Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. А. Белолипецкий, А. Ю. Рябов, Асимптотические оценки решений задачи оптимального быстродействия вблизи точек излома изохронной поверхности,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 521–535

https://www.mathnet.ru/zvmmf4018

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
29 апреля 2025 г., 14:51:15

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 4

УДК 517.977.55

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ВБЛИЗИ ТОЧЕК ИЗЛОМА ИЗОХРОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

БЕЛОЛИПЕЦКИЙ А. А., РЯБОВ А. Ю.

(Москва)

Изучается задача оптимального быстродействия, начальные условия которой возмущены малым параметром. Исследуется поведение точек переключения управления и функции Беллмана в случае отсутствия дифференцируемости.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия $P(\varepsilon)$, возмущенную малым параметром $\varepsilon>0$:

$$(1.1а)\qquad \dot{x}=Ax+bu,\qquad |u(t)|\leqslant 1,\qquad t\in[0,T],$$

$$(1.1б)\qquad x(0)=x_0+\varepsilon x_1,\qquad x(T)=0,\qquad T\to\min;$$

здесь A — матрица размера $n\times n$, b — вектор размерности $n\times 1$. Предполагается, что все собственные значения матрицы A действительны, а векторы A^kb, $k=0, 1, \ldots, n-1$, линейно независимы.

Обозначим через $T(x)$ время оптимального перехода из x в 0, через $u_x(t)$ — соответствующее оптимальное управление. Пусть Γ_s — множество точек x фазового пространства, для которых $u_x(t)$ имеет s переключений в интервале $(0, T(x))$.

В [1], [2] был изучен вопрос о построении решений задачи $P(\varepsilon)$ в окрестности точек гладкости изохронных поверхностей, которыми являются точки множества Γ_{n-1} (см. [3]). Попытка исследовать задачу в нерегулярном случае была предпринята в [4], где были построены малые решения задачи $P(\varepsilon)$ в окрестности точки $x_0\in\Gamma_{n-2}$. В этих точках поверхности уровня функции Беллмана (или, что то же самое, изохронные поверхности) недифференцируемы. Ниже предполагается, что размерность фазового пространства $n\geqslant 3$, и изучается случай $x_0\in\Gamma_{n-3}$, $x_0\neq 0$. Методы, примененные для исследования, отличны от тех, что использовались в [4], и могут быть полезны при рассмотрении общего случая $x_0\in\Gamma_{n-s}$, $1\leqslant s\leqslant n$, $x_0\neq 0$.

§ 2. Сведение задачи быстродействия к системе линейных уравнений. Предельные свойства решений

Известно, что задачу (1.1) можно свести к решению системы $n+1$ нелинейных уравнений относительно $n+1$ неизвестных $p=(p_1, \ldots, p_n)$ и T (см. [4]):

$$(2.1)\qquad \xi(p,T)=x_0+\varepsilon x_1,\qquad pp^{\mathrm{T}}=1,$$

где

$$\xi(p, T) = -\int_0^T \gamma(t)\, u(t, p)\, dt,$$

$\gamma(t) = \Psi(t) b$ (здесь $\Psi(t)$ — матрица фундаментальных решений системы $\dot\psi = -\psi A$), $u(t, p) = \operatorname{sgn}(p, \gamma(t))$.

Обозначим через τ_i, $i=1, 2, \ldots, n-1$, моменты переключения управления $u_x(t)$ для некоторой точки $x \in \Gamma_{n-1}$. Тогда $u_x(t) = (-1)^{i-1} u_x(+0)$ на (τ_{i-1}, τ_i), $i=1, 2, \ldots, n$, где $\tau_0=0$, $\tau_n = T(x)$. Отсюда получаем

$$\xi(p, T) = -\int_0^T \gamma(t)\, u(t, p)\, dt = u_x(+0) \sum_{i=1}^{n} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (-1)^{i-1} \gamma(t)\, dt.$$

Подставив это выражение в (2.1), получим новую систему уравнений относительно $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ и T:

(2.2) $\qquad \xi(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, T) = x_0 + \varepsilon x_1,$

где

$$\xi(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, T) = u_{x_0+\varepsilon x_1}(+0) \sum_{i=1}^{n} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (-1)^{i} \gamma(t)\, dt.$$

Таким образом, решение задачи (1.1) эквивалентно решению системы нелинейных уравнений (2.2), так как если $u_{x_0+\varepsilon x_1}(+0)$, $\tau_i(\varepsilon)$, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, и $T(\varepsilon)$ — решения системы (2.2), то $T(\varepsilon)$ — это время оптимального перехода из $x_0+\varepsilon x_1$ в 0, а оптимальное управление $u_{x_0+\varepsilon x_1}(t) = (-1)^{i-1} u_{x_0+\varepsilon x_1}(+0)$ на интервале $(\tau_{i-1}(\varepsilon), \tau_i(\varepsilon))$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Пусть точка x_0 является точкой излома изохронной поверхности, причем $x_0 \in \Gamma_{n-3}$. Следовательно, $u_{x_0}(t)$ имеет $n-3$ различные точки переключения τ_i^0, $i=1, 2, \ldots, n-3$, причем $0 < \tau_1^0 < \ldots < \tau_{n-3}^0 < T_0 = T(x_0)$. Предположим, что вектор x_1 таков, что $x_0 + \varepsilon x_1 \in \Gamma_{n-1}$ для малых ε. Обозначим через $\tau_i(\varepsilon)$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, точки переключения управления $u_{x_0+\varepsilon x_1}(t)$, а через $T(\varepsilon)$ — время оптимального перехода из $x_0+\varepsilon x_1$ в 0. Пусть теперь $\boldsymbol{\tau}(\varepsilon) = (\tau_1(\varepsilon), \ldots, \tau_{n-1}(\varepsilon), T(\varepsilon))^{\mathrm{т}}$, где индекс «т» означает транспонирование. При $\varepsilon \to 0$ вектор $\boldsymbol{\tau}(\varepsilon) \to \tilde{\boldsymbol{\tau}}$, причем $\xi(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = x_0$. Предел зависит, вообще говоря, от x_1. Очевидно, что возможны лишь пять случаев ($\varepsilon \to 0$):

1) $\tau_1(\varepsilon) \to 0$, $\tau_{n-1}(\varepsilon)$, $T(\varepsilon) \to T_0$, $\tau_i(\varepsilon) \to \overset{0}{\tau}_{i-1}$, $i=2, 3, \ldots, n-2$, т. е. $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (0, \tau_1^0, \ldots, \overset{0}{\tau}_{n-3}, T_0, T_0)^{\mathrm{т}}$;

2) $\tau_{n-2}(\varepsilon)$, $\tau_{n-1}(\varepsilon)$, $T(\varepsilon) \to T_0$, $\tau_i(\varepsilon) \to \tau_i^0$, $i=1, 2, \ldots, n-3$, т. е. $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (\tau_1^0, \ldots$ $\ldots, \tau_{n-3}, T_0, T_0, T_0)^{\mathrm{т}}$;

3) $\tau_{s+1}(\varepsilon)$, $\tau_{s+2}(\varepsilon) \to \theta$, где $\theta \in (0, T_0)$ и $\theta \neq \tau_i^0$, $i=1, 2, \ldots, n-3$, $\tau_i(\varepsilon) \to \tau_i^0$ $i=1, 2, \ldots, s$, $\tau_i(\varepsilon) \to \overset{0}{\tau}_{i-2}$, $i=s+3, \ldots, n-1$, $T(\varepsilon) \to T_0$, т. е. $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (\tau_1^0, \ldots, \tau_s^0,$ $\theta, \theta, \overset{0}{\tau}_{s+1}, \ldots, \overset{0}{\tau}_{n-3}, T_0)^{\mathrm{т}}$;

4) $\tau_s(\varepsilon)$, $\tau_{s+1}(\varepsilon)$, $\tau_{s+2}(\varepsilon) \to \tau_s^0$, $\tau_i(\varepsilon) \to \tau_i^0$, $i=1, 2, \ldots, s-1$, $\tau_i(\varepsilon) \to \overset{0}{\tau}_{i-2}$, $i=s+3, \ldots, n-1$, $T(\varepsilon) \to T_0$, т. е. $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (\tau_1^0, \ldots, \overset{0}{\tau}_{s-1}, \tau_s^0, \tau_s^0, \tau_s^0, \overset{0}{\tau}_{s+1}, \ldots,$ $\overset{0}{\tau}_{n-3}, T_0)^{\mathrm{т}}$;

5) $\tau_1(\varepsilon)$, $\tau_2(\varepsilon)\to 0$, $\tau_i(\varepsilon)\to\overset{0}{\tau}_{i-2}$, $i=3,4,\ldots,n-1$, $T(\varepsilon)\to T_0$, т. е. $\tilde{\tau}=(0,0,\tau_1^0,\ldots,\overset{0}{\tau}_{n-3},T_0)^{\mathrm{T}}$.

Отметим еще, что из непрерывности $\xi(\tau(\varepsilon))$ по ε следуют равенства $(\varepsilon\to 0)$

$$(2.3)\qquad v_0(\varepsilon)=\begin{cases} u_{x_0}(+0)=v_0, & \tau_1(\varepsilon)\to\tau_1^0>0,\\ -u_{x_0}(+0)=-v_0, & \tau_1(\varepsilon)\to 0;\end{cases}$$

здесь и далее $v_0(\varepsilon)=u_{x_0+\varepsilon x_1}(+0)$.

§ 3. Построение решений

Определим две единичные вектор-строки h_1, h_2 следующими равенствами:

$$h_1\gamma(0)=0,\qquad h_1\gamma(\tau_i^0)=0,\qquad i=1,2,\ldots,n-3,$$
$$h_1\gamma(T_0)=0,\quad \operatorname{sgn}(h_1\gamma(+0))=u_{x_0}(+0),$$
$$h_2\gamma(\tau_i^0)=0,\quad i=1,2,\ldots,n-3,\quad h_2\gamma(T_0)=h_2\gamma^{(1)}(T_0)=0,$$
$$\operatorname{sgn}(h_2\gamma(0))=u_{x_0}(+0);$$

здесь $\gamma^{(k)}(t)=d^k\gamma(t)/dt^k$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь такие направления возмущения x_1, для которых либо $h_2x_1<0$, либо $h_2x_1>0$, но $h_1x_1\neq 0$. Такие возмущения будем называть невырожденными.

Поскольку функции, входящие в левую часть уравнений системы (2.2), аналитические, то решение системы можно искать в виде ряда по дробным степеням параметра ε (см. [5]), т. е. в виде

$$(3.1)\qquad \tau(\varepsilon)=\tilde{\tau}+\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k\varepsilon^{(k+1)/s}.$$

Для невырожденных возмущений возможны лишь три случая расположения вектора x_1. Покажем, что в каждом из них можно рекуррентно определить коэффициенты τ_k, $k=1,2,\ldots$, так, чтобы при подстановке (3.1) в (2.2) уравнения обращались в тождества. Из результатов [6] следует, что тогда формальный ряд (3.1) имеет ненулевой радиус сходимости и, следовательно, представляет собой решение задачи $P(\varepsilon)$.

Ниже символом τ обозначается вектор-столбец $(\tau_1,\ldots,\tau_n)^{\mathrm{T}}$. Произведением $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ двух векторов $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ обозначим вектор $(a_1b_1,\ldots,a_nb_n)$. Разложим вектор-функцию $\xi(\tau)$ в окрестности точки $\tilde{\tau}$ в ряд Тейлора, принимая во внимание равенство нулю ее смешанных производных. Искомое разложение имеет вид

$$\xi(\tau)=x_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Omega^{(k-1)}(\tau-\tilde{\tau})^k,$$

где $x_0=\xi(\tilde{\tau})$, а $\Omega^{(k)}$ — матрица:

$$\Omega^{(k)}=v_0(-2\gamma^{(k)}(\tilde{\tau}_1),\ldots,(-1)^{n-1}2\gamma^{(k)}(\tilde{\tau}_{n-1}),(-1)^n\gamma^{(k)}(\tilde{T})).$$

Подставив в функцию $\xi(\boldsymbol{\tau})$ вместо $\boldsymbol{\tau}$ формальный ряд

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\delta^{k+1},$$

имеем

$$\xi\Big(\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\delta^{k+1}\Big)=x_0+\delta\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\Big(\sum_{l=0}^{k}\mathbf{z}_{l,k-l}\Big), \tag{3.2}$$

где

$$\mathbf{z}_{mp}=\begin{cases}\dfrac{1}{(m+1)!}\,\Omega^{(m)}\,\boldsymbol{\tau}_0^{m+1}, & p=0,\\[2mm] \dfrac{1}{(m+1)!}\,\Omega^{(m)}\,(m+1)\,\boldsymbol{\tau}_0{}^{m}\cdot\boldsymbol{\tau}_1, & p=1,\\[2mm] \dfrac{1}{(m+1)!}\,\Omega^{(m)}\displaystyle\sum_{\alpha^p\in c(m,\,p)}\dfrac{(m+1)!}{\alpha_0!\ldots\alpha_p!}\boldsymbol{\tau}_0^{\alpha_0}\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{\tau}_p^{\alpha_p};\end{cases}$$

здесь $\alpha^p=(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)$, а $c(m,\ p)=\{y\in R^{p+1}\,|\,0\leqslant y_2,\ldots,\ y_p\leqslant m+1;\ \ 0\leqslant y_0=m+1-p+y_2+\ldots+(p-1)y_p\leqslant m+1;\ \ 0\leqslant y_1=p-2y_2-\ldots-py_p\leqslant m+1\}$.

Исследуем каждый из трех возможных случаев расположения невырожденного вектора x_1.

Случай I. Пусть $h_2x_1>0$, $h_1x_1<0$. Покажем, что тогда реализуется предельный случай 1) из § 2, т. е. $\boldsymbol{\tau}(\varepsilon)\to\tilde{\boldsymbol{\tau}}$, где $\tilde{\boldsymbol{\tau}}=(0,\tau_1{}^0,\ldots,\tau_{n-3}^0,T_0,T_0)^{\mathrm{T}}$. Так как $\tau_1(\varepsilon)\to 0$, то, согласно (2.3), $v_0(\varepsilon)=-v_0$. Будем искать решение в виде ряда:

$$\boldsymbol{\tau}(\varepsilon)=\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{(k+1)/2}.$$

Подставим его в уравнение (2.2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε. Из формулы (3.2) следует равенство $\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_0=0$, т.е. $\boldsymbol{\tau}_0\in N(\Omega^{(0)})$ — ядру матрицы $\Omega^{(0)}$. В рассматриваемом случае $\Omega^{(0)}$ имеет вид

$$\Omega^{(0)}=-2v_0(-\gamma(0),\gamma(\tau_1{}^0),\ldots,(-1)^{n-2}\gamma(\tau_{n-3}^0),\ \ (-1)^{n-1}\gamma(T_0),\ (-1)^{n1}/_2\gamma(T_0)),$$

поэтому, в силу линейной независимости векторов $\gamma(0)$, $\gamma(\tau_i{}^0)$, $i=1,2,\ldots,n-3$, $\gamma(T_0)$, заключаем, что $\boldsymbol{\tau}_0=(0,\ldots,0,\alpha,2\alpha)$, где α — некоторое число. Приравняв коэффициенты при ε, получим уравнение

$$\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_1+{}^1/_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0{}^2=x_1. \tag{3.3}$$

Из определения вектора h_1 и вида матрицы $\Omega^{(0)}$ следует, что условие разрешимости уравнения (3.3) относительно $\boldsymbol{\tau}_1$ имеет вид $h_1(x_1-{}^1/_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0{}^2)=0$, или

$$h_1x_1=h_1\gamma^{(1)}(T_0)v_0\alpha^2(-1)^{n-1}. \tag{3.4}$$

Покажем, что $(-1)^{n-1}h_1\gamma^{(1)}(T_0)v_0<0$. Обозначим $\eta(t)=h_1\gamma(t)v_0$. По определению h_1, имеем $\operatorname{sgn}\eta(t)=(-1)^{i-1}$, $t\in(\tau_{i-1}^0,\tau_i{}^0)$, $i=1,2,\ldots,n$, где $\tau_0{}^0=0$, $\tau_n{}^0=T_0$. Следовательно, $\operatorname{sgn}(d\eta/dt)\big|_{t=\tau_i^0}=(-1)^i$, в частности $\operatorname{sgn}(d\eta/dt)\,|_{t=T_0}=(-1)^n$ и, значит, $(-1)^{n-1}(d\eta/dt)\,|_{t=T_0}<0$. Это доказывает утверждение.

Отсюда делаем вывод, что поскольку в рассматриваемом случае $h_1x_1<0$, то уравнение (3.4) разрешимо относительно α:

$$\alpha=\left(\frac{h_1x_1}{(-1)^{n-1}h_1\gamma^{(1)}(T_0)v_0}\right)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Знак перед корнем выбран из условия $\alpha>0$. Последнее следует из неравенства $\tau_{n-1}(\varepsilon)=T_0+\alpha\varepsilon^{1/2}+o(\varepsilon^{1/2})<T(\varepsilon)=T_0+2\alpha\varepsilon^{1/2}+o(\varepsilon^{1/2})$. Итак, вектор $\boldsymbol{\tau}_0$ определен.

Умножив обе части уравнения (3.3) на h_2 и воспользовавшись равенством $h_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0^2=0$, которое обусловлено структурой вектора $\boldsymbol{\tau}_0$, получим

$$h_2x_1=h_2\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_1=2\tau_{11}v_0h_2\gamma(0). \tag{3.6}$$

Здесь через τ_{ij} обозначена j-я компонента вектора $\boldsymbol{\tau}_i$. Поскольку в рассматриваемом случае $h_2x_1>0$, то из (3.6) заключаем, что $\tau_{11}=h_2x_1\times\times[2v_0h_2\gamma(0)]^{-1}>0$, так как $v_0h_2\gamma(0)>0$, что следует из определения вектора h_2. Отсюда заключаем, что $\tau_1(\varepsilon)=\tau_{11}\varepsilon+o(\varepsilon)>0$ для малых ε, т. е. $\tau_1(\varepsilon)$ действительно является точкой переключения.

Найдем выражение для $\boldsymbol{\tau}_k$, $k>0$, считая, что приближения $\boldsymbol{\tau}_0,\ldots,\boldsymbol{\tau}_{k-1}$ уже найдены. Приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{(k+1)/2}$, получим $\mathbf{z}_{0k}+\ldots+\mathbf{z}_{k0}=0$. Согласно (3.2), $\mathbf{z}_{0k}=\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_k$, а слагаемые вида $\mathbf{z}_{ls}$ для $s<k$ определяются через уже известные $\boldsymbol{\tau}_0,\ldots,\boldsymbol{\tau}_{k-1}$. Таким образом, получаем уравнение для $\boldsymbol{\tau}_k$:

$$\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_k=\eta_k, \tag{3.7}$$

где $\eta_k=-\mathbf{z}_{1,k-1}-\ldots-\mathbf{z}_{k0}$ — известный вектор.

Решение уравнения (3.7) ищем в виде

$$\boldsymbol{\tau}_k=\boldsymbol{\tau}_{k1}+\boldsymbol{\tau}_{k2}, \tag{3.8}$$

где $\boldsymbol{\tau}_{k1}$ — такое решение уравнения (3.7), что $\boldsymbol{\tau}_{k1}$ ортогонален ядру $N(\Omega^{(0)})$ и, значит, определяется однозначно. Вектор $\boldsymbol{\tau}_{k2}\in N(\Omega^{(0)})$ найдем, приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{(k+2)/2}$. Это дает $\mathbf{z}_{0,k+1}+\ldots+\mathbf{z}_{k+1,0}=0$. Согласно (3.2), $\mathbf{z}_{0,k+1}=\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_{k+1}$. Поэтому последнее уравнение имеет вид

$$\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_{k+1}=\eta_{k+1}, \tag{3.9}$$

где $\eta_{k+1}=-\mathbf{z}_{1k}-\ldots-\mathbf{z}_{k+1,0}$. Вектор $\boldsymbol{\tau}_k$ теперь построим так, чтобы уравнение (3.9) было разрешимо относительно $\boldsymbol{\tau}_{k+1}$. Имеем $h_1\eta_{k+1}=0$. Используя выражение (3.2) для $\mathbf{z}_{1k}=\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_k$, переписываем это условие в виде

$$h_1\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_k=-h_1(\mathbf{z}_{2,k-1}+\ldots+\mathbf{z}_{k+1,0}). \tag{3.10}$$

Поскольку слагаемые вида $h_1\mathbf{z}_{ls}$, где $s<k$, определяются через $\boldsymbol{\tau}_0,\ldots,\boldsymbol{\tau}_{k-1}$, то в полученном уравнении справа стоит некоторое известное число φ_k. Подставив (3.8) в (3.10), получим

$$h_1\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_{k2}=\hat{\varphi}_k, \tag{3.11}$$

где $\hat{\varphi}_k=\varphi_k-h_1\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_{k1}$ — известное число. Так как вектор $\boldsymbol{\tau}_{k2}\in N(\Omega^{(0)})$, то он имеет вид $\boldsymbol{\tau}_{k2}=(0,\ldots,0,\beta_k,2\beta_k)$, где β_k — некоторое число. Левая часть уравнения (3.11) теперь запишется следующим образом:

$$h_1\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_{k2}=h_1\gamma^{(1)}(T_0)w\alpha\beta_k-h_1\gamma^{(1)}(T_0)w2\beta_k=-h_1\gamma^{(1)}(T_0)w\alpha\beta_k,$$

где число α определено формулой (3.5), а $w=2(-1)^{n-1}v_0$. Поскольку $h_1\gamma^{(1)}(T_0)w>0$, $\alpha>0$, то $h_1\gamma^{(1)}(T_0)w\alpha\neq0$. Следовательно, уравнение (3.11) разрешимо и $\beta_k=-\hat{\varphi}_k/[h_1\gamma^{(1)}(T_0)w\alpha]$.

Отметим, что вектор τ_k был построен в предположении разрешимости уравнения (3.7). При $k=1$ это — уравнение (3.3), разрешимость которого обеспечивается соответствующим выбором τ_0. При $k=2, 3, \ldots$ разрешимость (3.7) обусловлена способом построения τ_{k-1}. Последнее сразу следует из описания процедуры вычисления τ_k.

Таким образом, доказано

Предложение 1. *Если вектор x_1 удовлетворяет условиям $h_1x_1<0$ и $h_2x_1>0$, то существует решение $v_0(\varepsilon)$, $\tau(\varepsilon)$ задачи (2.2) такое, что*

$$v_0(\varepsilon)=-v_0, \qquad \tau(\varepsilon)=\tilde{\tau}+\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k\varepsilon^{(k+1)/2},$$

где $\tilde{\tau}=(0, \tau_1^0, \ldots, \tau_{n-3}^0, T_0, T_0)^\tau$, а коэффициенты τ_k, $k=0, 1, \ldots$, могут быть последовательно определены так, как это показано выше.

Случай II. Пусть $h_2x_1<0$. Покажем, что тогда реализуется предельный случай 2) из § 2, т. е. $\tau(\varepsilon)\to\tilde{\tau}$, где $\tau=(\tau_1^0, \ldots, \tau_{n-3}^0, T_0, T_0, T_0)^\tau$.

Согласно (2.3), $v_0(\varepsilon)=v_0$, где $v_0=u_{x_0}(+0)$.

Будем искать $\tau(\varepsilon)$ в виде

$$\tau(\varepsilon)=\tilde{\tau}+\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k\varepsilon^{(k+1)/3}.$$

Для определения τ_0 подставим этот ряд в (2.2) и приравняем коэффициенты $\varepsilon^{1/3}$. Учитывая (3.2), получаем $\Omega^{(0)}\tau_0=0$, откуда $\tau_0\in N(\Omega^{(0)})$. Поскольку матрица $\Omega^{(0)}$ в рассматриваемом случае равна $\Omega^{(0)}=2v_0(-\gamma(\tau_1^0), \gamma(\tau_2^0), \ldots, (-1)^{n-3}\gamma(\tau_{n-3}^0), (-1)^{n-2}\gamma(T_0), (-1)^{n-1}\gamma(T_0), {}^1/_2(-1)^n\gamma(T_0))$, причем векторы $\gamma(\tau_i^0)$, $i=1, 2, \ldots, n-3$, и $\gamma(T_0)$ линейно независимы в силу чебышёвости системы функций $\gamma^i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, то ядро $N(\Omega^{(0)})$ этой матрицы двумерно. Векторы $a_1=(0, \ldots, 0, -1, 0, 2)^\tau$ и $a_2=(0, \ldots, 0, 1, 2)^\tau$ составляют базис ядра $N(\Omega^{(0)})$, поэтому $\tau_0=\alpha_0a_1+\beta_0a_2$, где α_0, β_0 — некоторые числа, которые следует определить. Из вида a_1, a_2 следует, что

(3.12) $\qquad \tau_0=(0, \ldots, 0, -\alpha_0, \beta_0, 2(\alpha_0+\beta_0))$.

Приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{2/3}$ и при ε, получим, как следует из формулы (3.2),

(3.13) $\qquad \Omega^{(0)}\tau_1=-{}^1/_2\Omega^{(1)}\tau_0^2=\eta_1$,

(3.14) $\qquad \Omega^{(0)}\tau_2=x_1-\Omega^{(1)}\tau_1\cdot\tau_0-({}^1/_3!)\Omega^{(2)}\tau_0^3=\eta_2$.

Базисом ядра матрицы $(\Omega^{(0)})^\tau$ являются векторы h_1^τ, h_2^τ. Нетрудно видеть, что $h_2\eta_1=0$. Это следует из определения h_2 и (3.12). Поэтому для разрешимости (3.13) требуется еще равенство

(3.15) $\qquad h_1\eta_1=0$.

Аналогично, в (3.14) потребуем выполнения условия

(3.16) $\qquad h_2\eta_2=0$.

Второе условие разрешимости (3.14), $h_1\eta_2=0$, будет использовано при построении вектора τ_1.

С учетом (3.12) уравнения (3.15), (3.16) примут вид

$$h_1\gamma^{(1)}(T_0)(3\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0+\beta_0)=0,$$

$$(^1/_3!)h_2\gamma^{(2)}(T_0)w[-\alpha_0^3-\beta_0^3+4(\alpha_0+\beta_0)^3]=h_2x_1,$$

где $w=2(-1)^n v_0$. Отметим, что, в силу линейной независимости векторов $\gamma(\tau_1^0),\dots,\gamma(\tau_{n-3}^0)$, $\gamma(T_0)$, $\gamma^{(1)}(T_0)$, $\gamma^{(2)}(T_0)$, величины $h_1\gamma^{(1)}(T_0)$, $h_2\gamma^{(2)}(T_0)\neq\neq0$. Следовательно,

$$(3\alpha_0+\beta_0)(\alpha_0+\beta_0)=0,$$

$$-\alpha_0^3+4(\beta_0+\alpha_0)^3-\beta_0^3=3!h_2x_1/[h_2\gamma^{(2)}(T_0)w].$$

Отсюда и из условия $h_2x_1<0$ вытекают соотношения

(3.17) $$\alpha_0=-^1/_3\beta_0,\quad \beta_0=3\left[\frac{(-1)^n h_2x_1}{2h_2\gamma^{(2)}(T_0)v_0}\right]^{1/3}.$$

Теперь из (3.12) имеем $\tau_0=(0,\dots,0,\beta_0/3,\beta_0,4\beta_0/3)$. Так как $\tau_{n-2}(\varepsilon)==T_0+^1/_3\beta_0\varepsilon^{1/3}+o(\varepsilon^{1/3})<\tau_{n-1}(\varepsilon)=T_0+\beta_0\varepsilon^{1/3}+o(\varepsilon^{1/3})<T(\varepsilon)=T_0+^4/_3\beta_0\varepsilon^{1/3}+o(\varepsilon^{1/3})$, то должно быть $\beta_0>0$.

Покажем, что $v_0h_2\gamma^{(2)}(T_0)(-1)^n<0$. Рассуждая так же, как и в случае I для выражения $(-1)^{n-1}h_1\gamma^{(1)}(T_0)v_0$, имеем $v_0h_2\gamma^{(1)}(T_0-0)(-1)^n>0$. Поскольку $h_2\gamma^{(1)}(T_0)=0$, то $v_0h_2\gamma^{(1)}(T_0+0)(-1)^n<0$. Отсюда следует утверждение. Используя последнее неравенство в (3.17) и учитывая, что в рассматриваемом случае $h_2x_1<0$, заключаем, что действительно $\beta_0>0$.

Предположим, что векторы $\boldsymbol{\tau}_0,\dots,\boldsymbol{\tau}_{k-1}$ определены. Найдем $\boldsymbol{\tau}_k$. Приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{(k+1)/3}$. Тогда

(3.18) $$\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_k=\eta_k,$$

где $\eta_k=-\mathbf{z}_{1,k-1}-\dots-\mathbf{z}_{k0}$, как следует из (3.2). Разрешимость этого уравнения относительно $\boldsymbol{\tau}_k$ гарантируется способом построения приближений либо $\boldsymbol{\tau}_{k-1}$, $\boldsymbol{\tau}_{k-2}$, если $k>1$, либо $\boldsymbol{\tau}_0$, если $k=1$.

Ищем решение (3.18) в виде

(3.19) $$\boldsymbol{\tau}_k=\boldsymbol{\tau}_{k1}+\boldsymbol{\tau}_{k2},$$

где $\boldsymbol{\tau}_{k2}\in N(\Omega^{(0)})$, а $\boldsymbol{\tau}_{k1}$ — такое решение уравнения (3.18), что $\boldsymbol{\tau}_{k1}\perp N(\Omega^{(0)})$. Определим $\boldsymbol{\tau}_{k2}$. По условию,

(3.20) $$\boldsymbol{\tau}_{k2}=\alpha_k\mathbf{a}_1+\beta_k\mathbf{a}_2=(0,\dots,0,-\alpha_k,\beta_k,2(\alpha_k+\beta_k))^{\mathrm{T}}.$$

Вычислим α_k и β_k. Для этого приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{(k+2)/3}$, $\varepsilon^{(k+3)/3}$. Это дает

(3.21) $$\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_{k+1}=\eta_{k+1}=-\mathbf{z}_{1k}-\dots-\mathbf{z}_{k+1,0},$$

(3.22) $$\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_{k+2}=\eta_{k+2}=-\mathbf{z}_{1,k+1}-\dots-\mathbf{z}_{k+2,0}.$$

Одно из условий разрешимости (3.21), $h_2\eta_{k+1}=0$, гарантировано построением вектора $\boldsymbol{\tau}_{k-1}$. Наложим второе условие:

(3.23) $$h_1\eta_{k+1}=0.$$

Кроме того, потребуем выполнения одного из условий разрешимости уравнения (3.22):

(3.24) $$h_2\eta_{k+2}=0.$$

Из (3.23), (3.24) определим α_k и β_k. Согласно (3.2), $\mathbf{z}_{1k}=\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_k$. Используя это выражение, переписываем (3.23):

(3.25) $$h_1\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_k=-h_1(\mathbf{z}_{2,\,k-1}+\ldots+\mathbf{z}_{k+1,\,0})=\varphi_k.$$

Аналогично, воспользовавшись выражением для $z_{2,\,k}=\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\cdot\boldsymbol{\tau}_k$ и равенством $h_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_{k+1}=0$, преобразуем (3.24) к виду

(3.26) $$h_2\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\cdot\boldsymbol{\tau}_k=\psi_k,$$

причем φ_k и ψ_k вычисляются с использованием $\boldsymbol{\tau}_0,\ldots,\boldsymbol{\tau}_{k-1}$.

Используя (3.18), (3.19), систему (3.25), (3.26) можно переписать в виде системы линейных уравнений относительно α_k, β_k:

(3.27) $$\Lambda\left\|\begin{matrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\hat\varphi_k\\ \hat\psi_k\end{matrix}\right\|,$$

где $\hat\varphi_k$, $\hat\psi_k$ — заданные числа, а матрица

$$\Lambda=\left\|\begin{matrix}h_1\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\mathbf{a}_1 & h_1\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\mathbf{a}_2\\ h_2\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\cdot\mathbf{a}_1 & h_2\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\cdot\mathbf{a}_2\end{matrix}\right\|.$$

Система (3.27) разрешима, поскольку

$$\det\Lambda=\frac{8}{9}\beta_0^3[h_1\gamma^{(1)}(T_0)][h_2\gamma^{(2)}(T_0)]\neq0.$$

Таким образом, доказано

Предложение 2. *Если вектор x_1 удовлетворяет неравенству $h_2x_1<$ <0, то существует решение $v_0(\varepsilon)$, $\boldsymbol{\tau}(\varepsilon)$ задачи (2.2) такое, что*

$$v_0(\varepsilon)=v_0,\qquad \boldsymbol{\tau}(\varepsilon)=\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{(k+1)/3},$$

где $\tilde{\boldsymbol{\tau}}=(\tau_1^0,\ldots,\tau_{n-3}^0,\ T_0,\ T_0,\ T_0)^{\mathrm{T}}$, а коэффициенты $\boldsymbol{\tau}_k$, $k=0,1,\ldots$, могут быть последовательно определены так, как это показано выше.

Случай III. Пусть $h_1x_1>0$, $h_2x_1>0$. Прежде чем переходить к построению решений в данном случае, докажем два предварительных утверждения.

Выберем на действительной оси $n-2$ непересекающихся отрезка I_i, $i=1,2,\ldots,n-2$. Обозначим через $\boldsymbol{\tau}$ набор $(\tau_1,\ldots,\tau_{n-2},t)$ из чисел $\tau_i\in I_i$, $i=1,2,\ldots,n-2$, $t\in\mathbf{R}$. Определим вектор-функцию $q(\boldsymbol{\tau})=(q_1,\ldots,q_n)$ как решение системы уравнений

(3.28а) $$q(\boldsymbol{\tau})\gamma(\tau_i)=0,\quad i=1,2,\ldots,n-2,\ q(\boldsymbol{\tau})\gamma(t)=0,$$

(3.28б) $$\|q(\boldsymbol{\tau})\|=1,\qquad t\neq\tau_i,\quad i=1,2,\ldots,n-2;$$

(3.29а) $$q(\boldsymbol{\tau})\gamma(\tau_i)=0,\quad i=1,2,\ldots,n-2,\qquad q(\boldsymbol{\tau})\gamma^{(1)}(\tau_{i_0})=0,$$

(3.29б) $$\|q(\boldsymbol{\tau})\|=1,\qquad t=\tau_{i_0}.$$

Векторы $\gamma(\tau_i)$, $i=1,2,\ldots,n-2$, $\gamma(t)$, если $t\neq\tau_i$, $i=1,2,\ldots,n-2$, и векторы $\gamma(\tau_i)$, $i=1,2,\ldots,n-2$, $\gamma^{(1)}(\tau_{i_0})$, если $t=\tau_{i_0}$, линейно независимы (см. [3]).

Для однозначности выбора $q(\boldsymbol{\tau})$ наложим еще условия

(3.30) $$\operatorname{sgn}(q(\boldsymbol{\tau})\gamma(\tau_1+0))=\begin{cases}-1, & t\leqslant\tau_1,\\ 1, & t>\tau_1.\end{cases}$$

Лемма 1. *Функция $q(\boldsymbol{\tau})$ непрерывна в области своего определения.*

Доказательство. 1. Рассмотрим точку $\boldsymbol{\tau}^0$ такую, что $t^0 \neq \tau_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Пусть $\boldsymbol{\tau}^k \to \boldsymbol{\tau}^0$, и так как $t^0 \neq \tau_i^0$, то $t^k \neq \tau_i^k$, $i=1, 2, \ldots, n-2$, для достаточно больших k. Следовательно, $q(\boldsymbol{\tau}^k)$ определяется условиями (3.28), (3.30).

Так как $\|q(\boldsymbol{\tau}^k)\|=1$, то можно считать, что $q(\boldsymbol{\tau}^k) \to q_0$. Перейдя к пределу в уравнениях $q(\boldsymbol{\tau}^k)\gamma(\tau_i^k)=0$, $i=1, 2, \ldots, n-2$, $q(\boldsymbol{\tau}^k)\gamma(t^k)=0$, получим $q_0\gamma(\tau_i^0)=0$, $i=1, \ldots, n-2$, $q_0\gamma(t^0)=0$. Очевидно, что для q_0 будут выполнены и условия (3.30). Таким образом, $q_0=q(\boldsymbol{\tau}^0)$. Следовательно, из всякой последовательности $\boldsymbol{\tau}^k \to \boldsymbol{\tau}^0$ можно выделить подпоследовательность $\{\boldsymbol{\tau}^{k_m}\}$ такую, что $q(\boldsymbol{\tau}^{k_m}) \to q(\boldsymbol{\tau}^0)$, а это и доказывает непрерывность $q(\boldsymbol{\tau})$ в выбранной точке.

2. Пусть точка $\boldsymbol{\tau}^0$ такова, что $t^0=\tau_{i_0}^0$ и $\boldsymbol{\tau}^k \to \boldsymbol{\tau}^0$. Рассмотрим две возможности.

а. Существует подпоследовательность $\{\boldsymbol{\tau}^{k_m}\}$ такая, что $t^{k_m}=\tau_{i_0}^{k_m}$; в этом случае, аналогично тому, как это делалось в п. 1 доказательства леммы, рассматривая вместо системы (3.28) систему (3.29), можно показать, что из $\{\boldsymbol{\tau}^{k_m}\}$ легко выделить подпоследовательность $\{\boldsymbol{\tau}^{k_{m_l}}\}$, для которой $q(\boldsymbol{\tau}^{k_{m_l}}) \to q(\boldsymbol{\tau}^0)$.

б. Лишь конечное число $\boldsymbol{\tau}^k$ таково, что $t^k=\tau_{i_0}^k$. Не ограничивая общности, полагаем, что $t^k<\tau_{i_0}^k$ для всех k. Так как $\|q(\boldsymbol{\tau}^k)\|=1$, то можно считать, что $q(\boldsymbol{\tau}^k) \to q_0$. Рассмотрим функцию $f_k(\theta)=q(\boldsymbol{\tau}^k)\gamma(\theta)$. В t^k, τ_i^k, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, n-2$, функция $f_k(\theta)$ обращается в нуль, следовательно, в силу чебышёвости системы функций $\gamma^i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n-2$, функция $f_k(\theta)$ меняет знак в каждой из точек t^k и τ_i^k, $i=1, 2, \ldots, n-2$ (см. [7]). Без ограничения общности, $f_k(t^k-0)>0$, $f_k(t^k+0)<0$, $f_k(\tau_{i_0}^k+0)>0$. При $k\to\infty$ получим $f(\theta)=q_0\gamma(\theta)\geqslant 0$ на $(\overset{0}{\tau}_{i_0-1}, \overset{0}{\tau}_{i_0+1})$. Кроме того, $f(\tau_{i_0}^0)=0$, откуда следует, что $f(\theta)$ имеет в $\tau_{i_0}^0$ минимум. Но тогда $(d/d\theta)f(\theta)|_{\theta=\tau_{i_0}^0}=q_0\gamma^{(1)}(\tau_{i_0}^0)=0$. Это означает, что вектор q_0 удовлетворяет системе уравнений (3.29) и условиям (3.30), т. е. $q_0=q(\boldsymbol{\tau}^0)$.

Таким образом, показано, что и во втором случае из любой последовательности $\boldsymbol{\tau}^k\to\boldsymbol{\tau}^0$ можно выбрать подпоследовательность $\{\boldsymbol{\tau}^{k_m}\}$ такую, что $q(\boldsymbol{\tau}^{k_m})\to q(\boldsymbol{\tau}^0)$. Последнее и доказывает лемму.

Лемма 2. *Для любого x_1 из конуса $h_i x_1>0$, $i=1, 2$, существует число $\theta\in(0, T_0)$ такое, что либо*

$$x_1=\sum_{i=1}^{n-3} c_i\gamma(\tau_i^0)+c_\theta\gamma(\theta)+c_T\gamma(T_0), \tag{3.31}$$

если $\theta\neq\tau_i^0$, $i=1, 2, \ldots, n-3$, либо

$$x_1=\sum_{i=1}^{n-3} c_i\gamma(\tau_i^0)+c\gamma^{(1)}(\tau_s^0)+c_T\gamma(T_0), \tag{3.32}$$

если $\theta=\tau_s^0$, и это разложение единственно.

Доказательство. Определим функцию $q(\boldsymbol{\tau})$ равенствами (3.28)—(3.30), положив $I_i=\{\tau_i^0\}$, $i=1, 2, \ldots, n-3$, $I_{n-2}=\{T_0\}$. Тогда $q(\boldsymbol{\tau})$ — функция только числового аргумента t. Обозначим ее q_t. Легко видеть, что $q_0=v_0h_1$, $q_{T_0}=-v_0h_2$. Рассмотрим на отрезке $[0, T_0]$ функцию $\eta(t)=v_0q_tx_1$. В силу условий, наложенных на x_1, имеем $\eta(0)>0$, $\eta(T_0)<0$. По лемме 1, функция $q(\boldsymbol{\tau})$ непрерывна, а значит, непрерывна и $\eta(t)$. Поэтому на $(0, T_0)$ существует точка θ такая, что $\eta(\theta)=0$, или $q_\theta x_1=0$. Это и означает, что для x_1 справедливо либо представление (3.31), если $\theta\neq\tau_i^0$, $i=1, 2,\ldots, n-3$, либо (3.32), если $\theta=\tau_s^0$. Единственность данного представления вытекает из линейной независимости системы векторов, стоящих в правых частях равенств (3.31) и (3.32).

В рассматриваемом случае III вектор x_1 принадлежит конусу $h_i x_1>0$, $i=1, 2$. По лемме 2, для него справедливо представление (3.31) или (3.32).

Случай III, а. Пусть x_1 представим в виде (3.31), причем $\tau_s^0<\theta<\tau^0_{s+1}$, $0\leqslant s\leqslant n-3$, $\tau_0^0=0$, $\tau^0_{n-2}=T_0$.

Нулевое приближение для $\boldsymbol{\tau}(\varepsilon)$ запишем в виде $\tilde{\boldsymbol{\tau}}=(\tau_1^0,\ldots, \tau_s^0, \theta, \theta, \tau^0_{s+1},\ldots, \tau^0_{n-3}, T_0)^{\mathrm{T}}$. Очевидно, $\xi(\tilde{\boldsymbol{\tau}})=x_0$. Решение $\boldsymbol{\tau}(\varepsilon)$ ищем в виде ряда

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{k+1}.$$

Подставив этот ряд в (2.2) и приравняв коэффициенты при ε, получим

(3.33) $\qquad \Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_0=x_1,$

где матрица

$$\Omega^{(0)}=2v_0(-\gamma(\tau_1^0),\ldots, (-1)^s\gamma(\tau_s^0),\ (-1)^{s+1}\gamma(\theta),$$
$$(-1)^s\gamma(\theta), (-1)^{s+1}\gamma(\tau^0_{s+1}),\ldots, (-1)^{n-3}\gamma(\tau^0_{n-3}),\ \frac{(-1)^{n-2}}{2}\gamma(T_0)).$$

По лемме 2, уравнение (3.33) имеет решение вида $\boldsymbol{\tau}_0=\mathbf{c}+\mathbf{a}$, где вектор $\mathbf{c}=(c_1,\ldots, c_s, c_\theta, 0, c_{s+1},\ldots, c_{n-3}, c_T)^{\mathrm{T}}$ и его компоненты однозначно определены, а вектор

$$\mathbf{a}=(\underbrace{0,\ldots,0}_{s}, \alpha, \alpha, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-s-2})^{\mathrm{T}}\in N(\Omega^{(0)}).$$

Точка переключения $\tau_{s+1}(\varepsilon)$ управления $u_{x_0+\varepsilon x_1}(t)$ равна $\tau_{s+1}(\varepsilon)=\theta+(c_\theta+\alpha)\varepsilon+o(\varepsilon)$; аналогично, $\tau_{s+2}(\varepsilon)=\theta+\alpha\varepsilon+o(\varepsilon)$. Так как должно выполняться неравенство $\tau_{s+1}(\varepsilon)<\tau_{s+2}(\varepsilon)$, то $c_\theta<0$. Покажем, что это действительно так. Для этого умножим (3.33) скалярно на h_1 и получим

(3.34) $\qquad 2c_\theta(-1)^{s+1}v_0h_1\gamma(\theta)=h_1x_1.$

Так как $\operatorname{sgn}(h_1\gamma(+0))=v_0$, то нетрудно видеть, что $(-1)^{s+1}v_0h_1\gamma(\theta)<0$. Равенство нулю $h_1\gamma(\theta)$ исключается в силу линейной независимости векторов $\gamma(0)$, $\gamma(\theta)$, $\gamma(T_0)$, $\gamma(\tau_i^0)$, $i=1, 2,\ldots, n-3$, и определения h_1. По предположению, $h_1x_1>0$. Отсюда и из (3.34) вытекает отрицательность c_θ.

Определим число α. Для этого приравняем коэффициенты при ε^2 и получим

(3.35) $\qquad \Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_1=-{}^1/{}_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0{}^2=\eta_1.$

Ядро матрицы $(\Omega^{(0)})^{\mathrm{T}}$ одномерно и определяется вектором q^{T} таким, что $q\gamma(\tau_i^0)=0$, $i=1, 2,\ldots, n-3$, $q\gamma(T_0)=0$, $q\gamma(\theta)=0$, $\|q\|=1$.

Условием разрешимости уравнения (3.35) является равенство $q\eta_1=0$, или

(3.36) $\qquad q\gamma^{(1)}(\theta)[(c_\theta+\alpha)^2-\alpha^2]=\varphi_1,$

где

$$\varphi_1 = -\sum_{i=1}^{n-3} q\gamma^{(1)}(\tau_i^0)c_i^2 - q\gamma^{(1)}(T_0)c_T^2$$

есть известное число. В силу линейной независимости векторов $\gamma(\tau_i^0)$, $i=1, 2, \ldots, n-3$, $\gamma(\theta)$, $\gamma(T_0)$, $\gamma^{(1)}(\theta)$ и определения вектора q, величина $q\gamma^{(1)}(\theta)\neq 0$. Из (3.36) находим

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi_1}{c_\theta q\gamma^{(1)}(\theta)} - c_\theta\right], \tag{3.37}$$

а значит, и вектор $\boldsymbol{\tau}_0$.

Пусть члены ряда $\boldsymbol{\tau}_0, \ldots, \boldsymbol{\tau}_{k-1}$ определены. Найдем $\boldsymbol{\tau}_k$. Приравняем коэффициенты при ε^{k+1}. Тогда для $\boldsymbol{\tau}_k$ получим уравнение (3.7). Рассуждая, как и в случае I, получаем, что $\boldsymbol{\tau}_k$ представим в виде (3.8). Вектор $\boldsymbol{\tau}_{k1}$ однозначно определен уравнением (3.7) и условием $\boldsymbol{\tau}_{k1}\perp$ $\perp N(\Omega^{(0)})$. Найдем $\boldsymbol{\tau}_{k2}$. Приравняв коэффициенты при ε^{k+2}, получим уравнение (3.9). Для его разрешимости достаточно равенства $q\eta_{k+1}=0$. Используя для η_{k+1} его выражение, а также формулу (3.2), имеем

$$q\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_k=\varphi_k, \tag{3.38}$$

где $\varphi_k=-q(\mathbf{z}_{2,k-1}+\ldots+\mathbf{z}_{k+1,0})$ — известное число, определяемое векторами $\boldsymbol{\tau}_s$, $s=0, 1, \ldots, k-1$. По определению, $\boldsymbol{\tau}_{k2}\in N(\Omega^{(0)})$ и, значит,

$$\boldsymbol{\tau}_{k2} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, \beta_k, \beta_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2-s})^{\mathrm{T}}.$$

Из (3.8), (3.38) получим

$$\beta_k = \frac{1}{2} v_0(-1)^{s+1}\frac{\varphi_k - q\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_{k1}}{c_\theta q\gamma^{(1)}(\theta)}.$$

Вопрос о разрешимости уравнения (3.7) исследуется так же, как и в случае I.

С л у ч а й III, б. Пусть вектор x_1 из конуса $h_i x_1>0$, $i=1, 2$, представим в виде (3.32), где $1\leqslant s\leqslant n-3$. Нулевое приближение зададим вектором

$$\tilde{\tau} = (\tau_1^0, \ldots, \overset{0}{\tau}_{s-1}, \tau_s^0, \tau_s^0, \tau_s^0, \overset{0}{\tau}_{s+1}, \ldots, \overset{0}{\tau}_{n-3}, T_0)^{\mathrm{T}}.$$

Решение $\bar{\tau}(\varepsilon)$ ищем в виде ряда

$$\boldsymbol{\tau}(\varepsilon) = \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{(k+1)/2}.$$

Подставив его в (2.2) и приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, получим в первом приближении уравнение $\Omega^{(0)}\boldsymbol{\tau}_0=0$, где

$$\Omega^{(0)} = 2v_0\Big(-\gamma(\tau_1^0), \ldots, (-1)^{s-1}\gamma(\overset{0}{\tau}_{s-1}), (-1)^s\gamma(\tau_s^0), (-1)^{s+1}\gamma(\tau_s^0), (-1)^{s+2}\gamma(\tau_s^0), (-1)^{s+1}\gamma(\overset{0}{\tau}_{s+1}), \ldots, (-1)^{n-3}\gamma(\overset{0}{\tau}_{n-3}), \frac{(-1)^{n-2}}{2}\gamma(T_0)\Big).$$

Отсюда $\boldsymbol{\tau}_0\in N(\Omega^{(0)})$, или $\boldsymbol{\tau}_0=\alpha_0\mathbf{a}_1+\beta_0\mathbf{a}_2$, где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — базис ядра $N(\Omega^{(0)})$, например

$$\mathbf{a}_1 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1}, 1, 1, 0, \ldots, 0), \qquad \mathbf{a}_2 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, 1, 1, 0, \ldots, 0).$$

В этом случае

(3.39) $\tau_0 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1}, \alpha_0, \alpha_0 + \beta_0, \beta_0, 0, \ldots, 0)$.

Приравняв коэффициенты при ε и $\varepsilon^{3/2}$, получим для τ_1 и τ_2 уравнения (3.13), (3.14). Базис ядра матрицы $(\Omega^{(1)})^{\mathrm{T}}$ состоит из векторов h_2^{T} и g^{T}, где g определен равенствами $0 = g\gamma^{(1)}(\tau_s^0) = g\gamma(T_0) = g\gamma(\tau_i^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n-3$. Линейная независимость векторов $\gamma(T_0)$, $\gamma(\tau_i^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n-3$, $\gamma^{(1)}(\tau_s^0)$, обусловливает неколлинеарность h_2 и g. Очевидно, $g\eta_1 = 0$. Поэтому для разрешимости (3.13) достаточно потребовать, чтобы

(3.40) $h_2\eta_1 = 0$.

Выберем τ_0 еще и так, чтобы было выполнено одно из условий разрешимости уравнения (3.14):

(3.41) $g\eta_2 = 0$.

Используя (3.39) и вид η_1 и η_2, уравнения (3.40), (3.41) можно переписать в виде

(3.42) $(-1)^s 2v_0\alpha_0\beta_0 h_2\gamma^{(1)}(\tau_s^0) = h_2x_1$,

(3.43) $\alpha_0\beta_0(\alpha_0+\beta_0)g\gamma^{(2)}(\tau_s^0) = 0$.

Векторы $\gamma(T_0)$, $\gamma^{(1)}(\tau_0^s)$, $\gamma^{(2)}(\tau_0^s)$, $\gamma(\tau_i^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n-3$, составляют базис в R^n, поэтому $g\gamma^{(2)}(\tau_s^0) \neq 0$. По условию, $h_2x_1 > 0$, и, значит, из (3.42), (3.43) получаем $\alpha_0 + \beta_0 = 0$. Из (3.42) следует, что

(3.44) $\beta_0 = \left[\dfrac{(-1)^s h_2 x_1}{2v_0 h_2 \gamma^{(1)}(\tau_s^0)} \right]^{1/2}$.

Выражение под корнем положительно, так как $v_0(-1)^s h_2\gamma^{(1)}(\tau_s^0) > 0$. Знак перед корнем обусловлен неравенствами $\tau_s(\varepsilon) = \tau_s^0 - \beta_0\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}) < \tau_{s+1}(\varepsilon) = \tau_s^0 + o(\varepsilon^{1/2}) < \tau_{s+2}(\varepsilon) = \tau_s^0 + \beta_0\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2})$. Таким образом,

$$\tau_0 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1}, -\beta_0, 0, \beta_0, 0, \ldots, 0),$$

где β_0 вычисляется по формуле (3.44).

Предположим, что найдены члены ряда $\tau_0, \ldots, \tau_{k-1}$. Определим τ_k. Приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{(k+1)/2}$. Тогда для τ_k получим уравнение (3.18). Его решение представлено в виде (3.19), при этом вектор τ_{k1} однозначно определен уравнением (3.18) и условием $\tau_k \perp N(\Omega^{(0)})$, а $\tau_{k2} \in N(\Omega^{(0)})$. Следовательно,

(3.45) $\tau_{k2} = \alpha_k a_1 + \beta_k a_2$.

Наша задача — вычислить коэффициенты α_k, β_k. Приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{(k+2)/2}$ и $\varepsilon^{(k+3)/2}$, получим уравнения (3.21), (3.22). Одно из условий разрешимости уравнения (3.21), а именно $g\eta_{k+1} = 0$, гарантировано построением вектора τ_{k-1}. Потребуем, чтобы выполнялось и второе условие:

(3.46) $h_2\eta_{k+1} = 0$.

Пусть, кроме того, справедливо одно из условий разрешимости уравнения (3.22):

(3.47) $g\eta_{k+2} = 0$.

Из (3.46), (3.47) определим коэффициенты α_k, β_k. Согласно (3.2), $\mathbf{z}_{1k}=\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_k$. Используя выражение для η_{k+1}, преобразуем (3.46):

$$h_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_k=-h_2(\mathbf{z}_{2,k-1}+\ldots+\mathbf{z}_{k+1,0})=\varphi_k. \tag{3.48}$$

Из определения g, $\boldsymbol{\tau}_0$ следует, что $g\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0=0$. Поэтому в уравнении (3.47) слагаемое $g\mathbf{z}_{1,k+1}$ отсутствует. Поскольку $\mathbf{z}_{2k}=\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\boldsymbol{\tau}_k$, то (3.47) имеет вид

$$g\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\cdot\boldsymbol{\tau}_k=-g(\mathbf{z}_{3,k-1}+\ldots+\mathbf{z}_{k+2,0})=\psi_k. \tag{3.49}$$

Числа φ_k и ψ_k определены векторами $\boldsymbol{\tau}_0,\ldots,\boldsymbol{\tau}_{k-1}$. Наконец, воспользуемся (3.45) и сведем уравнения (3.48), (3.49) к системе

$$\Lambda\left\|\begin{matrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\hat{\varphi}_k\\ \hat{\psi}_k\end{matrix}\right\|, \tag{3.50}$$

где числа $\hat{\varphi}_k=\varphi_k-h_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_{k1}$, $\hat{\psi}_k=\psi_k-g\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\cdot\boldsymbol{\tau}_{k1}$, а матрица

$$\Lambda=\left\|\begin{matrix}h_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\mathbf{a}_1 & h_2\Omega^{(1)}\boldsymbol{\tau}_0\cdot\mathbf{a}_2\\ g\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\cdot\mathbf{a}_1 & g\Omega^{(2)}\boldsymbol{\tau}_0^2\cdot\mathbf{a}_2\end{matrix}\right\| .$$

В силу линейной независимости векторов $\gamma(T_0)$, $\gamma^{(1)}(T_0)$, $\gamma(\tau_i^0)$, $i=1, 2,\ldots,n-3$, $\gamma^{(1)}(\tau_s^0)$ и определения h_2, скалярное произведение $h_2\gamma^{(1)}(\tau_s^0)\neq0$. Аналогично из линейной независимости векторов $\gamma^{(1)}(\tau_s^0)$, $\gamma^{(2)}(\tau_s^0)$, $\gamma(T_0)$, $\gamma(\tau_i^0)$, $i=1, 2,\ldots,n-3$, следует, что $g\gamma^{(2)}(\tau_s^0)\neq0$. Отсюда вытекает разрешимость системы (3.50), так как

$$\det\Lambda=-8\beta_0^3[h_2\gamma^{(1)}(\tau_s^0)][g\gamma^{(2)}(\tau_s^0)]\neq0.$$

Таким образом, доказано

Предложение 3. *Если вектор x_1 удовлетворяет неравенствам $h_ix_1>0$, $i=1, 2$, то для него справедливо одно из представлений:* (3.31) *или* (3.32).

Если он представим в виде (3.31), *то $x_0+\varepsilon x_1\in\Gamma_{n-1}$, задача* (2.2) *имеет решение $v_0(\varepsilon)$, $\boldsymbol{\tau}(\varepsilon)$, причем*

$$v_0(\varepsilon)=v_0,\qquad \boldsymbol{\tau}(\varepsilon)=\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{k+1},$$

где $\tilde{\boldsymbol{\tau}}=(\tau_1^0,\ldots,\tau_s^0,\theta,\theta,\overset{0}{\tau}_{s+1},\ldots,\overset{0}{\tau}_{n-3},T_0)^{\mathrm{T}}$, *а векторы $\boldsymbol{\tau}_k$, $k=0, 1,\ldots$, можно последовательно определить так, как это показано в случае* III, а.

Если же x_1 представим в виде (3.32), *то $x_0+\varepsilon x_1\in\Gamma_{n-1}$, задача* (2.2) *имеет решение*

$$v_0(\varepsilon)=v_0,\qquad \boldsymbol{\tau}(\varepsilon)=\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{(k+1)/2},$$

при этом $\tilde{\boldsymbol{\tau}}=(\tau_1^0,\ldots,\overset{0}{\tau}_{s-1},\tau_s^0,\tau_s^0,\tau_s^0,\overset{0}{\tau}_{s+1},\ldots,\overset{0}{\tau}_{n-3},T_0)^{\mathrm{T}}$, а векторы $\boldsymbol{\tau}_k$, $k=0, 1,\ldots$, можно последовательно определить так, как это сделано в случае III, б.

Таким образом, рассмотрены все случаи расположения невырожденного вектора возмущений x_1. Отсюда можно сделать вывод, что ответвление решений от точки $(0, 0, \tau_1^0,\ldots,\tau_{n-3}^0, T_0)$ возможно лишь для вырожденных задач.

Полученные результаты могут быть сведены в одно утверждение.

Теорема. *Пусть точка $x_0\in\Gamma_{n-3}$, $x_0\neq0$; $v_0=u_{x_0}(+0)$; τ_i^0, $i=1, 2,\ldots$ $\ldots, n-3$, — точки переключения оптимального управления $u_{x_0}(t)$; T_0 —*

время оптимального перехода в задаче $P(0)$. *Тогда если вектор возмущений* x_1 *не вырожден, то задача* $P(\varepsilon)$ *имеет единственное решение*

$$v(\varepsilon)=u_{x_0+\varepsilon x_1}(+0), \qquad \tau(\varepsilon)=(\tau_1(\varepsilon),\ldots,\tau_{n-1}(\varepsilon),T(\varepsilon)),$$

где $\tau_i(\varepsilon)$, $i=1, 2,\ldots,n-1,$ — *точки переключения оптимального управления* $u_{x_0+\varepsilon x_1}(t)$, $T(\varepsilon)$ — *время оптимального перехода. Это решение может быть представлено в трех видах.*

а. *Если* $h_1x_1<0$, $h_2x_1>0$, *то*

$$v(\varepsilon)=-v_0, \qquad \boldsymbol{\tau}(\varepsilon)=\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{(k+1)/2},$$

где $\tilde{\boldsymbol{\tau}}=(0,\tau_1^0,\ldots,\overset{0}{\tau}_{n-3},T_0,T_0)^{\mathrm{T}}$, *причем* $\tau_1(\varepsilon)=o(\varepsilon^{1/2})$, $\tau_i(\varepsilon)=\overset{0}{\tau}_{i-1}+o(\varepsilon^{1/2})$, $i=2, 3,\ldots, n-2$, $\tau_{n-1}(\varepsilon)=T_0+\alpha\varepsilon^{1/2}+o(\varepsilon^{1/2})$, $T(\varepsilon)=T_0+2\alpha\varepsilon^{1/2}+o(\varepsilon^{1/2})$; α *вычисляется по формуле* (3.5).

б. *Если* $h_2x_1<0$, *то*

$$v(\varepsilon)=v_0, \qquad \boldsymbol{\tau}(\varepsilon)=\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{(k+1)/3},$$

где $\tilde{\tau}=(\tau_1^0,\ldots,\tau_{n-3}^0, T_0, T_0, T_0)$, *причем* $\tau_i(\varepsilon)=\tau_i^0+o(\varepsilon^{1/3})$, $i=1, 2,\ldots,n-3$, $\tau_{n-2}(\varepsilon)=T_0+{}^1/_3\beta_0\varepsilon^{1/3}+o(\varepsilon^{1/3})$, $\tau_{n-1}(\varepsilon)=T_0+\beta_0\varepsilon^{1/3}+o(\varepsilon^{1/3})$, $T(\varepsilon)=T_0+{}^4/_3\beta_0\varepsilon^{1/3}+o(\varepsilon^{1/3})$; β_0 *вычисляется по формуле* (3.17).

в. *Если* $h_1x_1>0$, $h_2x_1>0$, *то для* x_1 *справедливо одно из представлений:* (3.31) *или* (3.32). *Если* x_1 *представляется формулой* (3.31), *то*

$$v(\varepsilon)=v_0, \qquad \boldsymbol{\tau}(\varepsilon)=\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{k+1},$$

где $\tilde{\boldsymbol{\tau}}=(\tau_1^0,\ldots,\tau_s^0,\theta,\theta,\overset{0}{\tau}_{s+1},\ldots,\overset{0}{\tau}_{n-3},T_0)$, *причем* $\tau_i(\varepsilon)=\tau_i^0+c_i\varepsilon+o(\varepsilon)$, $i=1, 2,\ldots,s$, $\tau_s(\varepsilon)=\theta+(c_\theta+\alpha)\varepsilon+o(\varepsilon)$, $\tau_{s+1}(\varepsilon)=\theta+\alpha\varepsilon+o(\varepsilon)$, $\tau_i(\varepsilon)=\tau_{i-2}^0+c_{i-2}\varepsilon+o(\varepsilon)$, $i=s+2,\ldots,n-1$, $T(\varepsilon)=T_0+c_T\varepsilon+o(\varepsilon)$; *здесь* c_i, c_θ, c_T — *коэффициенты разложения для* x_1 *в формуле* (3.31), α *вычисляется по формуле* (3.37). *Если же* x_1 *представляется формулой* (3.32), *то*

$$v(\varepsilon)=v_0, \qquad \boldsymbol{\tau}(\varepsilon)=\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\tau}_k\varepsilon^{(k+1)/2},$$

где $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1^0,\ldots,\overset{0}{\tau}_{s-1},\tau_s^0,\overset{0}{\tau}_s,\tau_s^0,\overset{0}{\tau}_{s+1},\ldots,\overset{0}{\tau}_{n-3},T_0)$, *причем* $\tau_i(\varepsilon)=\tau_i^0+o(\varepsilon^{1/2})$, $i=1, 2,\ldots,s-1$, $\tau_i(\varepsilon)=\tau_{i-2}^0+o(\varepsilon^{1/2})$, $i=s+3,\ldots,n-1$, $\tau_{s+1}(\varepsilon)=\tau_s^0+o(\varepsilon^{1/2})$, $\tau_s(\varepsilon)=\tau_s^0-\beta_0\varepsilon^{1/2}+o(\varepsilon^{1/2})$, $\tau_{s+2}(\varepsilon)=\tau_s^0+\beta_0\varepsilon^{1/2}+o(\varepsilon^{1/2})$, $T(\varepsilon)=T_0+o(\varepsilon^{1/2})$; β_0 *вычисляется по формуле* (3.44).

Описание процедур вычисления векторов $\boldsymbol{\tau}_k$, $k\geqslant1$, *для* а — в *см. в случаях* I—III *соответственно.*

Литература

1. *Киселев Ю. Н.* Линейная задача оптимального быстродействия при аналитических возмущениях начальных условий. – Дифференц. ур-ния, 1971, т. 7, № 12, с. 2151–2160.
2. *Белолипецкий А. А.* Линейная задача оптимального быстродействия с малым параметром.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 5, с. 1131–1137.

3. *Белолипецкий А. А., Рябов А. Ю.* О локальной структуре изохронной поверхности линейной задачи оптимального быстродействия в нерегулярной точке.— Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика, 1984, № 1, с. 43–48.
4. *Белолипецкий А. А., Рябов А. Ю.* О ветвлении решений линейной задачи оптимального быстродействия в нерегулярной точке.— Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика, 1984, № 4, с. 29–34.
5. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
6. *Artin M.* On the solution of analytic equations.— Inventiones Math., 1968, v. 5, p. 272–291.
7. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 12.X.1984
Переработанный вариант 24.VI.1985