УДК 519.219+531.19 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С.Б. ШЛОСМАН

ГАУССОВСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА В РАЗМЕРНОСТИ $d > 4$

(Представлено академиком С.П. Новиковым 1 VI 1987)

Вопрос о построении нетривиальных моделей конструктивной теории поля тесным образом связан с поведением решетчатых моделей ферромагнетизма в окрестности критических точек. Это обстоятельство связано с тем фактом, что теория поля может быть получена из решетчатого ферромагнетика с помощью предельной процедуры [1]. Первый из результатов, указывающих на тривиальность теории поля φ_d^4 при $d > 4$, был получен Айзенманом [2]. Он состоял в том, что в результате некоторого предельного перехода из решетчатого ферромагнетика может получиться только свободное поле (при условии, что предел вообще существует). Специфика рассматриваемого предельного перехода в том, что он производится по однофазной области; иными словами, допредельные модели рассматриваются при температурах $T_n > T_{\mathrm{crit}}$ и $T_n \downarrow T_{\mathrm{crit}}$ при $n \to \infty$.

В данной работе рассматривается случай, когда $T_n \equiv T_{\mathrm{crit}}$. Мы рассматриваем d-мерную модель Изинга с $d > 4$ при критическом значении температуры $T_{\mathrm{crit}}(d)$ и показываем, что суммарный спин имеет гауссовское предельное поведение.

Пусть $\mathbf{Z}^d$ – d-мерная целочисленная решетка и $V_n \subset \mathbf{Z}^d$ – кубический сосуд с ребром $2n$ с центром в начале координат. Моделью Изинга в сосуде V_n называется система величин $\Omega_n = \{\sigma_t,\ t \in V_n\}$, принимающих значения ± 1, причем каждой конфигурации $\sigma = \{\sigma_t\} \in \Omega_n\}$ сопоставлена энергия

$$H^{\mathrm{Ising}}(\sigma) = H(\sigma) = -\sum_{\substack{\{s,t\} \subset V_n: \\ \mathrm{dist}(s,t) = 1}} \sigma_s \sigma_t .$$

Гиббсовским состоянием в сосуде V_n при обратной температуре β называется функционал $\langle \cdot \rangle_n^\beta$ на вещественных функциях на Ω_n, задаваемый формулой

$$\langle \varphi(\cdot) \rangle_n^\beta = \sum_{\sigma \in \Omega_n} \varphi(\sigma) \exp\{-\beta H(\sigma)\} \Big/ \sum_{\sigma \in \Omega_n} \exp\{-\beta H(\sigma_n)\}.$$

Можно показать, что при всех β существует предельное состояние $\langle \cdot \rangle^\beta = \lim\limits_{n \to \infty} \langle \cdot \rangle_n^\beta$.

В модели Изинга имеет место явление, называемое фазовым переходом второго рода. Оно состоит в том, что асимптотика выражения $\langle \sigma_s \sigma_t \rangle^\beta$ при $|s - t| \to \infty$ устроена совершенно по-разному в зависимости от значения параметра β. А именно, при $d \geqslant 2$ существует значение $\beta_{\mathrm{cr}} = \beta_{\mathrm{cr}}(d)$, $0 < \beta_{\mathrm{cr}} < \infty$, такое, что

$$\langle \sigma_s \sigma_t \rangle^\beta \begin{cases} \leqslant \exp\{-m(\beta)|s-t|\} & \text{при } |s-t| \to \infty,\ \beta < \beta_{\mathrm{cr}}, \text{ причем } m(\beta) > 0, \\ \geqslant M^2(\beta) > 0 & \text{при } \beta > \beta_{\mathrm{cr}} \end{cases}$$

(см. [3]). Величина $T_{\mathrm{crit}} = \beta_{\mathrm{cr}}^{-1}$ называется критической температурой. Состояния $\langle \cdot \rangle_n^{\beta_{\mathrm{cr}}}$, $\langle \cdot \rangle^{\beta_{\mathrm{cr}}}$ будем обозначать для краткости $\langle \cdot \rangle_n^{\mathrm{cr}}$, $\langle \cdot \rangle^{\mathrm{cr}}$. В состоянии $\langle \cdot \rangle^{\mathrm{cr}}$ корреляции убывают лишь степенным образом, и это означает, что величины σ_s, σ_t делаются существенно более зависимыми в точке $\beta = \beta_{\mathrm{cr}}$.

Рассмотрим случайные величины $S_{n,k}$, $n \leqslant k \leqslant \infty$, $n < \infty$,

$$S_{n,k} = \left(\sum_{t \in V_n} \sigma_t\right) \Big/ \left[\left\langle\left(\sum_{t \in V_n} \sigma_t\right)^2\right\rangle_k^{\mathrm{cr}}\right]^{1/2},$$

распределение которых порождается состоянием $\langle \cdot \rangle_k^{\mathrm{cr}}$ ($\langle \cdot \rangle_\infty^{\mathrm{cr}} = \langle \cdot \rangle^{\mathrm{cr}}$).

Теорема. *В размерности $d > 4$ последовательность величин $S_{n,k(n)}$, где $n \leqslant k(n) \leqslant \infty$ произвольно, имеет асимптотически гауссовское распределение. Другими словами, для нее справедлива центральная предельная теорема.*

Зафиксируем какую-нибудь функцию $k(n)$, $n \leqslant k(n) \leqslant \infty$, и обозначим величину $S_{n,k(n)}$ через S_n. Наше утверждение будет доказано, если показать, что семиинварианты $u_r(S_n)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$ для всех $r \geqslant 3$. В самом деле, проблема моментов имеет единственное решение в случае моментов гауссовской случайной величины [4, гл. 7, § 6]. Напомним, что семиинвариантом r-го порядка системы случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_r$ называется величина

$$u_r(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \frac{\partial^r}{\partial h_1 \ldots \partial h_r} \ln \left\langle \exp\left(\sum_{i=1}^{r} h_i \xi_i\right)\right\rangle \Bigg|_{h_i \equiv 0},$$

где символ $\langle \cdot \rangle$ означает операцию осреднения, а

$$u_r(\xi) = u_r(\underbrace{\xi, \ldots, \xi}_{r}).$$

Из соображений симметрии $u_r(S_n) = 0$ при r нечетном. Интересующее нас утверждение можно вывести из справедливости следующих корреляционных неравенств:

(1) $$0 \leqslant (-1)^{r-1} u_{2r}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{2r}) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2(r-2)!}{r} \sum u_4(\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_4}) \langle \sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \rangle \ldots \langle \sigma_{j_{2r-5}} \sigma_{j_{2r-4}} \rangle,$$

где σ_i обозначена переменная σ_{t_i}, $i = 1, 2, \ldots, 2r$, $\{t_1, \ldots, t_{2r}\} \subset V_n$, усреднение проводится в состоянии $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_{k(n)}^{\mathrm{cr}}$, а суммирование ведется по всем выборам $(r-2)$ неупорядоченных пар индексов из множества из $2r$ элементов. Неравенства (1) получены в [5, 6].

(2) $$-u_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \leqslant 2 \sum_{t \in \mathbf{Z}^d} \langle \sigma_1 \sigma_t \rangle \langle \sigma_2 \sigma_t \rangle \langle \sigma_3 \sigma_t \rangle \langle \sigma_4 \sigma_t \rangle \quad [2].$$

(3) $$\langle \sigma_s \sigma_t \rangle \leqslant \frac{C(d)}{|s-t|^{d-2}} \quad [7].$$

(На самом деле неравенство (3) доказано в [7] для температур выше критической. Однако в силу его справедливости в надкритической области равномерно по температуре оно остается справедливым и в критической точке.)

Из неравенств (1)–(3) следует, что

$$|u_{2r}(S_n)| \leqslant C(d, r) \Big(\sum_{t \in V_n} \langle \sigma_0 \sigma_t \rangle\Big)^2 / |V_n| \sim n^{4-d},$$

и, значит,

$$u_{2r}(S_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что и доказывает теорему.

Считается, что в размерностях $d = 2, 3, 4$ предельное распределение суммарного спина в критической точке не является гауссовским (см. [2]). Отметим в заключение, что утверждение теоремы 1 может быть, по-видимому, получено другим способом, с использованием техники работы [2].

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 VI 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976. 2. *Aizenman M.* – Commun. Math. Phys., 1982, vol. 81, p. 1–48. 3. *Aizenman M.* – In: Statistical physics and dinamical systems. Ser. Progress in physics. Boston; Basel; Stuttgart: Birkhauser, 1985, vol. 10. 4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложение. М.: Мир, 1967, т. 2. 5. *Шлосман С.Б.* – ДАН, 1987, т. 292, № 5, с. 1074–1077. 6. *Шлосман С.Б.* – ДАН, 1987, т. 294, № 6, с. 1354–1357. 7. *Socal A.D.* – Ann. Inst. H. Poincare. Ser. A, 1982, vol. 377.