (5) примет вид

$$|\xi_i| \le Q, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \ne k,$$
$$\xi_k^2 + \xi_0^2 < \delta_1^2, \quad |\xi_0 + \nu\xi_k| < \delta_2. \tag{8}$$

Область D содержится в любой из областей, определяемых неравенствами (8). Выберем ту из них, объем которой минимален, и, очевидно, равен $2^{n-1}Q^{n-1}S/d$, где S — площадь области на плоскости $O\xi_k\xi_0$, задаваемой условиями

$$\xi_k^2 + \xi_0^2 < \delta_1^2, \quad |\xi_0 + \nu\xi_k| < \delta_2.$$

Данная плоская область представляет собой часть круга, вырезаемую двумя параллельными прямыми, симметричную относительно начала координат. Проводя необходимые подсчеты, получаем $\pi R\delta_2/\sqrt{1+\nu^2} \le S \le 4R\delta_2/\sqrt{1+\nu^2}$, откуда следует правая часть неравенства теоремы 2.

Докажем нижнюю оценку. Из последних двух неравенств системы (8) следует, что

$$|\xi_k| < \delta_1, \quad |\nu||\xi_k| < \delta_1 + \delta_2,$$

откуда $|\xi_k| < \varepsilon d$, где

$$\varepsilon = \frac{1}{d}\min\left(\delta_1, \frac{\delta_1+\delta_2}{|\nu|}\right).$$

Таким образом, $|\beta_k t_k + \sum_{i\ne k}\beta_i t_i| < \varepsilon d$ и, значит, $|t_k| < \varepsilon + \sum_{i\ne k}|\theta_i||t_i|$, где $\theta_i = \beta_i/d$. Пусть $\mu = \max(1, \sum_{i\ne k}|\theta_i|)$, тогда при $|t_i| \le (Q-\varepsilon)/\mu$ получим $|t_k| < Q$, т.е. область, определяемая неравенствами

$$|t_i| \le (Q-\varepsilon)/\mu, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \ne k,$$
$$|\gamma_n t_n + \ldots + \gamma_1 t_1 + t_0| < \delta_1, \quad |\omega_n t_n + \ldots + \omega_1 t_1 + t_0| < \delta_2,$$

полностью содержится в D и, следовательно,

$$V(D) \ge \frac{\pi 2^{n-1}(Q-\varepsilon)^{n-1}\delta_1\delta_2}{\mu^{n-1}d\sqrt{1+\nu^2}}.$$

Следствие 1. *Последовательные минимумы тела D, заданного системой (1), удовлетворяют неравенству*

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!V_{\max}} \le \lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_{n+1} \le \frac{2^{n+1}}{V_{\min}},$$

где

$$V_{\max} = \frac{\pi 2^{n-1}Q^{n-2}\delta_1^2\delta_2}{d}, \quad V_{\min} = \frac{\pi 2^{n-1}(Q-\varepsilon)^{n-2}\delta_1^2\delta_2}{\mu^{n-2}d}$$

и величины d, μ, ε, δ_1, δ_2 имеют тот же смысл, что и в условии теоремы 1.

Доказательство. Согласно теореме Минковского о последовательных минимумах

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \le \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}V(D) \le 2^{n+1}.$$

Из теоремы 1 имеем $V_{\min} \le V(D) \le V_{\max}$, откуда следует

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \le \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}V_{\max}, \quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}V_{\min} \le 2^{n+1},$$

что доказывает следствие 1.

Следствие 2. *Пусть задана система неравенств*

$$|P(z)| < \lambda\delta_1(Q), \quad |P(x)| < \lambda\delta_2(Q), \quad |H(P)| \le \lambda Q, \tag{9}$$

где $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ *— многочлен степени* n *с целыми коэффициентами;* $H(P) = \max\limits_{0\le i\le n} |a_i|$ *— высота* P; $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ *— фиксированные точки;* $\lambda, Q > 0$; $\delta_1(Q), \delta_2(Q)$ *— положительные функции, причем* $\delta_1(Q) = o(Q)$, $\delta_2(Q) = o(Q)$ *при* $Q \to \infty$. *Пусть также* λ_j *— точная нижняя грань таких* $\lambda \in \mathbb{R}$, *что система неравенств (9) имеет не менее* j *линейно независимых решений в целочисленных векторах* $(a_0, \ldots, a_n)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $Q_0 > 0$ *такое, что для любого* $Q > Q_0$ *имеет место оценка*

$$\frac{4dQ^{2-n}}{\pi(n+1)!\delta_1^2(Q)\delta_2(Q)} \le \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n+1} \le \frac{4\mu^{n-1}dQ^{2-n}(1+\varepsilon)}{\pi\delta_1^2(Q)\delta_2(Q)},$$

где d, μ *— определяются как и в теореме 1 с учетом того, что* $\gamma_i = z^i$, $\omega_i = x^i$.

Доказательство. Доказательство получается непосредственным применением теоремы 1 и следствия 1.

Литература

1. *Minkowski H.* Geometrie der Zahlen. Lepzig–Berlin: Teubner, 1910.
2. *Minkowski H.* Diophantische Approximationen. Lepzig–Berlin: Teubner, 1907.
3. *Шмидт В.* Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983.

D. V. Vasilyev, D. V. Koleda

Minkowski's theorem on successive minima and its application to metric Diophantine approximation theory

Summary

We give upper and lower bounds for the volumes of the bodies given by the system of linear inequalities in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. As a consequences we get an analogue of Minkowski theorem on consequtive minima and the theorem on joint approximation of zero by the values of polynomials in complex and real points.