Дискретная математика

том 19 выпуск 4 * 2007

УДК 519.1

Обобщенные пирамиды Паскаля и им обратные

© 2007 г. А. А. Балагура, О. В. Кузьмин

Построены пары обратимых соотношений, содержащих в качестве коэффициентов трехиндексные комбинаторные числа. Введены трехиндексные обобщения ряда известных комбинаторных чисел.

1. Введение

В [2] рассматривались обращения линейных соотношений, содержащих в качестве коэффициентов комбинаторные числа, описываемые обобщенным треугольником Паскаля. В настоящей работе рассматривается более общая задача — обращение обобщенной пирамиды Паскаля. Во втором параграфе вводятся базовые понятия и приводятся основные соотношения для $B^n_{k,l}$ и $A^n_{k,l}$, обобщенных триномиальных коэффициентов первого и второго рода [1] соответственно. В третьем параграфе рассматриваются различные варианты обращения линейных соотношений, в которых участвуют $B^n_{k,l}$ и $A^n_{k,l}$, описываемые обобщенной пирамидой Паскаля. Полученные формулы могут служить источником получения различных комбинаторных тождеств. В четвертом параграфе вводятся новые комбинаторные объекты — трехиндексные обобщения чисел Уитни, Стирлинга и Лаха, получен ряд формул для этих чисел.

2. Основные понятия и соотношения

Обобщенной пирамидой Паскаля называется (см. [1]) трехгранный пирамидальный массив, элементы которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$V(n,k,l) = \alpha_{n,k-1,l} V(n-1,k-1,l) + \beta_{n,k,l-1} V(n-1,k,l-1) + \gamma_{n,k,l} V(n-1,k,l), \tag{1}$$

с граничными условиями $V(0,0,0) = V_0$, $V(n,k,l) = 0$, если $\min(n,k,l,n-k-l) < 0$.

Следуя [1], рассмотрим важные частные случаи обобщенной пирамиды Паскаля, A- и B- пирамиды, в каждом сечении которых расположены обобщенные триномиальные коэффициенты второго и первого рода соответственно.

Пусть $\alpha = \{\alpha_s\}_0^\infty$, $\beta = \{\beta_s\}_0^\infty$, $\gamma = \{\gamma_s\}_0^\infty$ — последовательности, которые назовем базовыми последовательностями или базами.

Используя члены баз α, β, γ, строим разложения

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} B_{k,l}^{n} x^k y^l = \prod_{i=0}^{n-1}(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i), \qquad n \geqslant 1, \tag{2}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=k+l}^{\infty} A_{k,l}^{n} y^l z^n = z^k \prod_{j=0}^{k-1}\alpha_j \prod_{i=0}^{k}(1-\beta_i yz - \gamma_i z)^{-1}, \qquad k \geqslant 0. \tag{3}$$

Числа $B_{k,l}^n$ и $A_{k,l}^n$ в левых частях выражений (2) и (3), которые называют обобщенными триномиальными коэффициентами первого и второго рода соответственно, можно задать рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} B_{k,l}^{n} &= \alpha_{n-1} B_{k-1,l}^{n-1} + \beta_{n-1} B_{k,l-1}^{n-1} + \gamma_{n-1} B_{k,l}^{n-1},\\ A_{k,l}^{n} &= \alpha_{k-1} A_{k-1,l}^{n-1} + \beta_{k} A_{k,l-1}^{n-1} + \gamma_{k} A_{k,l}^{n-1}, \end{aligned}$$

где $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant n-k$, с начальными условиями $B_{0,0}^0 = A_{0,0}^0 = 1$, $B_{k,l}^n = A_{k,l}^n = 0$, если $\min(n,l,k,n-k-l) < 0$. Эти формулы также могут быть получены из (1).

Парой обратимых соотношений называют [2] систему линейных соотношений

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_k a_{nk} f_k, \qquad n \geqslant 0,\\ f_n &= \sum_k b_{nk} F_k, \qquad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

между членами последовательностей $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, если матрицы коэффициентов $\|a_{nk}\|$ и $\|b_{nk}\|$ двусторонние взаимообратные.

3. Обращение линейных соотношений

Введем обозначение $C_n(\alpha) = \prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i$, аналогично определяются $C_n(\beta)$ и $C_n(\gamma)$. Положим $\alpha/\beta = \{\alpha_s/\beta_s\}_{s=0}^{\infty}$, базы γ/β, β/α, γ/α, α/γ, β/γ, $(\alpha-\beta)/(\beta+\gamma)$, $\beta/(\beta+\gamma)$ определяются аналогично. Пусть $\tilde{A}_{i,j}^r$ строятся на базах α, β/α, γ/α; $\hat{A}_{i,j}^r$ — на базах β, α/β, γ/β; $\bar{A}_{i,j}^r$ — на базах γ, β/γ, α/γ.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Система линейных выражений*

$$\psi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} B_{k,l}^{n}\varphi_k, \qquad n \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k}\tilde{A}_{k,l}^{n}\psi_k, \qquad n \geqslant 0, \tag{5}$$

образует пару обратимых соотношений.

Доказательство. Преобразуем правую часть соотношения (2):

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} B^n_{k,l} x^k y^l = \prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i x \prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{\beta_i}{\alpha_i}\frac{y}{x}+\frac{\gamma_i}{\alpha_i}\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0.$$

Поделив обе части последнего равенства на $x^n C_n(\alpha)$, сделав замену переменных $1/x = m$ и обозначив $B_{\bar{n}}(m,y)$ получившуюся производящую функцию, получаем, что

$$B_{\bar{n}}(m,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{1}{C_n(\alpha)} B^n_{k,l} m^{n-k} y^l = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{\beta_i}{\alpha_i} ym + \frac{\gamma_i}{\alpha_i} m\right). \tag{6}$$

Поделив обе части равенства в формуле (3) на $z^k C_k(\alpha)$, поменяв порядок суммирования и обозначив $A_{\underline{k}}(z,y)$ производящую функцию $\tilde{A}^n_{k,l}$, получаем, что

$$A_{\underline{k}}(z,y) = \sum_{n=k}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{1}{C_k(\alpha)}\tilde{A}^n_{k,l} y^l z^{n-k} = \prod_{i=0}^{k}\left(1-\frac{\beta_i}{\alpha_i} yz - \frac{\gamma_i}{\alpha_i} z\right)^{-1}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует равенство $B_{\overline{n+1}}(m,y) A_{\underline{n}}(-z,y) = 1$, что с точностью до замены переменной эквивалентно совокупности

$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-k}\frac{(-1)^{i-k}}{C_n(\alpha)C_i(\alpha)} B^n_{i,j_1}\tilde{A}^i_{k,j_2} = \delta_{n,k}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-k}\frac{(-1)^{n-i}}{C_n(\alpha)C_i(\alpha)} \tilde{A}^n_{i,j_1} B^i_{k,j_2} = \delta_{n,k}, \tag{9}$$

где $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера. Введем обозначения

$$\widetilde{B} = \left\|\tilde{b}_{nk}\right\| = \left\|\sum_{j_1=0}^{n-k}\frac{1}{C_n(\alpha)} B^n_{k,j_1}\right\|, \qquad \tilde{A} = \|\tilde{a}_{nk}\| = \left\|\sum_{j_2=0}^{n-k}\frac{(-1)^{n-k}}{C_n(\alpha)}\tilde{A}^n_{k,j_2}\right\|.$$

Выражения (8) и (9) эквивалентны матричным равенствам $\widetilde{B}\tilde{A} = \tilde{A}\widetilde{B} = E$. Следовательно, система линейных соотношений (4), (5) образует пару обратимых соотношений.

Действительно, подставив (5) в (4), с учетом соотношения (8) после преобразований получим, что

$$\begin{aligned}\psi_n &= \frac{1}{C_n(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} B^n_{k,l}\left(\frac{1}{C_k(\alpha)}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}(-1)^{k-i}\tilde{A}^k_{i,j}\psi_i\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\psi_k\left(\sum_{i=k}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-k}\frac{(-1)^{i-k}}{C_n(\alpha)C_(\alpha)} B^n_{i,j_1}\tilde{A}^i_{k,j_2}\right) = \psi_n.\end{aligned}$$

Аналогично, подставив (4) в (5), с учетом соотношения (9) после преобразований получим, что

$$\varphi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k} \tilde{A}^n_{k,l} \left(\frac{1}{C_k(\alpha)} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} B^k_{i,j} \varphi_i \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \varphi_k \left(\sum_{i=k}^{n} \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{k-i} \frac{(-1)^{n-i}}{C_n(\alpha) C_i(\alpha)} \tilde{A}^n_{i,j_1} t B^i_{k,j_2} \right) = \varphi_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Система линейных выражений*

$$\phi_n = \frac{1}{C_n(\beta)} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} B^n_{k,l} \chi_l, \qquad n \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\chi_n = \frac{1}{C_n(\beta)} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{n-l} \hat{A}^n_{l,k} \phi_l, \qquad n \geqslant 0, \tag{11}$$

образует пару обратимых соотношений.

Доказательство. Производящая функция $\acute{B}^n_{l,k}$, построенных на базах β, α, γ, с учетом соотношения (2) имеет вид

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} \acute{B}^n_{l,k} x^l y^k = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} B^n_{k,l} x^l y^k = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha_i y + \beta_i x + \gamma_i).$$

Преобразуем среднюю часть получившегося выражения:

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} B^n_{k,l} x^l y^k = \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i x \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \frac{y}{x} + \frac{\gamma_i}{\beta_i} \frac{1}{x} \right), \qquad x \neq 0.$$

Поделив обе части последнего равенства на $x^n C_n(\beta)$, сделав замену переменных $1/x = m$ и обозначив $B_{\bar{n}}(m, y)$ получившуюся производящую функцию, получаем, что

$$B_{\bar{n}}(m, y) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{1}{C_n(\beta)} B^n_{k,l} m^{n-l} y^k = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha_i}{\beta_i} y m + \frac{\gamma_i}{\beta_i} m \right). \tag{12}$$

Производящая функция $\acute{A}^n_{l,k}$, построенных на базах β, α, γ, с учетом соотношения (3) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+l}^{\infty} \acute{A}^n_{l,k} y^k z^n = z^l \prod_{j=0}^{l-1} \beta_j \prod_{i=0}^{l} (1 - \alpha_i y z - \gamma_i z)^{-1}.$$

Поделив обе части последнего равенства на $z^l C_l(\beta)$, поменяв порядок суммирования и обозначив $A_{\underline{l}}(z, y)$ производящую функцию $\hat{A}^n_{l,k}$, получаем, что

$$A_{\underline{l}}(z, y) = \sum_{n=l}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{1}{C_l(\beta)} \hat{A}^n_{l,k} y^k z^{n-l} = \prod_{i=0}^{l} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\beta_i} y z - \frac{\gamma_i}{\beta_i} z \right)^{-1}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует равенство $B_{\overline{n+1}}(m,y)A_{\underline{n}}(-z,y)=1$, что с точностью до замены переменной эквивалентно совокупности равенств

$$\sum_{i=l}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-l}\frac{(-1)^{i-l}}{C_n(\beta)C_i(\beta)}B^n_{j_1,i}\hat{A}^i_{l,j_2}=\delta_{n,l}, \tag{14}$$

$$\sum_{i=l}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-l}\frac{(-1)^{n-i}}{C_n(\beta)C_i(\beta)}\hat{A}^n_{i,j_1}B^i_{j_2,l}=\delta_{n,l}. \tag{15}$$

Введем обозначения

$$\hat{B}=\left\|\hat{b}_{nl}\right\|=\left\|\sum_{j_1=0}^{n-l}\frac{1}{C_n(\beta)}B^n_{j_1,l}\right\|,\qquad \hat{A}=\|\hat{a}_{nl}\|=\left\|\sum_{j_2=0}^{n-l}\frac{(-1)^{n-l}}{C_n(\beta)}\hat{A}^n_{l,j_2}\right\|.$$

Выражения (14) и (15) эквивалентны матричным равенствам $\hat{B}\hat{A}=\hat{A}\hat{B}=E$. Следовательно, система линейных соотношений (10), (11) образует пару обратимых соотношений.

Действительно, подставив (11) в (10), с учетом соотношения (14) после преобразований получим, что

$$\begin{aligned}\phi_n&=\frac{1}{C_n(\beta)}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-l}B^n_{k,l}\left(\frac{1}{C_k(\beta)}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}(-1)^{l-i}\hat{A}^l_{i,j}\phi_i\right)\\&=\sum_{l=0}^{n}\phi_l\left(\sum_{i=l}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-l}\frac{(-1)^{i-l}}{C_n(\beta)C_i(\beta)}B^n_{j_1,i}\hat{A}^i_{l,j_2}\right)=\phi_n.\end{aligned}$$

Аналогично, подставив (10) в (11), с учетом соотношения (15) после преобразований получим, что

$$\begin{aligned}\chi_n&=\frac{1}{C_n(\beta)}\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-l}(-1)^{n-l}\hat{A}^n_{l,k}\left(\frac{1}{C_k(\beta)}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}B^l_{i,j}\chi_i\right)\\&=\sum_{l=0}^{n}\chi_l\left(\sum_{i=l}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-l}\frac{(-1)^{n-i}}{C_n(\beta)C_i(\beta)}\hat{A}^n_{i,j_1}B^i_{j_2,l}\right)=\chi_n.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Система линейных соотношений*

$$\xi_n=\frac{1}{C_n(\gamma)}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}B^n_{k,m-k}\zeta_{n-m},\qquad n\geqslant 0, \tag{16}$$

$$\zeta_n=\frac{1}{C_n(\gamma)}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^m\bar{A}^n_{n-m,m-k}\xi_{n-m},\qquad n\geqslant 0, \tag{17}$$

образует пару обратимых соотношений.

Доказательство. Введем обозначение $m = k + l$. Производящая функция $\grave{B}^n_{n-m,m-k}$, построенных на базах γ, β, α, с учетом соотношения (2) имеет вид

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \grave{B}^n_{n-m,m-k} x^{n-m} y^{m-k} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} B^n_{k,m-k} x^{n-m} y^{m-k} = \prod_{i=0}^{n-1}(\gamma_i x + \beta_i y + \alpha_i).$$

Преобразуем среднюю часть получившегося выражения:

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} B^n_{k,m-k} x^{n-m} y^{m-k} = \prod_{i=0}^{n-1}\gamma_i x \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\frac{y}{x} + \frac{\alpha_i}{\gamma_i}\frac{1}{x}\right), \qquad x \neq 0.$$

Поделив обе части полученного равенства на $x^n C_n(\gamma)$, сделав замену переменных $1/x = z$ и обозначив $B_{\bar{n}}(y, z)$ получившееся производящую функцию, получаем, что

$$B_{\bar{n}}(y,z) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{C_n(\gamma)} B^n_{k,m-k} z^m y^{m-k} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i} yz + \frac{\alpha_i}{\gamma_i} y\right). \tag{18}$$

Производящая функция $\grave{A}^n_{n-m,m-k}$, построенных на базах γ, β, α, с учетом соотношения (3) имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} \grave{A}^n_{n-m,m-k} y^{m-k} z^n = z^{n-m} \prod_{j=0}^{n-m-1} \gamma_j \prod_{i=0}^{n-m} (1 - \beta_i xz - \alpha_i z)^{-1}.$$

Поделив обе части последнего равенства на $z^{n-m} C_{\underline{n-m}}(\gamma)$, поменяв порядок суммирования и обозначив $A_{\underline{m}}(z, y)$ производящую функцию $\bar{A}^n_{n-m,m-k}$, получаем, что

$$A_{\underline{m}}(z,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{C_{n-m}(\gamma)} \bar{A}^n_{n-m,m-k} y^{m-k} z^m = \prod_{i=0}^{n-m}\left(1 - \frac{\beta_i}{\gamma_i} yz - \frac{\alpha_i}{\gamma_i} z\right)^{-1}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует равенство

$$B_{\overline{n+1}}(y,z) A_{\underline{n}}(-z, y) = 1,$$

что с точностью до замены переменной эквивалентно совокупности соотношений

$$\sum_{i=n-m}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-n+m} \frac{(-1)^{i-n+m}}{C_n(\gamma)C_i(\gamma)} B^n_{j_1,n-i-j_1} \bar{A}^i_{n-m,j_2} = \delta_{m,0}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=n-m}^{n}\sum_{j_1=0}^{n-i}\sum_{j_2=0}^{i-n+m} \frac{(-1)^{n-j_1}}{C_n(\gamma)C_i(\gamma)} \bar{A}^n_{i,j_1} B^i_{j_2,i-j_2-n+m} = \delta_{m,0}, \tag{21}$$

Введем обозначения

$$\bar{B} = \|\bar{b}_{n,n-m}\| = \left\|\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{C_n(\gamma)} B^n_{k,m-k}\right\|, \qquad \bar{A} = \|\bar{a}_{n,n-m}\| = \left\|\sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{C_n(\gamma)} \bar{A}^n_{n-m,m-k}\right\|.$$

Выражения (20) и (21) эквивалентны матричным равенствам $\bar{B}\bar{A} = \bar{A}\bar{B} = E$. Следовательно, система линейных соотношений (16), (17) образует пару обратимых соотношений.

Действительно, подставив (17) в (16), с учетом соотношения (20) после преобразований получим, что

$$\xi_n = \frac{1}{C_n(\gamma)} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} B_{k,l}^{n} \left(\frac{1}{C_{n-m}(\gamma)} \sum_{i=0}^{n-m} \sum_{j=0}^{i} (-1)^i \bar{A}_{n-m-i,i-j}^{n-m} \xi_i \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \xi_{n-m} \left(\sum_{i=n-m}^{n} \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-n+m} \frac{(-1)^{i-n+m}}{C_n(\gamma) C_i(\gamma)} B_{j_1,n-i-j_1}^{n} \bar{A}_{n-m,j_2}^{i} \right) = \xi_n.$$

Аналогично, подставив (16) в (17), с учетом соотношения (21) после преобразований получим, что

$$\zeta_n = \frac{1}{C_n(\gamma)} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^m \bar{A}_{n-m,m-k}^{n} \left(\frac{1}{C_{n-m}(\gamma)} \sum_{i=0}^{n-m} \sum_{j=0}^{i} B_{j,i-j}^{n-m} \zeta_i \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \zeta_{n-m} \left(\sum_{i=n-m}^{n} \sum_{j_1=0}^{n-i} \sum_{j_2=0}^{i-n+m} \frac{(-1)^{n-j_1}}{C_n(\gamma) C_i(\gamma)} \bar{A}_{i,j_1}^{n} B_{j_2,i-j_2-n+m}^{i} \right) = \zeta_n.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В условиях абсолютной сходимости рассматриваемых рядов верны союзные пары [2] обратимых соотношений к системам в теоремах 1–3. Например, система

$$\psi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-n} B_{n,l}^{k} \varphi_k, \qquad n \geqslant 0,$$

$$\varphi_n = \frac{1}{C_n(\alpha)} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-n} (-1)^{k-n} \tilde{A}_{n,l}^{k} \psi_k, \qquad n \geqslant 0,$$

представляет собой пару обратимых соотношений, союзную к системе теоремы 1.

4. Частные случаи

Приведенные выше соотношения могут служить источником построения новых комбинаторных объектов и нахождения различных комбинаторных тождеств.

4.1. Введем трехиндексные обобщения известных чисел Уитни. В формуле (2) положим $\alpha_i = 1$, $\beta_i = -\beta_{i+1}$, $\gamma_i = -\gamma_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$. В формуле (3) положим $\alpha_i = 1$, $\beta_i = \beta_{i+1}$, $\gamma_i = \gamma_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$ Тогда получим, что $B_{k,l}^n = w_{k,l}^n$, $A_{k,l}^n = W_{k,l}^n$, и из рекуррентных соотношений для этих чисел получаем рекуррентные формулы

$$w_{k,l}^{n} = w_{k-1,l}^{n-1} - \beta_n w_{k,l-1}^{n-1} - \gamma_n w_{k,l}^{n-1}, \tag{22}$$

$$W_{k,l}^{n} = W_{k-1,l}^{n-1} + \beta_{k+1} W_{k,l-1}^{n-1} + \gamma_{k+1} W_{k,l}^{n-1}, \tag{23}$$

где $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant n-k$, с начальными условиями $w_{0,0}^0 = W_{0,0}^0 = 1$, $w_{k,l}^n = W_{k,l}^n = 0$, если $\min(n, l, k, n-k-l) < 0$.

Тогда из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Система линейных соотношений*

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} w_{k,l}^n \varphi_k, \quad \varphi_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} W_{k,l}^n \psi_k, \quad n \geqslant 0, \tag{24}$$

образует пару обратимых соотношений.

Полагая $l = 0$ в формулах (22), получаем числа Уитни первого и второго рода, а из формул (23) — известное соотношение для этих чисел [1], имеющее приложение в теории частично упорядоченных множеств.

4.2. Введем трехиндексные обобщения известных чисел Стирлинга. В формуле (2) положим $\alpha_i = 1$, $\beta_i = \gamma_i = -i$, $i = 0, 1, \ldots$ В формуле (3) положим $\alpha_i = 1$, $\beta_i = \gamma_i = i$, $i = 0, 1, \ldots$ Тогда получим, что $B_{k,l}^n = s_{k,l}^n$, $A_{k,l}^n = S_{k,l}^n$, и из рекуррентных соотношений для этих чисел получаем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} s_{k,l}^n &= s_{k-1,l}^{n-1} - (n-1)s_{k,l-1}^{n-1} - (n-1)s_{k,l}^{n-1}, \\ S_{k,l}^n &= S_{k-1,l}^{n-1} + kS_{k,l-1}^{n-1} + kS_{k,l}^{n-1}, \end{aligned} \tag{25}$$

где $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant n-k$, с начальными условиями $s_{0,0}^0 = S_{0,0}^0 = 1$, $s_{k,l}^n = S_{k,l}^n = 0$, если $\min(n, l, k, n-k-l) < 0$. Тогда из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Система линейных соотношений*

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} s_{k,l}^n \varphi_k, \quad \varphi_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} S_{k,l}^n \psi_k, \quad n \geqslant 0, \tag{26}$$

образует пару обратимых соотношений.

Полагая $l = 0$ в формулах (24), получаем числа Стирлинга первого и второго рода, а из формул (25) — известное соотношение для этих чисел [2].

4.3. Введем трехиндексные обобщения известных чисел Лаха. В формуле (1) положим $\alpha_{n,k-1,l} = 1$, $\beta_{n,k,l-1} = \beta_{n-1} + \beta_k$, $\gamma_{n,k,l} = \gamma_{n-1} + \gamma_k$. Тогда получим рекуррентную формулу для этих чисел

$$L_{k,l}^n = L_{k-1,l}^{n-1} + (\beta_{n-1} + \beta_k)L_{k,l-1}^{n-1} + (\gamma_{n-1} + \gamma_k)L_{k,l}^{n-1}, \tag{27}$$

где $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant n-k$, с начальными условиями $L_{0,0}^0 = 1$, $L_{k,l}^n = 0$, если $\min(n, l, k, n-k-l) < 0$. Тогда из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Система линейных соотношений*

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} L_{k,l}^n \varphi_k, \quad \varphi_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k} L_{k,l}^n \psi_k, \quad n \geqslant 0, \tag{28}$$

образует пару обратимых соотношений.

Полагая $l = 0$ в формуле (26), получаем числа Лаха, а из формулы (27) — известное соотношение для этих чисел [2].

Список литературы

1. Кузьмин О. В., *Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения*. Наука, Новосибирск, 2000.
2. Платонов М. Л., *Комбинаторные числа класса отображений и их приложения*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 20.06.2007.