ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 511

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ РЯДОВ

С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина (г. Белгород)

Посвящается 60—летию В.Н. Чубарикова

Аннотация

Получены аналитические выражения для сумм особых рядов, возникающих в аддитивных задачах с простыми числами специального вида.

1 Введение

Ряд классических проблем теории чисел сводится к вопросу о числе решений уравнения

$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N \tag{1}$$

в простых числах $p_1,\ p_2, \ldots, p_k$, где $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$ — натуральные числа.

Рассмотрим простые числа, на которые налагаются дополнительные ограничения вида

$$a < \{\eta p^n\} < b,$$

где a и b — произвольные действительные числа, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, η — квадратичная иррациональность. Пусть $J_{k,n}(N)$ — число решений уравнения (1) с такими простыми числами, $I_{k,n}(N)$ — число решений уравнения (1) с произвольными простыми числами. Для задач Гольдбаха ($k = 3,\ n = 1$), Хуа Ло–Кена ($k = 5$, $n = 2$) нами получены приближенные формулы ([1], [2])

$$J_{k,n}(N) \sim \sigma_k(N, a, b) I_{k,n}(N),$$

где

$$\sigma_k(N, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 0{,}5k(a+b))} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

В данной работе мы рассмотрим поведение ряда $\sigma_k(N,a,b)$, $k=2,3,\ldots$. Обозначим $\alpha=\eta N-aj-b(k-j)$. При нечетном k получено равенство

$$\sigma_k(N,a,b)=(b-a)^k+$$
$$+\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\left(\frac{\{\alpha\}^k}{k!}-\frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!}+\frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{k-2}}(-1)^{\frac{3k-1}{2}}\sum_{l=0}^{\frac{k-5}{2}}\frac{\zeta(k-1-2l)}{\pi^{k-1-2l}}(-4)^l\frac{\{\alpha\}^{2l+1}}{(2l+1)!}\right).$$

При четном k имеем

$$\sigma_k(N,a,b)=(b-a)^k+$$
$$+\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(-\frac{\{\alpha\}^k}{k!}+\frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!}-\frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!}+$$
$$+\frac{1}{2^{k-1}}(-1)^{k/2}\sum_{l=0}^{\frac{k-4}{2}}\frac{\zeta(k-2l)}{\pi^{k-2l}}(-4)^l\frac{\{\alpha\}^{2l}}{(2l)!}).$$

2 Особый ряд

1. Рассмотрим

$$\sigma_k(N,a,b)=\sum_{|m|<\infty}e^{2\pi im(\eta N-0,5k(a+b))}\frac{\sin^k\pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

Поскольку

$$\sin^k\gamma=\frac{1}{(2i)^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}e^{i\gamma(2j-k)},$$

то

$$\sigma_k(N,a,b)=(b-a)^k+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi im)^k}s_k(N,a,b,m),$$

где

$$s_k(N,a,b,m)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\cdot(e^{2\pi im(\eta N-aj-b(k-j))}+e^{-2\pi im(\eta N-a(k-j)-bj)}).$$

Воспользовавшись свойством биномиальных коэффициентов, имеем

$$s_k(N,a,b,m) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\cdot((-1)^k e^{2\pi i m(\eta N-aj-b(k-j))} + e^{-2\pi i m(\eta N-aj-b(k-j))}).$$

При k нечетном $i^k = (-1)^{0,5(k-1)}i$ и

$$\sigma_k(N,a,b) = (b-a)^k + \frac{1}{2^{k-1}}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi m(\eta N-aj-b(k-j))}{(\pi m)^k}.$$

При k четном $i^k = (-1)^{k/2}$,

$$\sigma_k(N,a,b) = (b-a)^k + \frac{1}{2^{k-1}}(-1)^{k/2}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi m(\eta N-aj-b(k-j))}{(\pi m)^k}.$$

2. Преобразуем ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi m x}{(\pi m)^k}.$$

При нечетном $k \geqslant 2$ ряд сходится равномерно по x. Продифференцировав его $(k-2)$ раз по x, получим ряд вида

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi m x}{(\pi m)^2}.$$

Воспользуемся представлением функции $f(x) = x^2$ на промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ рядом Фурье

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos mx}{m^2}.$$

Выделив в сумме по m слагаемые с четными m, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{(\pi m)^2} = \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Известно, что при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Тогда при $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{(\pi m)^2} = \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x}{\pi} + \frac{1}{6}.$$

В результате имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi mx}{(\pi m)^2} = \{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6}. \tag{2}$$

Проинтегрировав $(k-2)$ раз по x обе части равенства (2), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi mx}{(\pi m)^k} = 2\left(\frac{2\{x\}^k}{k!} - \frac{\{x\}^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\{x\}^{k-2}}{6(k-2)!}\right)(-4)^{\frac{k-3}{2}} +$$
$$+\sum_{l=0}^{\frac{k-5}{2}} \frac{2\zeta(k-1-2l)}{\pi^{k-1-2l}}(-4)^l \frac{\{x\}^{2l+1}}{(2l+1)!}.$$

3. Тогда при нечетном k

$$\sigma_k(N,a,b) = (b-a)^k + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j}\Big(\frac{\{\alpha\}^k}{k!} - \frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!} + \frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!} +$$
$$+\frac{1}{2^{k-2}}(-1)^{\frac{3k-1}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{k-5}{2}} \frac{\zeta(k-1-2l)}{\pi^{k-1-2l}}(-4)^l \frac{\{\alpha\}^{2l+1}}{(2l+1)!}\Big),$$

где $\alpha = \eta N - aj - b(k-j)$.

4. При четном $k \geqslant 2$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi mx}{(\pi m)^k} = \left(\frac{2\{x\}^k}{k!} - \frac{\{x\}^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\{x\}^{k-2}}{6(k-2)!}\right)(-4)^{\frac{k-2}{2}} +$$
$$+\sum_{l=0}^{\frac{k-4}{2}} \frac{\zeta(k-2l)}{\pi^{k-2l}}(-4)^l \frac{\{x\}^{2l}}{(2l)!},$$

тогда

$$\sigma_k(N,a,b) = (b-a)^k + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j}\Big(-\frac{\{\alpha\}^k}{k!} + \frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!} - \frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!} +$$
$$+\frac{1}{2^{k-1}}(-1)^{k/2} \sum_{l=0}^{\frac{k-4}{2}} \frac{\zeta(k-2l)}{\pi^{k-2l}}(-4)^l \frac{\{\alpha\}^{2l}}{(2l)!}\Big),$$

где $\alpha = \eta N - aj - b(k-j)$.

3 Примеры

1. Рассмотрим

$$\sigma_2(N,a,b) = (b-a)^2 + \{\eta N - a - b\}^2 - \{\eta N - a - b\} -$$
$$-0,5(\{\eta N - 2a\}^2 - \{\eta N - 2a\} + \{\eta N - 2b\}^2 - \{\eta N - 2b\}).$$

Введем обозначения

$$t = \eta N - a - b, \quad \Delta = b - a.$$

При фиксированном Δ построим график функции

$$f(t) = \Delta^2 + t^2 - t - 0,5(\{t+\Delta\}^2 - \{t+\Delta\} + \{t-\Delta\}^2 - \{t-\Delta\}).$$

Для $0 \leqslant \Delta \leqslant 1/2$

$$f(t) = \begin{cases} \Delta - t, & \text{если } 0 \leqslant t < \Delta, \\ 0, & \text{если } \Delta \leqslant t < 1-\Delta, \\ t + \Delta - 1, & \text{если } 1-\Delta \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

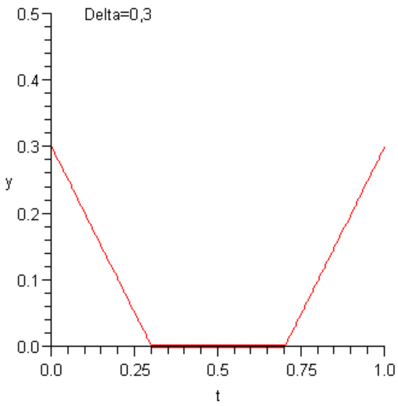

Рис.1. $k = 2$, $0 \leqslant \Delta \leqslant 1/2$

Для $1/2 < \Delta \leqslant 1$

$$f(t) = \begin{cases} \Delta - t, & \text{если } 0 \leqslant t < 1-\Delta, \\ 2\Delta - 1, & \text{если } 1-\Delta \leqslant t < \Delta, \\ t + \Delta - 1, & \text{если } \Delta \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

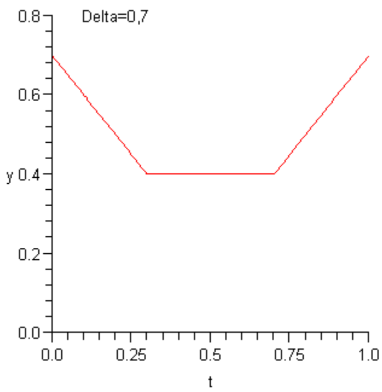

Рис.2. $k = 2$, $1/2 < \Delta \leqslant 1$

2. При $k=3$

$$\begin{aligned}\sigma_3(N,a,b)=(b-a)^3+\\ +1,5\left(\frac{\{\eta N-2a-b\}^3}{3}-\frac{\{\eta N-2a-b\}^2}{2}+\frac{\{\eta N-2a-b\}}{6}\right)-\\ -1,5\left(\frac{\{\eta N-a-2b\}^3}{3}-\frac{\{\eta N-a-2b\}^2}{2}+\frac{\{\eta N-a-2b\}}{6}\right)-\\ -0,5\left(\frac{\{\eta N-3a\}^3}{3}-\frac{\{\eta N-3a\}^2}{2}+\frac{\{\eta N-3a\}}{6}\right)+\\ +0,5\left(\frac{\{\eta N-3b\}^3}{3}-\frac{\{\eta N-3b\}^2}{2}+\frac{\{\eta N-3b\}}{6}\right).\end{aligned}$$

Обозначив

$$t=\eta N-2a-b,\quad \Delta=b-a,$$

имеем

$$\begin{aligned}f(t)=\Delta^3+1,5\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{6}\right)-\\ -1,5\left(\frac{\{t-\Delta\}^3}{3}-\frac{\{t-\Delta\}^2}{2}+\frac{\{t-\Delta\}}{6}\right)-\\ -0,5\left(\frac{\{t+\Delta\}^3}{3}-\frac{\{t+\Delta\}^2}{2}+\frac{\{t+\Delta\}}{6}\right)+\\ +0,5\left(\frac{\{t-2\Delta\}^3}{3}-\frac{\{t-2\Delta\}^2}{2}+\frac{\{t-2\Delta\}}{6}\right).\end{aligned}$$

Для $0\leqslant\Delta\leqslant 1/3$

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+t\Delta+0,5\Delta^2, & \text{если } 0\leqslant t<\Delta,\\ t^2-2t\Delta+2\Delta^2, & \text{если } \Delta\leqslant t<2\Delta,\\ 0, & \text{если } 2\Delta\leqslant t<1-\Delta,\\ 0,5t^2+t(\Delta-1)+0,5(1-2\Delta+\Delta^2), & \text{если } 1-\Delta\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

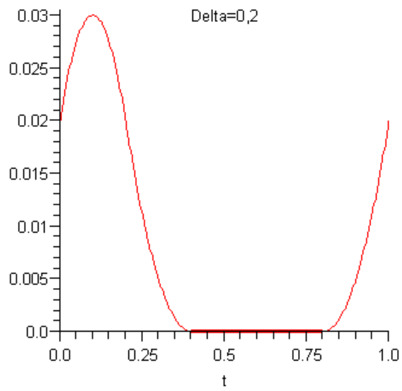

Рис.3. $k = 3$, $0 \leqslant \Delta \leqslant 1/3$

Для $1/3 < \Delta \leqslant 1/2$

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + t\Delta + 0,5\Delta^2, & \text{если } 0 \leqslant t < \Delta, \\ 0,5t^2 - 2t\Delta + 2\Delta^2, & \text{если } \Delta \leqslant t < 1-\Delta, \\ t^2 - t(1+\Delta) + 0,5(1 - 2\Delta + 5\Delta^2), & \text{если } 1-\Delta \leqslant t < 2\Delta, \\ 0,5t^2 + t(\Delta - 1) + 0,5(1 - 2\Delta + \Delta^2), & \text{если } 2\Delta \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

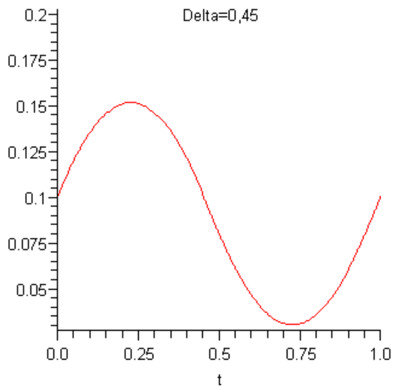

Рис.4. $k = 3$, $1/3 < \Delta \leqslant 1/2$

Для $1/2 < \Delta \leqslant 1$

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + t\Delta + 0,5\Delta^2, & \text{если } 0 \leqslant t < 1-\Delta, \\ -0,5t^2 + t(2\Delta - 1) + 0,5 - \Delta + \Delta^2, & \text{если } 1-\Delta \leqslant t < \Delta, \\ t^2 - t(1+\Delta) + 0,5(1 - 2\Delta + 5\Delta^2), & \text{если } \Delta \leqslant t < 2\Delta. \end{cases}$$

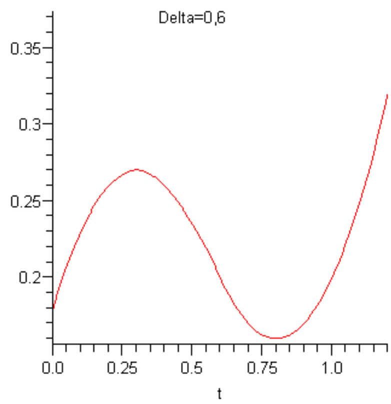

Рис.5.1. $k = 3$, $1/2 < \Delta \leqslant 2/3$

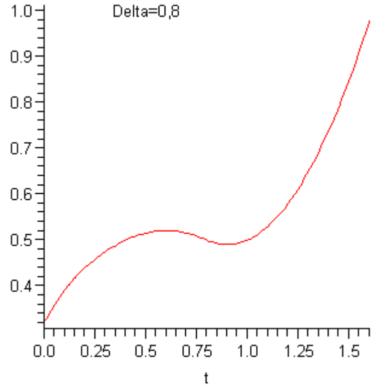

Рис.5.2. $k = 3$, $2/3 < \Delta \leqslant 1$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Gritsenko, N. Motkina, Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a special type, http://arXiv.org/abs/0812.4606 — 25 Dec 2008

[2] S. Gritsenko, N. Motkina, Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type, http://arXiv.org/abs/0812. 4665 — 26 Dec 2008

НИУ «Белгородский государственный университет»
Поступило 1.12.11