Объ измѣреніи алгебраическихъ формъ.

М. Н. Лагутинскаго.

§ 1. Подъ алгебраической формой разумѣютъ однородный полиномъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Такъ:

$$x_1^m + x_2^m \text{ и } (x_1 + x_2 + x_3)^m + x_4^m$$

будутъ формами m-ой степени.

Между первой и второй по отношенію къ линейному преобразованію есть существенная разница.

Какимъ бы обратимымъ преобразованіемъ мы не преобразовывали первую форму, она всегда будетъ зависѣть отъ двухъ перемѣнныхъ. Но если бы мы положили

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3\,, \quad x_2 = y_2\,,$$
$$x_3 = y_3\,, \quad x_4 = y_4\,,$$

то вторая форма перейдетъ въ первую, т. е. будетъ зависѣть только отъ двухъ перемѣнныхъ вмѣсто прежнихъ четырехъ.

Условимся называть такія формы отъ p перемѣнныхъ, которыя при помощи необратимаго линейнаго преобразованія переходятъ въ формы отъ q перемѣнныхъ, въ которыхъ уже невозможно произвести дальнѣйшаго уменьшенія числа перемѣнныхъ, формами $q-1$-го измѣренія.

Изъ этого опредѣленія непосредственно слѣдуетъ, что всѣ линейныя формы—нулевого измѣренія.

Чтобы получить возможность аналитически опредѣлять измѣреніе данной формы, докажемъ теорему:

Если форма m-го порядка $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ $q-1$-го измѣренія, то между ея первыми производными существуетъ $p-q$ и только $p-q$ линейныхъ соотношеній съ постоянными коэффиціентами.

Согласно опредѣленію существуетъ преобразованіе

$$x_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j\,, \qquad (i=1, 2, 3, \dots, p) \tag{1}$$

которое преобразуетъ форму f въ форму $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_q)$, которая зависитъ только отъ q перемѣнныхъ.

Если условимся обозначать выраженія $\sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j$ соотвѣтственно черезъ $\overline{x}_i$, то преобразованная форма можетъ быть представлена черезъ $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_p)$.

Такъ какъ она по условію не зависитъ отъ перемѣнныхъ $y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_p$, то ея частныя производныя по этимъ перемѣннымъ должны быть тождественно равными нулю, и слѣдовательно мы, выполнивъ эти операціи, получимъ слѣдующія тождества:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}_i} a_{ij} = 0. \qquad (j=q+1, q+2, \dots, p)$$

Такъ какъ преобразованіе (1) по предположенію обратимое, то, возвращаясь въ полученныхъ тождествахъ къ прежнимъ перемѣннымъ x_i, мы получаемъ такія:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{ij} = 0\,, \qquad (j=q+1, q+2, \dots, p) \tag{2}$$

которыя даютъ $p-q$ линейныхъ соотношеній между первыми производными формы f.

Легко видѣть, что всѣ эти линейныя соотношенія не могутъ сводиться къ меньшему числу.

Допустивъ это, мы должны принять, что всѣ опредѣлители матриссы

$$\begin{vmatrix} a_{1,q+1} & a_{2,q+1} & a_{3,q+1} & \dots & a_{p,q+1} \\ a_{1,q+2} & a_{2,q+2} & a_{3,q+2} & \dots & a_{p,q+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & a_{3,p} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix}$$

равны нулю. Но тогда и опредѣлитель преобразованія (1) также равнялся бы нулю, и оно перестало бы быть обратимымъ, что противъ предположенія.

Но точно также, кромѣ тождествъ (2), не можетъ существовать ни одного тождества такого же характера, которое не было бы ихъ слѣдствіемъ.

Предположимъ обратное, и пусть

$$\sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

такое новое тождество.

Можно разсматривать совокупность равенствъ (2) и (3) какъ систему дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Эта система замкнутая, и ея $q-1$ интегралъ будутъ линейными функціями перемѣнныхъ x_i.

Пусть

$$z_i \equiv \sum_{j=1}^{p} c_{ij} x_j \qquad (i=1,\ 2, \ldots,\ q-1) \tag{4}$$

полная система ея $q-1$ интеграловъ. Тогда можно предположить безъ вреда для общности, что опредѣлитель $\sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{q-1,\ q-1}$ отличенъ отъ нуля.

Форма f, которая также представляетъ интегралъ разсматриваемой системы, будетъ на основаніи общихъ свойствъ интеграловъ подобныхъ системъ функціей $q-1$ интеграловъ z_i. Это будетъ, очевидно, однородный полиномъ m-го порядка отъ этихъ интеграловъ. Такимъ образомъ, обозначивъ получаемый полиномъ черезъ φ, придемъ къ тождеству:

$$f(x_1,\ x_2, \ldots, x_p) \equiv \varphi(z_1,\ z_2, \ldots, z_{q-1}). \tag{5}$$

Напишемъ линейное преобразованіе:

$$\begin{aligned} y_i &= z_i \qquad && (i=1,\ 2, \ldots,\ q-1) \\ y_i &= x_i. \qquad && (i=q,\ q+1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{6}$$

Оно будетъ обратимымъ, такъ какъ опредѣлитель его приведется къ опредѣлителю $\sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{q-1,\ q-1}$ и слѣдовательно будетъ отличнымъ отъ нуля.

Пользуясь этимъ преобразованіемъ, замѣняемъ въ формѣ f перемѣнныя x_i перемѣнными y_i и получаемъ въ виду тождества (5) и формулъ преобразованія изъ формы f форму $\varphi(y_1,\ y_2, \ldots, y_{q-1})$.

Отсюда видно, что обратимое линейное преобразованіе преобразуетъ нашу форму f въ форму, зависящую только отъ $q-1$ перемѣнныхъ; а въ этомъ случаѣ она была бы противъ предположенія формой меньшаго измѣренія, чѣмъ $q-1$-го.

Итакъ, предположеніе, что тождество (3) не представляетъ слѣдствія тождествъ (2), приводитъ къ противорѣчію, заключающемуся въ томъ, что форма f не могла бы быть при этомъ условіи q— 1-го измѣренія.

А потому *измѣреніе формы f на единицу меньше числа линейно-независимыхъ среди ея p первыхъ производныхъ.*

Тождества (2) можно найти, не зная преобразованія (1). Для этого достаточно примѣненія теоріи детерминантовъ.

Но разъ эти тождества найдены, нетрудно опредѣлить и одно изъ преобразованій, которое превращаетъ данную форму отъ p перемѣнныхъ въ форму, зависящую отъ q перемѣнныхъ.

Для этого поступаемъ совершенно также, какъ для полученія преобразованій (6), т. е. разсматриваемъ тождества (2), какъ систему дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка. Найдя полную систему q линейныхъ интеграловъ, обозначимъ ихъ черезъ z_i:

$$z_i \equiv \sum_{j=1}^{p} c_{ij} x_j. \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, q) \tag{7}$$

Такъ какъ они независимы, то одинъ изъ опредѣлителей матриссы:

$$\left| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdot\cdot & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot\cdot & c_{2p} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdot\cdot & c_{qp} \end{array} \right| \tag{8}$$

долженъ быть отличенъ отъ нуля. Предположимъ для простоты, что опредѣлитель $\sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{qq}$ отличенъ отъ нуля (въ противномъ случаѣ достаточно перемѣнить нумерацію перемѣнныхъ); тогда полагаемъ:

$$\begin{aligned} y_i &= z_i & (i&=1, 2, 3, \ldots, q) \\ y_i &= x_i. & (i&=q+1, q+2, \ldots, p) \end{aligned} \tag{9}$$

Легко показать, что это преобразованіе искомое. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи свойствъ дифференціальныхъ системъ въ частныхъ производныхъ форма f выразится въ функціи интеграловъ z_i.

Можно получить это выраженіе напр. такимъ образомъ: разрѣшимъ тождества (7) относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_q$ и, подставивъ полученный результатъ въ полиномъ $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, получимъ функцію однихъ только z_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ и слѣдовательно будемъ имѣть тождественно

$$f(x_1, x_1, \ldots, x_p) \equiv \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_q), \tag{10}$$

гдѣ φ нѣкоторый однородный полиномъ m-го порядка относительно линейныхъ выраженій z_i.

Примѣнивъ преобразованіе (9), получаемъ на основаніи тождества (10) вмѣсто данной формы f форму $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$, зависящую только отъ q перемѣнныхъ.

Тождество (10) приводитъ къ новой теоремѣ: *форма:* $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *q — 1-го измѣренія представляетъ собой функцію q независимыхъ линейныхъ функцій перемѣнныхъ x_i.*

Въ предыдущемъ мы показали, какъ опредѣлить измѣреніе функціи и найдти по крайней мѣрѣ одно преобразованіе, при помощи котораго мы можемъ привести форму къ виду, въ которомъ она содержитъ наименьшее число перемѣнныхъ.

Очевидно, что число такихъ преобразованій не одно.

Разсмотримъ два такихъ преобразованія. Первое, опредѣляемое формулами (9), обозначимъ черезъ A, а второе, новое, черезъ B.

Такъ какъ всякое обратимое линейное преобразованіе можно разложить на два, изъ которыхъ первое будетъ даннымъ, то второе преобразованіе B можно предположить составленнымъ изъ преобразованія A и другого, опредѣляемаго слѣдующими формулами:

$$y_i \equiv \sum_{j=1}^{p} b_{ij} u_j. \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, p) \tag{11}$$

Первое преобразованіе, какъ мы уже выяснили, превратитъ форму f въ форму $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$. Обозначивъ для сокращенія черезъ $\overline{y_i}$ линейное выраженіе $\sum\limits_{j=1}^{p} b_{ij} u_j$, найдемъ окончательный результатъ преобразованія B въ видѣ формы $\varphi(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_q})$.

Такъ какъ эта форма по предположенію въ свою очередь зависитъ только отъ q изъ перемѣнныхъ u_i, то можемъ предположить, что она не зависитъ напр. отъ перемѣнныхъ $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_p$.

Тогда производныя отъ формы $\varphi(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_q})$ по перемѣннымъ $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_p$ будутъ равны нулю, и мы должны имѣть тождественно:

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{y_i}} \frac{\partial \overline{y_i}}{\partial u_j} \equiv \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{y_i}} b_{ij} = 0.$$

$$(j = q + 1, q + 2, \ldots, p)$$

Если хотя бы одна изъ постоянныхъ b_{ij} была бы отличной отъ нуля, только что написанныя равенства показали бы, что между первыми производными формы $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ не всѣ независимы; измѣреніе формы φ было бы меньше $q-1$; а слѣдовательно форма f не была бы формой $q-1$-го измѣренія, а это—противъ предположенія.

Поэтому мы должны принять, что всѣ постоянныя b_{ij} въ полученныхъ равенствахъ равны нулю, и, слѣдовательно, q первыхъ формулъ преобразованія (11) примутъ такой видъ:

$$y_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij} u_j. \qquad (i=1, 2, \ldots, q)$$

Это преобразованіе производитъ въ формѣ $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ самое общее обратимое преобразованіе перемѣнныхъ y_i къ новымъ q перемѣннымъ u_j.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что *мы преобразуемъ форму f самымъ общимъ преобразованіемъ къ наименьшему числу перемѣнныхъ, если, преобразовавъ ее какимъ нибудь способомъ къ наименьшему числу перемѣнныхъ, преобразуемъ полученную форму $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ самымъ общимъ линейнымъ преобразованіемъ къ новымъ q перемѣннымъ.*

Мы видѣли, что форма f $q-1$-го измѣренія выражается черезъ q линейныхъ выраженій z_i. Если бы намъ удалось найти другое выраженіе формы f черезъ новыхъ q линейныхъ выраженій v_i отъ p перемѣнныхъ x_i, то, на основаніи послѣдней теоремы, любое выраженіе z_i представляло бы собой линейную функцію выраженій v_i, и, наоборотъ, каждое выраженіе v_i должно было бы быть линейной функціей выраженіей z_i.

Мы прибѣгали для опредѣленія преобразованія, преобразующаго данную форму къ наименьшему числу перемѣнныхъ, къ интегрированію уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Но можно получить это преобразованіе и при помощи простого дифференцированія.

Форма f имѣетъ $t = \binom{p+m-2}{p-1}$ частныхъ производныхъ $m-1$-го порядка.

Обозначимъ производную

$$\frac{\partial^{(m-1)} f}{\partial x_1^{k_{1l}} \partial x_2^{k_{2l}} \partial x_3^{k_{3l}} \ldots \partial x_p^{k_{pl}}},$$

гдѣ $k_{1l}, k_{2l}, k_{3l}, \ldots, k_{pl}$ представляетъ собой одну изъ системъ цѣлыхъ неотрицательныхъ чиселъ, дающихъ въ суммѣ $m-1$ черезъ u_l, а одночленъ $x_1^{k_{1l}} x_2^{k_{2l}} x_3^{k_{3l}} \ldots x_p^{k_{pl}} \binom{m-1}{k_{1l} k_{2l} k_{3l} \ldots k_{pl}}$ черезъ B_l.

Такимъ образомъ будемъ имѣть t производныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_t$. Это будутъ линейныя функціи перемѣнныхъ x_i. Производныя отъ функціи u_l по x_i условимся обозначать черезъ u_{il}.

Предполагаемъ, какъ и прежде, форму f q — 1-го измѣренія, и, слѣдовательно, для нея существуютъ тождества (2) въ числѣ $p-q$ и тождество (10).

Если отъ обѣихъ частей тождествъ (2) возьмемъ $m-1$-я производныя, то получаемъ слѣдующія:

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij} u_{il} = 0. \qquad (12)$$

$$(j = q+1,\ q+2, \ldots, p) \quad (l = 1,\ 2, \ldots, t).$$

Такъ какъ функціи u_l линейныя, то полученныя тождества показываютъ, что результатъ подстановки $x_i = a_{ij}\,(i = 1, 2, \ldots, p)$ равняется нулю для $j = q+1,\ q+2, \ldots, p$; другими словами уравненія

$$u_l = 0 \quad (l = 1,\ 2,\ 3, \ldots, t) \qquad (13)$$

допускаютъ $p-q$ различныхъ рѣшеній a_{ij} $(i = 1,\ 2, \ldots, p)$.

Но тогда между линейными функціями u_l независимыхъ можетъ быть не больше q.

Предположимъ, что ихъ меньше; тогда уравненія (13) допустятъ по крайней мѣрѣ еще одно новое рѣшеніе, независимое отъ прежнихъ.

Пусть это будетъ $b_1, b_2, \ldots, b_p$. Результатъ подстановки $x_i = b_i$ въ производную u_l можно написать такъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} b_i \,.$$

Такъ какъ этотъ результатъ равенъ нулю, мы имѣемъ рядъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0\,. \qquad (l=1,\ 2, \ldots, t)$$

Унножаемъ ихъ на B_l и суммируемъ по l отъ 1 до t и получаемъ въ результатѣ:

$$\sum_{i=1}^{p} b_i \sum_{l=1}^{t} B_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0.$$

Но по свойству однородныхъ функцій мы имѣемъ:

$$\sum_{l=1}^{l} B_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \equiv m! \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

и наше тождество получаетъ видъ:

$$\sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Такимъ образомъ наше предположеніе, что между производными u_l независимыхъ меньше q, привело къ существованію новаго линейнаго тождества между первыми производными независимаго отъ прежнихъ тождествъ (2) и показало этимъ, что форма f измѣренія меньшаго $q-1$.

Мы должны, слѣдовательно, отбросить и это предположеніе. Остается принять, что среди производныхъ u_i какъ разъ q независимыхъ.

Итакъ измѣреніе формы f на единицу меньше числа независимыхъ между ея $m-1$-ми производными.

Предположимъ, что какъ разъ первыя $u_1, u_2, \ldots, u_q$ независимы между собою.

Беремъ отъ обѣихъ частей тождества (10) такія производныя $m-1$-го порядка, чтобы въ его лѣвой части получились производныя $u_1, u_2, \ldots, u_q$.

Въ правой же части получимъ линейныя выраженія отъ $z_1, z_2, \ldots, z_q$, и, слѣдовательно, можно написатв ихъ слѣдующимъ образомъ:

$$u_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij} z_j. \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, q) \qquad (14)$$

Опредѣлитель $\sum \pm b_{11}\ b_{22} \ldots b_{qq}$ не можетъ равняться нулю, такъ какъ тогда изъ полученныхъ равенствъ мы могли бы исключить всѣ z_j и получили бы линейное соотношеніе между независимыми функціями $u_1, u_2, \ldots, u_q$.

А разъ этотъ опредѣлитель отличенъ онъ нуля, то, разрѣшпвъ равенства (14) относительно z_j, выразимъ ихъ черезъ производныя u_i и, вставивъ полученный результатъ въ тождество (10), получимъ выраженіе формы f черезъ ея линейныя производныя.

Этого можно достичь и непосредственно, положивъ формулы

$$y_i = u_i \qquad (i=1, 2, \ldots, q)$$

$$y_i = x_i \qquad (i=q+1, q+2, \ldots, p)$$

вмѣсто формулъ (9) и выполнивъ преобразованіе.

Конечно, если функціи u_i, разсматриваемыя какъ функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_q$, зависимы, то придется измѣнить эти формулы надлежащихъ образомъ.

§ 2. Можно обобщить введенное понятіе объ измѣреніи алгебраическихъ формъ въ самыхъ различныхъ направленіяхъ и пойти дальше въ изученіи находящихся въ связи съ нимъ свойствъ формъ. Я не буду въ настоящей статьѣ касаться этихъ вопросовъ, а постараюсь выяснить на примѣрахъ важность введенія этого понятія.

Прежде всего замѣчу, что мы встрѣтимся съ этимъ вопросомъ при общей задачѣ канонизаціи формъ, т. е. въ задачѣ приведенія формъ при помощи линейнаго преобразованія къ простѣйшему виду.

Вопросъ объ измѣреніи, разсмотрѣнный въ предыдущемъ параграфѣ, ставитъ, собственно говоря, самую первую и самую простую задачу въ этой теоріи, а именно приведеніе данной формы при помощи надлежаще выбраннаго линейнаго преобразованія къ формѣ, зависящей отъ наименьшаго числа перемѣнныхъ. Какъ видно изъ предыдущаго, такая задача рѣшается во всей общности и притомъ при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій.

Отсюда ясно, что мы натолкнемся на этотъ случай чуть ли не въ каждомъ математическомъ вопросѣ, въ которомъ встрѣчаются алгебраическія формы. Я ограничусь въ настоящей работѣ двумя приложеніямъ.

Одно будетъ касаться теоріи исключенія, въ частности изображенія аналитически алгебраическихъ многообразій меньшаго измѣренія. Другое коснется приложенія алгебраическихъ формъ къ интегрированію обыкновенныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Этотъ параграфъ я посвящу первому вопросу, а слѣдующій второму.

Сначала разсмотримъ уравненія, заключающія въ себѣ произвольные параметры.

Возьмемъ уравненіе

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p, a_1, a_2, \ldots, a_r) = 0, \tag{1}$$

гдѣ $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — перемѣнныя, а величины $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — произвольные параметры.

Система рѣшеній $x_i = b_i$ можетъ удовлетворять уравненію (1) при какихъ угодно значеніяхъ параметровъ $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Величины $b_1, b_2, \ldots, b_p$ могутъ при этомъ быть постоянными, или нѣкоторыя изъ нихъ произвольными, а остальныя ихъ функціями.

Возьмемъ для примѣра два уравненія:

$$a_1 f(x_1, x_2, x_3) + a_2 f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

и

$$a_1 f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_2 f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Первое дастъ при произвольныхъ параметрахъ a_1 и a_2 нѣкоторое число точекъ пересѣченія двухъ кривыхъ:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

а второе—безконечное число точекъ, составляющихъ линію пересѣченія двухъ поверхностей,

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Поэтому видимъ, что въ этомъ случаѣ одна изъ величинъ x_1, x_2, x_3, x_4 можетъ имѣть совершенно произвольное значеніе.

Какъ видно изъ этихъ примѣровъ, въ виду произвольности параметровъ a_j уравненіе (1) эквивалентно нѣсколькимъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматриваемыя значенія перемѣнныхъ должны удовлетворять на ряду съ уравненіемъ (1) и уравненію

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p, c_1, c_2, \ldots, c_r) = 0, \tag{2}$$

гдѣ c_i—новыя значенія параметровъ a_i, внесенныя вмѣсто нихъ въ уравненіе (1). Можно составить подобнымъ образомъ сколько-угодно уравненій.

Предположимъ, что мы составили такимъ образомъ k уравненій и убѣдились въ ихъ независимости. Составляемъ $k+1$-е такимъ-же образомъ. Если оно не слѣдствіе прежнихъ k уравненій, то мы будетъ имѣть опять систему прежняго характера, но уже въ числѣ $k+1$ уравненій. Эта новая система можетъ оказаться несовмѣстимой, тогда наше уравненіе (1) не будетъ имѣть рѣшеній при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ a_i, и процессъ полученія новыхъ уравненій, дополняющихъ уравненіе (1), будетъ законченъ. Точно также процессъ будетъ законченъ, если вновь написанное уравненіе окажется слѣдствіемъ прежнихъ k уравненій. Въ этомъ случаѣ прибавленіе новыхъ станетъ также безполезнымъ, такъ какъ эти уравненія будутъ точно также слѣдствіемъ уже найденныхъ k.

Итакъ, прибавляя къ уравненію (1) уравненія типа (2), т. е. полученныя изъ уравненій (1) замѣной произвольныхъ параметровъ a_i новыми, независимыми отъ нихъ c_i, мы либо придемъ къ системѣ несовмѣстныхъ уравненій, либо къ такой системѣ уравненій, что всякое новое будетъ слѣдствіемъ этой системы.

Такимъ образомъ уравненіе (1) при условіи, чтобы его рѣшенія не зависили отъ произвольныхъ параметровъ, которые въ него входятъ, эквивалентно системѣ уравненій.

Это обстоятельство позволяетъ представить при помощи одного уравненія линію, поверхность и далѣе въ пространствѣ p-го измѣренія.

Прежде чѣмъ изложить этотъ вопросъ во всей его общности, разберемъ частный случай кривыхъ въ трехмѣрномъ пространствѣ.

Пусть уравненія

$$\begin{aligned} f_0(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0 \\ \varphi_0(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\psi_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{4}$$

гдѣ всѣ три функціи f_0, φ_0, ψ_0 представляютъ собой однородные полиномы перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, x_4, опредѣляютъ неразлагаемую кривую A.

Дѣло происходитъ слѣдующимъ образомъ: уравненія (3) опредѣляютъ въ пересѣченіи нѣкоторую кривую, которая состоитъ изъ двухъ частей, одна часть будетъ кривая A, а другая кривая B, дополняющая ее до полнаго пересѣченія поверхностей, опредѣляемыхъ уравненіями (3). Третья же поверхность, опредѣляемая уравненіемъ (4), проходитъ черезъ кривую A, но ни кривая B и никакая ея часть не находится на этой поверхности. Такимъ образомъ роль третьей поверхности ограничивающая,—она исключаетъ дополнительную кривую B. Въ томъ-же случаѣ, когда кривая A представляетъ полное пересѣченіе поверхностей, опредѣляемыхъ первыми двумя уравненіями, третье уравненіе перестаетъ играть существенную роль и можетъ быть отброшено по желанію, но можетъ быть и оставлено, чтобы не разсматривать отдѣльно этого случая.

Возьмемъ теперь произвольную точку пространства $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ и найдемъ уравненіе конуса, имѣющаго точку a_i за вершину, а кривую A за направляющую.

Сначала найдемъ уравненіе конуса, имѣющаго вершину въ точкѣ a_i и проходящаго черезъ полное пересѣченіе двухъ первыхъ поверхностей.

Возьмемъ точку x_i на этомъ пересѣченіи. Послѣдняя совмѣстно съ точкой a_i опредѣлитъ образующую искомаго конуса. Обозначимъ координаты какой нибудь точки на этой образующей черезъ y_1, y_2, y_3, y_4. Тогда онѣ удовлетворятъ слѣдующимъ условіямъ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

гдѣ написанное равенство надо понимать такъ, что каждый опредѣлитель этой матриссы равенъ нулю. Равенство (5) эквивалентно двумъ условіямъ. Координаты x_i удовлетворяютъ кромѣ того уравненіямъ (3). Такъ какъ всѣ эти уравненія однородны относительно перемѣнныхъ x_i, то изъ уравненій (3) и (5) можно ихъ исключить.

Получимъ результатъ въ видѣ полинома однороднаго относительно перемѣнныхъ y_i, приравненнаго нулю:

$$\varPhi(y_i, a_i) = 0. \tag{6}$$

Это и будетъ уравненіе искомаго конуса, проходящаго черезъ полное пересѣченіе первыхъ двухъ поверхностей.

Если мы помножимъ всѣ элементы средней строки матриссы (5) на a_4 и вычтемъ изъ нихъ соотвѣтственно всѣ элементы третьей строки, помноженные на y_4, то мы дадимъ ей слѣдующій видъ:

$$\left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_4y_1 - a_1y_4 & a_4y_2 - a_2y_4 & a_4y_3 - a_3y_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}\right| = 0. \tag{7}$$

Этотъ видъ матриссы покажетъ, что результатъ исключенія (6) будетъ зависѣть только отъ выраженій $z_1 \equiv a_4y_1 - a_1y_4$, $z_2 \equiv a_4y_2 - a_2y_4$, $z_3 \equiv a_4y_3 - a_3y_4$, и, слѣдовательно, полиномъ $\varPhi(y_i, a\ )$ будетъ второго измѣренія, такъ какъ существуетъ линейное преобразованіе, которое превращаетъ его въ форму, зависящую только отъ перемѣнныхъ z_1, z_2, z_3.

По той же причинѣ полиномъ $\varPhi(y_i, a_i)$ будетъ удовлетворять уравненію въ частныхъ производныхъ:

$$a_1 \frac{\partial \varPhi}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial \varPhi}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial \varPhi}{\partial y_3} + a_4 \frac{\partial \varPhi}{\partial y_4} = 0. \tag{8}$$

Въ самомъ дѣлѣ, онъ представляетъ функцію трехъ выраженій z_1, z_2, z_3, а каждое изъ этихъ послѣднихъ удовлетворяетъ ему.

Полиномъ $\varPhi(y_i, a_i)$ можно представить, какъ произведеніе неприводимыхъ полиномовъ $\varPhi_j(y_i, a_i)$ ($j = 1, 2, 3, \ldots, l$) въ надлежащихъ степеняхъ.

Легко убѣдиться, что каждый изъ этихъ полиномовъ удовлетворяетъ уравненію (8).

Разсмотримъ, напр. полиномъ $\varPhi_1$. Можно представить полиномъ $\varPhi(y_i, a_i)$ въ видѣ произведенія $\varPhi_1^k U$, гдѣ множитель U представляетъ собой полиномъ, не дѣлящійся на $\varPhi_1$.

Обозначимъ операцію

$$a_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + a_4 \frac{\partial}{\partial y_4}$$

символомъ D, написаннымъ передъ обозначеніемъ функціи. Тогда тождество (8) перепишется въ новомъ видѣ:

$$Uk\Phi_1^{k-1} D\Phi_1 + \Phi_1^k DU = 0$$

или

$$kUD\Phi_1 + \Phi_1 DU = 0.$$

Такъ какъ полиномъ U не дѣлится на полиномъ Φ_1 по предположенію, то для возможности существованія нашего тождества необходимо, чтобы полиномъ $D\Phi_1$ дѣлился на полиномъ Φ_1, а это невозможно, если только полиномъ $D\Phi_1$ не обращается тождественно въ нуль.

Итакъ, каждый изъ неприводимыхъ множителей Φ_i полинома $\Phi(y_i, a_i)$ будетъ удовлетворять уравненію (8), т. е. будемъ имѣть тождественно

$$D\Phi_j(y_i,\ a_i) = 0. \qquad (j=1, 2, \ldots, l) \tag{10}$$

Отсюда слѣдуетъ, что каждый полиномъ Φ_j будетъ второго измѣренія, какъ функція только трехъ линейныхъ выраженій z_i, и слѣдовательно, уравненіе

$$\Phi_j(y_i,\ a_i) = 0 \tag{11}$$

представитъ собой уравненіе конуса съ вершиной въ точкѣ a_i.

Съ другой стороны кривая пересѣченія поверхностей, опредѣляемыхъ уравненіями (3), состоитъ изъ ряда неразлагаемыхъ кривыхъ S_1, S_2, $S_3, \ldots, S_l$.

На основаніи предыдущаго всѣ точки напр. кривой S_1 обращаютъ въ нуль полиномъ $\Phi(y_i,\ a_i)$ при какихъ-угодно значеніяхъ параметровъ a_i.

Пусть кривая S_1 опредѣляется двумя алгебраическими функціями Θ_1 и Θ_2, такъ что для координатъ всѣхъ ея точекъ имѣемъ слѣдующія соотношенія:

$$y_1 = y_4 \Theta_1\left(\frac{y_3}{y_4}\right), \quad y_2 = y_4 \Theta_2\left(\frac{y_3}{y_4}\right). \tag{12}$$

Подставляемъ значенія координатъ y_1 и y_2 по формуламъ (12) въ полиномъ $\Phi(y_i,\ a_i)$ и получимъ тождественный нуль.

Но результатъ этой подстановки равняется произведенію результатовъ той же подстановки въ полиномы Φ_j.

Очевидно, что, если ни одинъ изъ этихъ множителей не обращается тождественно въ нуль при какихъ-угодно значеніяхъ величинъ $\frac{y_3}{y_4}$, a_1, a_2, a_3, a_4, то не можетъ обратиться въ нуль и ихъ произведеніе.

Итакъ, для всѣхъ точекъ кривой S_1 долженъ обращаться въ нуль одинъ изъ полиномовъ Φ_j при какихъ угодно значеніяхъ параметровъ a_i.

Пусть это будетъ Φ_1.

Найдемъ сѣченіе этого конуса съ плоскостью $y_4 = 0$. Для этого достаточно положить въ уравненіи

$$\Phi_1(y_i, a_i) = 0$$

y_4 равнымъ нулю, и полиномъ Φ_1 обратится въ полиномъ Φ'_1, зависящій только отъ трехъ перемѣнныхъ y_1, y_2, y_3.

Такъ какъ полиномъ Φ_1 есть функція выраженій z_1, z_2, z_3, то для обратнаго полученія полинома Φ_1 четырехъ перемѣнныхъ изъ полинома Φ'_1 достаточно замѣстить въ послѣднемъ перемѣнныя y_1, y_2, y_3 черезъ $\frac{z_1}{a_4}$, $\frac{z_2}{a_4}$, $\frac{z_3}{a_4}$.

Если точка a_i не занимаетъ въ пространствѣ спеціальнаго положенія относительно кривой S_1, то число прямыхъ, проходящихъ черезъ точку a_i и встрѣчающихъ кривую S_1 не менѣе двухъ разъ—конечно.

Поэтому, если мы проведемъ черезъ точку a_i такую плоскость K, которая не проходитъ ни черезъ одну подобную прямую, то она пересѣчетъ кривую въ столькихъ точкахъ, каковъ ея порядокъ. Соединяя эти точки пересѣченія съ точкой a_i, получимъ столько прямыхъ, каковъ порядокъ кривой S_1. Но пересѣченіе этихъ прямыхъ съ плоскостью $y_4 = 0$ даетъ намъ точки пересѣченія плоскости K съ проекціей кривой S_1 изъ точки a_i на плоскость $y_4 = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что эта проекція того же порядка, какъ и кривая S_1 и, слѣдовательно, выражается въ плоскости $y_4 = 0$ уравненіемъ $P = 0$, гдѣ подъ обозначеніемъ P подразумѣваемъ однородный полиномъ отъ перемѣнныхъ y_1, y_2, y_3 порядка одинаковаго съ порядкомъ кривой S_1.

Этотъ полиномъ P долженъ дѣлить полиномъ Φ'_1; но, такъ какъ послѣдній неприводимъ (иначе и полиномъ Φ_1 былъ бы приводимымъ), то они могутъ различаться лишь постояннымъ множителемъ, и мы приходимъ къ заключенію, что порядокъ полинома Φ_1 долженъ быть равенъ порядку кривой S_1.

На основаніи разсужденій, аналогичныхъ только—что написаннымъ, мы можемъ убѣдиться, что, если бы полиномъ Φ_1 обращался въ нуль при какихъ угодно значеніяхъ параметровъ a_i не только для всѣхъ точекъ кривой S_1, но и для всѣхъ безъ исключенія точекъ какой-нибудь другой кривой S, то порядокъ полинома Φ_1 былъ бы не ниже суммы порядковъ кривыхъ S_1 и S.

Отсюда слѣдуетъ, что каждый неприводимый множитель полинома $\Phi(y_i, a_i)$, приравненный нулю, дастъ уравненіе конуса, проходящаго черезъ неразлагаемую кривую пересѣченія поверхностей, опредѣляемыхъ уравненіями (3) съ вершиной въ точкѣ a_i и, слѣдовательно, при произвольности параметровъ a_i опредѣлитъ соотвѣтствующую неразлагаемую кривую вполнѣ.

Въ числѣ этихъ множителей найдется и такой, при помощи котораго опредѣляется и кривая A.

Точно такому же изслѣдованію подвергнемъ пересѣченіе двухъ поверхностей: 1) опредѣляемой первымъ изъ уравненій (3) и 2) опредѣляемой уравненіемъ (4).

Согласно предыдущему, мы найдемъ уравненіе конуса съ вершиной въ точкѣ a_i, если исключимъ перемѣнныя x_i изъ уравненій обѣихъ только что выбранныхъ нами поверхностей и изъ уравненій (5).

Уравненіе это получится въ такомъ видѣ:

$$\psi(y_i, a_i) = 0,$$

гдѣ функція $\psi(y_i, a_i)$—нѣкоторый полиномъ, удовлетворяющій тѣмъ-же условіямъ, что и полиномъ $\Phi(y_i, a_i)$.

Полиномъ $\psi(y_i, a_i)$ разлагается на неприводимые множители, которые соотвѣтствуютъ неразлагаемымъ кривымъ, составляющимъ полное пересѣченіе двухъ новыхъ поверхностей. Въ числѣ этихъ кривыхъ находится и кривая A. Если мы приравняемъ нулю полиномъ, отвѣчающій кривой A, то получимъ уравненіе конуса съ вершиной a_i, проходящаго черезъ кривую A. Уравненіе этого конуса мы уже получили въ такой формѣ:

$$F(y_i, a_i) = 0.$$

Слѣдовательно, полиномъ F будетъ дѣлить и полиномъ $\psi(y_i, a_i)$ и представитъ такимъ образомъ общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $\Phi(y_i, a_i)$ и $\psi(y_i, a_i)$ и можетъ быть найденъ при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій.

(Замѣтимъ, что опредѣленіе полиномовъ $\psi(y_i, a_i)$ и $\Phi(y_i, a_i)$ станетъ затруднительнымъ, если полиномы f_0, φ_0, ψ_0 будутъ имѣть общихъ дѣлителей. Но измѣненія, которыя необходимо сдѣлать въ этомъ случаѣ, настолько просты, что я не буду на этомъ останавливаться).

Тогда уравненіе

$$F(y_i,\ a_i)=0$$

будетъ того же порядка, какъ и кривая A. Оно представитъ конусъ того же порядка съ вершиной въ точкѣ a_i, проходящій черезъ кривую A и при произвольности параметровъ a_i опредѣлитъ ее вполнѣ. Другими словами, если мы въ этомъ уравненіи будемъ давать произвольнымъ постояннымъ a_i новыя значенія и присоединять полученныя уравненія до тѣхъ поръ, пока это дополненіе не перестанетъ измѣнять полученной системы уравненій, то найденная система уравненій будетъ эквивалентна системѣ уравненій (3) и (4).

Такое аналитическое представленіе кривыхъ въ пространствѣ важно тѣмъ, что ставитъ ихъ изученіе въ зависимость отъ полинома одного и того же характера. Обращаю вниманіе на то обстоятельство, что полиномъ $F(y_i,\ a_i)$, зависящій отъ четырехъ перемѣнныхъ 2-го измѣренія.

Подобное представленіе кривой можетъ быть примѣнено напр. для опредѣленія числа существенныхъ параметровъ отъ которыхъ зависитъ самая общая кривая двойной кривизны даннаго порядка.

Ради этого нетрудно показать, что полиномъ $F(y_i,\ a_i)$ будетъ цѣлой функціей миноровъ, составленныхъ изъ элементовъ двухъ нижнихъ строкъ матриссы (5).

Но такъ какъ эти шесть миноровъ можно разсматривать, какъ координаты произвольной прямой, то уравненіе

$$F(y_i,\ a_i)=0$$

по замѣнѣ величинъ y_i, a_i этими минорами дастъ уравненіе комплекса прямыхъ, встрѣчающихъ кривую A. Онъ будетъ того же порядка, какъ и сама кривая A.

Этотъ комплексъ будетъ частнаго вида, и разность между числомъ его коэффиціентовъ и числомъ независимыхъ условій между ними, уменьшенная на единицу, дастъ намъ число существенныхъ параметровъ, отъ которыхъ зависитъ кривая.

То, что изложено здѣсь о кривой, можетъ быть совершенно аналогично распространено на всѣ алгебраическія многообразія въ пространствѣ высшаго измѣренія.

Такъ какъ полное изложеніе со всѣми доказательствами, излишне увеличило бы размѣръ настоящей статьи, особенно въ виду того, что потребовалось бы предварительное изложеніе нѣкоторыхъ тонкихъ вопросовъ алгебраическаго исключенія, то я ограничусь изложеніемъ однихъ результатовъ, исходя изъ наиболѣе простого опредѣленія алгебраическаго многообразія.

Пусть уравненія:

$$f_i(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_{p+1}) = 0\,, \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ q+1) \tag{13}$$

гдѣ подъ обозначеніемъ f_i подразумѣваемъ однородные полиномы въ перемѣнныхъ x_i, опредѣляютъ неразлагающееся многообразіе $p-q$-го измѣренія A.

Предполагаемъ, кромѣ того, что каждыя q уравненій изъ $q+1$ уравненій (13) не удовлетворяются всѣми точками алгебраическаго многообразія измѣренія порядка большаго $p-q$. Тогда какія-нибудь q изъ этихъ уравненій опредѣлятъ многообразіе $p-q$-го измѣренія, составной частью котораго будетъ многообразіе A, и $q+1$-е уравненіе будетъ играть ограничивающую роль, выдѣляя изъ этого многообразія, многообразіе A.

Разсмотримъ q первыхъ уравненій въ системѣ (13) и многообразіе B $p-q$-го порядка, опредѣляемое ими.

Мы можемъ превратить это многообразіе въ многообразіе $p-1$-го измѣренія, замѣщая каждую точку его элементарнымъ многообразіемъ $q-1$-го измѣренія.

Обозначимъ координаты произвольной точки X многообразія B черезъ x_i, координаты $q-1$ произвольно расположенныхъ точекъ C_j черезъ a_{ji} $(j=1,\ 2,\ 3, \ldots, q-1)$, а текущія координаты точки элементарнаго многообразія $q-1$-го измѣренія C, опредѣляемаго q точками X и $C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots, C_{q-1}$ черезъ y_i

Тогда между этими величинами будутъ имѣть мѣсто соотношенія, которыя мы получимъ, приравнявъ нулю каждый опредѣлитель слѣдующей матриссы

$$\left|\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{p+1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_{p+1} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{q-1,1} & a_{q-1,2} & a_{q-1,3} & \ldots & a_{q-1,\,p+1} \end{array}\right| \tag{14}$$

Полученныя соотношенія будутъ заключать только $p-q+1$ независимыхъ.

Изъ q уравненій многообразія B и изъ $p-q+1$ уравненій элементарнаго многообразія C можно исключить перемѣнныя x_i, и получимъ одно уравненіе, заключающее только перемѣнныя y_i и произвольныя постоянныя a_{ji}:

$$\Phi(y_i,\ a_{ji}) = 0\,,$$

причемъ $\Phi(y_i, a_{ji})$ — однородный полиномъ въ перемѣнныхъ y_i, удовлетворяющій $q-1$ уравненіямъ въ частныхъ производныхъ:

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_{ji} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \equiv 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, q-1) \tag{15}$$

и слѣдовательно $p-q+1$-го измѣренія.

Выбросивъ изъ системы уравненій вмѣсто уравненія $f_{q+1}=0$ уравненіе $f_q=0$, получаемъ новое многообразіе B_1 $p-q$-го измѣренія.

Изъ уравненій многообразія B_1 и изъ $p-q+1$ уравненій элементарнаго многообразія C исключаемъ перемѣнныя x_i и получаемъ въ результатѣ уравненіе:

$$\Psi(y_i, a_{ji})=0,$$

гдѣ полиномъ $\Psi(y_i, a_{ji})$ обладаетъ тѣми же свойствами, что и полиномъ $\Phi(y_i, a_{ji})$.

Разыскиваемъ общій наибольшій дѣлитель этихъ двухъ полиномовъ. Пусть это будетъ полиномъ $F(y_i, a_{ji})$. Оказывается, что онъ будетъ неприводимъ, его порядокъ будетъ равенъ порядку многообразія A и онъ удовлетворитъ условіямъ (15), и, слѣдовательно, будетъ, какъ алгебраическая форма, $p-q+1$-го измѣренія.

Уравненіе

$$F(y_i, a_{ji})=0 \tag{16}$$

будетъ удовлетворяться всѣми точками многообразія A, каковы бы ни были значенія постоянныхъ a_{ji}, и, кромѣ того, давая въ уравненіи (16) произвольнымъ параметрамъ a_{ji} различныя значенія достаточное число разъ, получимъ систему, эквивалентную системѣ (13), т. е. вполнѣ опредѣляющую многообразіе A.

Можно продолжить изслѣдованіе аналогично изслѣдованію кривой двоякой кривизны и показать, что полиномъ $F(y_i, a_i)$ — цѣлая раціональная функція миноровъ матриссы (14), составленныхъ изъ q ея строкъ, т. е. зависитъ отъ перемѣнныхъ y_i и постоянныхъ a_{ji} только черезъ посредство означенныхъ миноровъ.

Но такъ какъ эти миноры можно разсматривать какъ кординаты элементарнаго многообразія $q-1$-го измѣренія въ пространствѣ p-го измѣренія, то уравненіе (16) можно разсматривать, какъ соотношенія между этими минорами.

Такимъ образомъ, если введемъ въ уравненіе (16) эти координаты, то получимъ уравненіе собранія элементарныхъ многообразій $q-1$-го измѣренія, пересѣкающихся съ многообразіемъ A. Порядокъ этого уравненія будетъ равенъ порядку многообразія A.

§ 3. Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что важные вопросы алгебры и геометріи находятся въ связи съ понятіемъ объ измѣреніи формъ. Настоящій же параграфъ я посвящу той роли, которую это понятіе играетъ въ интегрированіи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Знаменитый французскій математикъ G. Darboux въ двухъ замѣткахъ [1]) подъ заглавіемъ «Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante» положилъ основаніе примѣненію теоріи алгебраическихъ формъ къ интегрированію обыкновенныхъ линейныхъ дифференціональныхъ уравненій однороднаго типа. Развитіе идей G. Darboux привело G. H. Halphen'a въ его работѣ: «Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires» [2]) къ новой постановкѣ этого вопроса, и онъ далъ главные основы примѣненія теоріи алгебраическихъ формъ. Этому вопросу посвященъ цѣлый рядъ работъ, занимающихся либо примѣненіемъ идей G. Darboux и G. Halphen'a къ частнымъ случаямъ, либо дальнѣйшимъ усовершенствованіемъ этихъ методовъ. Въ диссертаціи Н. М. Гюнтера подъ заглавіемъ: «О приложеніяхъ теоріи алгебраическихъ формъ къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій» можно найти подробное изложеніе этой теоріи и литературу по этому вопросу до 1903-го года.

Въ настоящей работѣ я стремлюсь показать, какія упрощенія и выгоды вноситъ въ эту теорію понятіе объ измѣреніи формъ.

Возьмемъ вмѣстѣ съ G. Darboux систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій однороднаго типа

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{p} a_{ji} x_i \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ldots,p) \tag{1}$$

и предположимъ, что нѣкоторая форма перемѣнныхъ $x_i\,(i=1,\ 2,\ldots,p)$ съ коэффиціентами, которые могутъ зависѣть отъ перемѣнной t, будетъ первымъ интеграломъ системы.

Обозначимъ эту форму черезъ $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)$ и будемъ, слѣдовательно, имѣть тождественно:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{p} a_{ji} x_i = 0. \tag{2}$$

Замѣтимъ, что, какъ извѣстно, система (1) будетъ имѣть p различныхъ линейныхъ интеграловъ типа

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ji} x_i = C_j\,, \qquad (j=1,2,3,\ldots,p) \tag{3}$$

---

[1]) Comptes rendus T. XC. p. 524 et 594.

[2]) Journal de Mathématiques (de Liouville) 4-ème sèrie. 1885 p. 11.

гдѣ, слѣдовательно, опредѣлитель, составленный изъ функцій a_{ji} $\sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{pp}$ будетъ отличенъ отъ нуля.

По теоремѣ G. Darboux каждая коваріанта формы f, умноженная на нѣкоторой множитель, въ видѣ функціи независимой перемѣнной t, будетъ также интеграломъ системы (1).

Нетрудно показать на примѣрахъ, что могутъ существовать формы p перемѣнныхъ, но измѣренія меньшаго $p-1$, которыя не имѣютъ ни одной коваріанты, отличной отъ нуля. Поэтому въ этомъ случаѣ теорема G. Darboux не даетъ новаго интеграла.

Поэтому я предлагаю слѣдующій пріемъ: опредѣлить предварительно измѣреніе формы f и вычислить преобразованіе, которое приводитъ ее къ наименьшему числу перемѣнныхъ.

Пусть это преобразованіе дается напр. такими формулами:

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{i=1}^{p} b_{ji} x_i && (j=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ p) \\ y_j &= x_j\,, && (j=q+1,\ q+2,\ldots,\ p) \end{aligned} \tag{4}$$

и, слѣдовательно, форма f въ силу этого преобразованія переходитъ въ форму $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ q перемѣнныхъ, коэффиціенты которой само собой разумѣется, могутъ зависѣть отъ независимой перемѣнной t.

Если теперь мы преобразуемъ систему (1) къ новымъ перемѣннымъ y_j, то получимъ снова систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій однороднаго типа.

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{p} c_{ji} y_i\,. \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ p) \tag{5}$$

Форма будетъ интеграломъ этой вновь полученной системы, и мы должны имѣть тождественно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \sum_{i=1}^{p} c_{ji} y_i = 0. \tag{6}$$

Такъ какъ форма φ не зависитъ отъ перемѣнныхъ $y_{q+1}, y_{q+2}, \ldots, y_p$, то полученное тождество зависитъ отъ этихъ перемѣнныхъ линейно, и мы должны имѣть отдѣльно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \sum_{i=1}^{q} c_{ji} y_i = 0\,,$$

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} c_{ji} = 0. \qquad (i=q+1,\ q+2,\ldots,\ p).$$

Въ противномъ случаѣ можно было бы опредѣлить одну изъ перемѣнныхъ y_{q+1}, $y_{q+2}, \ldots, y_p$ въ функціи остальныхъ, не заключающей произвольной постоянной.

Затѣмъ, если хотя бы одна изъ функцій c_{ji} была бы отлична отъ нуля, на основаніи изслѣдованій § 1-го форма φ была бы порядка ниже $q-1$. Отсюда слѣдуетъ, что уравненія (5) должны имѣть видъ:

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{q} c_{ji} y_i \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, q)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{p} c_{ji} y_i . \qquad (j=q+1, q+2, \ldots, p)$$

Мы видимъ, что система (1) по преобразованіи разбилась на двѣ части: первая представляетъ собой самостоятельную систему меньшаго порядка q съ извѣстнымъ интеграломъ φ, а интегрированіе второй, если намъ удастся проинтегрировать первую, сводится къ интегрированію системы:

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=q+1}^{p} c_{ji} y_i \qquad (j=q+1, q+2, \ldots, p).$$

порядка $p-q$ и квадратурамъ.

Такимъ образомъ, если даже форма φ также не будетъ имѣть коваріанты, отличный отъ нуля, и, слѣдовательно, этотъ пріемъ не дастъ новаго интеграла, все таки онъ сводитъ интегрированіе системы къ послѣдовательному интегрированію двухъ линейныхъ системъ болѣе низкаго порядка, изъ которыхъ одна съ извѣстнымъ интеграломъ.

Къ этому должно прибавить, что для полученія того же результата нѣтъ необходимости, чтобы форма f удовлетворяла уравненію (2) тождественно. Достаточно, чтобы оно обращалось въ нуль, какъ слѣдствіе уравненія:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p) = 0, \tag{7}$$

т. е. достаточно, чтобы форма f была бы частнымъ интеграломъ G. Darboux.

Покажемъ, что въ данномъ случаѣ форма f, умноженная на нѣкоторую функцію независимой перемѣнной t, будетъ первымъ интеграломъ системы (1).

Достаточно ограничиться случаемъ, когда функція f—неприводимый полиномъ. Тогда для того, чтобы уравненіе (2) было бы слѣдствіемъ уравненія (7), достаточно, если полиномъ, находящійся въ лѣвой части уравненія (2), отличается только множителемъ отъ полинома $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p)$. Этотъ множитель будетъ нѣкоторой функціей перемѣнной t и вычисляется легко: достаточно раздѣлить какой-нибудь коэффиціентъ перваго полинома на соотвѣтствующій коэффиціентъ второго; т. е. этотъ множитель равенъ отношенію коэффиціентовъ при одинаковыхъ членахъ въ обоихъ полиномахъ. Обозначивъ его λ, мы можемъ написать тождество:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_{i=1}^{p}a_{ji}x_i-\lambda f=0,$$

которое покажетъ, что форма

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,x_p)\,e^{-\int\lambda dt}$$

первый интегралъ системы (1).

По общему свойству первыхъ интеграловъ всякій интегралъ представляетъ собой функцію полнаго комплекта независимыхъ интеграловъ.

Въ настоящемъ случаѣ кромѣ полинома $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_p)$ существуетъ p линейныхъ независимыхъ интеграловъ (3). На основаніи предыдущаго мы вправѣ предположить, что форма f будетъ измѣренія $p-1$, т. е. не можетъ быть выражена черезъ число меньшее p независимыхъ линейныхъ выраженій. Поэтому полиномъ f можетъ быть выраженъ черезъ интегралы (3). Кромѣ того въ это выраженіе войдутъ всѣ эти интегралы полностью.

Выраженіе это можно получить слѣдующимъ образомъ:

Обозначаемъ интегралъ $\sum\limits_{i=1}^{p}a_{ji}x_i$ черезъ z_i и получаемъ рядъ равенствъ:

$$z_j=\sum_{i=1}^{p}a_{ji}\,x_i. \qquad (j=1,\ 2.\ 3,\ldots,\ p) \tag{8}$$

Разрѣшаемъ эти равенства относительно перемѣнныхъ x_i и вставимъ полученныя выраженія въ интегралъ f. На основаніи вышесказаннаго онъ долженъ обратиться въ полиномъ отъ z_i съ *постоянными* коэффиціентами. Такимъ образомъ по G. H. Halphen'у задача сводится къ опредѣленію такого линейнаго преобразованія перемѣнныхъ x_i, которое преобразовало бы форму $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_p)$ въ форму, зависящую только отъ перемѣнныхъ z_i, коэффиціенты которой уже не будутъ зависѣть отъ перемѣнной t.

Эта задача всегда возможна, только при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ относительно полинома $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_p)$ въ рѣшеніе войдутъ неопредѣленныя величины. По роду задачи ихъ надо считать за неизвѣстныя функціи перемѣнной t.

Разрѣшивъ полученныя преобразованія относительно перемѣнныхъ z_i, мы получимъ формулы (8). Если въ нихъ не будетъ заключаться неизвѣстныхъ функцій независимой перемѣнной t, то интегралы нашей системы будутъ найдены. Въ томъ же случаѣ, когда въ нихъ войдутъ неизвѣстныя функціи, можно образовать систему дифференціальныхъ уравненій порядка равнаго числу этихъ неизвѣстныхъ функцій.

Итакъ окончательное рѣшеніе изучаемой задачи зависитъ отъ опредѣленія указаннаго преобразованія. Рѣшенію этой задачи я надѣюсь посвятить другую статью. А теперь перейдемъ къ задачѣ, которую изслѣдованія G. H. Halphen'a тѣсно связали съ только что изложенной.

Дано дифференціальное уравненіе:

$$y^{(m)}+p_1y^{(m-1)}+p_2y^{(m-2)}+\ldots+p_{m-1}y'+p_my=0. \tag{9}$$

Французскій ученый ставитъ такую задачу:

Извѣстно значеніе цѣлой и однородной функціи $f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$ n-го порядка съ постоянными коэффиціентами отъ частныхъ интеграловъ уравненія (9). Опредѣлить значенія частныхъ интеграловъ y_i?

Оказывается, что эта задача всегда разрѣшима, если не существуетъ цѣлой и однородной функціи тѣхъ же частныхъ интеграловъ и того же порядка, которая равнялась бы нулю.

Для ознакомленія съ общей теоріей я позволю себѣ отослать читателя къ уже цитированнымъ работамъ G. H. Halphen'a и Н. М. Гюнтера и посвятить остальную часть предлагаемымъ мною дополненіямъ.

При этомъ выяснится степень трудности задачи и обстоятельства, отъ которыхъ зависитъ рѣшеніе. Мы увидимъ между прочимъ, что можно использовать въ цѣляхъ интегрированія не только ту форму, значеніе которой намъ дано, но и ту, значеніе которой равно нулю.

G. H. Halphen на ряду съ формой $f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ разсматриваетъ всѣ поляры, полученныя изъ нея при помощи дифференціальныхъ операцій типа $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^{(i)} \dfrac{\partial}{\partial y_j}$, гдѣ i число, обозначающее порядокъ производныхъ $y_j^{(i)}$, будетъ меньше m.

Такимъ образомъ у насъ составится $N=\binom{m+n-1}{m-1}$ функцій отъ частныхъ интеграловъ и ихъ производныхъ до m—1-го порядка включительно. Расположимъ эти функціи въ какомъ-нибудь порядкѣ и пронумеруемъ, въ результатѣ чего функція $f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$ у насъ будетъ обозначена черезъ f_0, а всѣ остальныя черезъ f_g, гдѣ индексу g будемъ давать всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до N—1.

Эти функціи f_g обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что ихъ производныя выражаются черезъ нихъ линейно.

Въ самомъ дѣлѣ, это очевидно для всѣхъ функцій f_g, которыя не заключаютъ m—1-хъ производныхъ отъ частныхъ рѣшеній y_i,

По свойству полярныхъ операцій функція f_g, зависящая отъ производныхъ $y_j^{(m-1)}$ можетъ быть получена при помощи операціи $\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial y_j}$ изъ другой функціи типа f_g, напр. f_h, такъ что имѣемъ:

$$\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}^l f_h \equiv \alpha f_g ,$$

гдѣ α нѣкоторое раціональное число.

Тогда производная отъ функціи f_g будетъ имѣть слагаемое новаго типа:

$$\frac{l}{\alpha}\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}^{l-1} f_h.$$

Но въ силу уравненія (9) мы имѣемъ

$$y_j^{(m)} = -\sum_{i=1}^{m} p_i y_j^{(m-i)}, \qquad (j=1, 2, 3,\ldots, m),$$

и, слѣдовательно, это слагаемое представится въ видѣ такой суммы:

$$-\frac{l}{\alpha}\sum_{i=1}^{m} p_i \left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-i)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}^{l-1} f_h.$$

Изъ выраженія этой суммы видно, что коэффиціенты уравненія (9) p_i умножаются на одну изъ функцій $f(g=0, 1, 2,\ldots, N-1)$, и, слѣдовательно, предложеніе, что производная каждой изъ функцій f_g выражается черезъ нихъ линейно, справедливо во всѣхъ случаяхъ.

Обозначимъ значеніе функціи, которое она пріобрѣтаетъ по подстановкѣ вмѣсто частныхъ рѣшеній y_i ихъ выраженій черезъ перемѣнную t, черезъ $\psi(t)$ и выводимъ помощью послѣдовательнаго дифференцированія и принимая во вниманіе только-что выясненное предложеніе, изъ равенства

$$\psi(t) = f_0$$

новыя: (10)

$$\psi^{(k)}(t) = \sum_{g=0}^{N-1} e_{gk} f_g , \qquad (k=1, 2, 3,\ldots, N)$$

гдѣ коэффиціенты e_{gk}—цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ функцій p_i и ихъ производныхъ.

Изъ уравненій (10) можно исключить функціи f_g и получить соотношеніе, которому должна удовлетворять функція $\psi(t)$. Полученное соотношеніе можно разсматривать также, какъ дифференціальное уравненіе для опредѣленія функціи $\psi(t)$. N его частныхъ интеграловъ будутъ, очевидно, одночлены n-го порядка, составленные изъ частныхъ интеграловъ уравненія (9), и также всякій однородный полиномъ съ постоянными коэффиціентами, составленный изъ частныхъ рѣшеній y_i.

Но уравненія (10) могутъ составлять такую систему, что уже $N+1-s$-ое уравненіе будетъ слѣдствіемъ предыдущихъ. Тогда изъ $N-s+1$ уравненій можно исключить всѣ функціи f_g, и потому получимъ, что уравненіе, которому удовлетворяютъ всѣ одночлены n-го порядка, будетъ порядка $N-s$. Отсюда слѣдуетъ, что между этими одночленами должно существовать s соотношеній съ постоянными коэффиціентами. Эти соотношенія выразятся въ видѣ равенства нулю однородныхъ полиномовъ отъ частныхъ интеграловъ y_1, y_2, $y_3, \ldots, y_m$, которые мы назовемъ $B_1, B_2, \ldots, B_s$.

Такимъ образомъ можно всегда установить число s этихъ линейныхъ соотношеній. $N+1$ равенствъ (10), разсматриваемыя, какъ линейныя алгебраическія уравненія относительно функцій f_g, могутъ быть не всѣ различны, и въ этомъ случаѣ онѣ могутъ привести къ меньшему, чѣмъ N числу соотношеній. Пусть между ними независимыхъ $N-s_1$. Тогда $N-s_1$ изъ функцій f_g, напр., $f_0, f_{s_1+1}, f_{s_1+2}, \ldots, f_{N-1}$, могутъ быть выражены черезъ остальныя $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{s_1}$. Каждая изъ производныхъ этихъ s_1 функцій на основаніи предыдущаго выражается линейной функціей $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$. Очевидно $s \geqq s_1$.

Изъ этихъ выраженій съ помощью уравненій (10) мы можемъ исключить всѣ функціи f_g, кромѣ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{s_1}$ и слѣдовательно получимъ:

$$\frac{df_i}{dt}=\sum_{j=1}^{s_1} E_{ij}f_j+E_i. \qquad (i=1,2,3,\ldots,s_1) \tag{11}$$

Проинтегрировавъ полученную систему, мы найдемъ:

$$f_j=A_j+\sum_{i=1}^{s_1} A_{ji}C_i. \qquad (j=1,2,3,\ldots,s_1)$$

Въ виду-же того, что всѣ остальныя функціи f_g выражаются черезъ $f_1, f_2, \ldots, f_{s_1}$ мы будемъ имѣть для всѣхъ функцій f_g слѣдующія выраженія:

$$f_g=A_g+\sum_{i=1}^{s_1} A_{gi}C_i, \qquad (g=0,1,2,\ldots,N-1)$$

заключающія въ себѣ s_1 произвольныхъ постоянныхъ C_i.

Появленіе этихъ произвольныхъ постоянныхъ объясняется слѣдующимъ образомъ:

Полиномъ f_0 замѣняемъ полиномомъ:

$$f_0 + C_1 B_1 + C_2 B_2 + \ldots + C_s B_s.$$

Такъ какъ полиномы B_i по подстановкѣ въ нихъ значеній частныхъ рѣшеній обращаются въ нуль, то этотъ новый полиномъ обратится при этомъ въ функцію $\psi(t)$.

Съ другой стороны, если будемъ составлять поляры этого полинома при помощи полярныхъ операцій типа $\sum y_j^{(i)} \frac{\partial}{\partial y_i}$, то результаты той же подстановки будутъ обязательно заключать всѣ произвольныя постоянныя C_i. Въ противномъ случаѣ частные интегралы $y_1, y_2, \ldots, y_m$ не могли бы быть различны.

Среди полученныхъ поляръ будутъ и интегралы системы (11), а потому $s \leqq s_1$. Сравнивя это неравенство съ прежнимъ, мы убѣждаемся, что $s = s_1$.

Примѣняя къ новымъ, заключающимъ въ себѣ s произвольныхъ постоянныхъ, функціямъ f_g пріемъ G. H. Halphen'а, мы найдемъ въ виду присутствія въ нихъ произвольныхъ постоянныхъ, s интеграловъ въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ n-го порядка для линейнаго дифференціальнаго уравненія союзнаго съ (9).

Такъ какъ числитель и знаменатель будутъ частными интегралами типа G. Darboux для союзнаго уравненія, то на основаніи предложенной мной теоремы мы будемъ имѣть $s+1$ интеграловъ въ видѣ полиномовъ.

Можно на мѣсто полинома f взять одинъ изъ полиномовъ B_i, для котораго функція $\psi(t)$ станетъ равной нулю, а уравненія (11) однороднаго типа. Въ этомъ случаѣ число вновь найденныхъ интеграловъ будетъ s.

Конечно, если s равно единицѣ, то вопросъ рѣшается въ квадратурахъ.

Важно замѣтить, что пріемъ G. H. Halphen'а не требуетъ предварительнаго знанія коэффиціентовъ полиномовъ f, B_i. Они могутъ быть опредѣлены послѣ изъ условія, что полученный полиномъ представляетъ собой дѣйствительно интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія, союзнаго съ даннымъ (9).