ческий оператор 2-го порядка

$$L_1 u \equiv \frac{t + k^2(x)}{\Omega_0(t + k^2(x))} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2k(x) Dk(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t},$$

где модуль непрерывности Ω_0 удовлетворяет условию (A) и не удовлетворяет условию Дини. Тогда $\Sigma_1(\Delta) = \Sigma_0(\Delta) \cap \{x < h\}$ удовлетворяет условию (K_0), причем коэффициенты оператора $L_1 u$ ограничены в Δ, а сам оператор $L_1 u$ не может слабо вырождаться в угловой точке $O = (0, 0) \in \Sigma_1(\Delta)$. Функция класса (8)

$$u(x, t) = \int_0^{k^2(x)+t} \exp\left\{-\int_y^1 s^{-1} \Omega_0(s)\, ds\right\} dy, \quad (x, t) \in \Delta,$$

$$u(M_0) = 0 \quad \forall M_0 \in \Sigma_1(\Delta)$$

при достаточно малом $h > 0$ суперпараболична в Δ, причем

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \equiv \frac{\partial u(M_0)}{\partial M_0 p} = 0 \quad \forall M_0 \in \Sigma_1(\Delta).$$

Но тогда из последнего равенства вытекает, что теорема о внутренней производной неверна для оператора $L_1 u$, "сильно" вырождающегося в угловой точке $O \in \Sigma_1(\Delta)$.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
6 II 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* – Сиб. мат. журн., 1973, т. 14, № 1, с. 86–110. 2. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* – Там же, 1977, т. 18, № 1, с. 103–121. 3. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* – ЖВМиМФ, 1981, т. 21, № 4, с. 907–925. 4. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 5. *Надирашвили Н.С.* – ДАН, 1981, т. 261, № 4, с. 804–808. 6. *Александров А.Д.* – Изв. вузов. Математика, 1958, № 5, с. 126–157.

УДК 517.95 МАТЕМАТИКА

А.С. МАКИН

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 25 I 1984)

В настоящей работе для общего несамосопряженного эллиптического оператора второго порядка с произвольными краевыми условиями установлены точные оценки, характеризующие поведение собственных и присоединенных функций в случае, когда собственные значения расположены вне области, ограниченной параболой Карлемана.

Рассмотрим эллиптический оператор

$$(1)\qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

заданный в произвольной области G пространства R^N. Коэффициенты $a_{ij}(x)$ будем считать вещественнозначными функциями, все остальные коэффициенты, – вообще говоря, комплекснозначными.

Собственные и присоединенные функции $\overset{i}{u}$, $i = 0, 1, \ldots$, оператора (1) будем понимать в смысле В.А. Ильина (см. [1]), т.е.

$$L\overset{0}{u} + \lambda\overset{0}{u} = 0, \quad \overset{0}{u} \in C^{(2)}(G) \cap L_2(G), \quad \overset{0}{u} \not\equiv 0;$$

$$L\overset{i}{u} + \lambda\overset{i}{u} = \overset{i-1}{u}, \quad \overset{i}{u} \in C^{(2)}(G) \cap L_2(G), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Пусть выполнены следующие условия:

1) коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора (1) удовлетворяют условию эллиптичности, т.е. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и для любого компакта K области G

$$\inf_{|\xi|=1,\, x\in K} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0,$$

где ξ – вещественный вектор с обычной нормой;

2) функции $a_{ij}(x)$, $\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}$, $b_i(x)$, $c(x)$ непрерывны в области G.

Пусть компакты K и K' таковы, что $K \subseteq K' \subset G$. Обозначим

$$\sigma(K, K') = \operatorname{dist}(K, \partial K')\Big/\left(\max_{|\xi|=1,\, x\in K'} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)^{1/2}$$

Обозначим также $\mu = \sqrt{\lambda}$.

Теорема 1. *Для любого комплексного λ и любых компактов K и K' области G, первый из которых лежит внутри второго, справедливо неравенство*

$$(2)\qquad \exp(\sigma(K, K')|\operatorname{Im}\mu|)\left\|\overset{0}{u}\right\|_{L_2(K)} \leqslant C(K')\left\|\overset{0}{u}\right\|_{L_2(K')}.$$

Доказательство. Будем считать, что $\sigma(K, K')|\operatorname{Im}\mu| \geqslant 1$ (иначе оценка (2) тривиальна). Зафиксируем произвольное число ϵ, $0 < \epsilon < \sigma(K, K')/2$. Продолжим коэффициенты оператора (1) на все пространство R^N так, чтобы полученные функции $\tilde{a}_{ij}(x)$, $\tilde{b}_i(x)$, $\tilde{c}(x)$ совпадали соответственно с функциями $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ на компакте K', удовлетворяли во всем R^N тем же условиям на гладкость и чтобы оператор $\tilde{L}$ с коэффициентами $\tilde{a}_{ij}(x)$, $\tilde{b}_i(x)$, $\tilde{c}(x)$ удовлетворял условиям

$$\inf_{|\xi|=1,\, x\in R^N} \sum_{i,j=1}^{N} \tilde{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta > 0,$$

$$\operatorname{dist}(K, \partial K')\Big/\left(\max_{|\xi|=1,\, x\in R^N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)^{1/2} \leqslant \sigma(K, K') + \epsilon.$$

Пусть компакт K_ϵ лежит строго внутри компакта K, причем мера множества $K - K_\epsilon$ не превосходит ϵ. Существует такой компакт K'_ϵ, лежащий строго внутри компакта K', что $\operatorname{dist}(K_\epsilon, \partial K'_\epsilon) > \operatorname{dist}(K, \partial K')$. Обозначим символом $\eta(x)$ так называемую "срезку", т.е.

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in K'_\epsilon, \\ 0 & \text{при } x \notin K', \end{cases}$$

$0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1, \quad \eta(x) \in C^{(2)}(R^N)$. Введем в рассмотрение оператор $\hat{L}$

$$(3) \qquad \hat{L}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \tilde{L}\varphi,$$

действующий в пространстве $R^{N+1}(x, t)$. Легко видеть, что справедливо равенство $\hat{L}(\sin \mu t \overset{0}{u}(x)) = 0, \ (x, t) \in K' \times (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим две задачи Коши для оператора (3):

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\hat{L}\varphi = \hat{L}(\sin \mu t\, \eta(x) \overset{0}{u}(x)/\mu), \\ &\varphi\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \eta(x)\overset{0}{u}(x); \end{aligned}$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\hat{L}\varphi = 0, \\ &\varphi\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \eta(x)\overset{0}{u}(x). \end{aligned}$$

Поскольку оператор (3) гиперболический, то (см. [2]) решение задачи (5) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$(6) \qquad \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\| \varphi(x, t) \|_{W_2^1(R^N)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) \right\|_{L_2(R^N)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C(T) \left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) \right\|_{L_2(R^N)}.$$

Положим $t_0 = \sigma(K, K') - \epsilon$. Из (6) следует, что

$$(7) \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t_0) \right\|_{L_2(K_\epsilon)} \leqslant c_1 \| \overset{0}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Так как $\hat{L}(\sin \mu t\, \eta(x) \overset{0}{u}(x)/\mu) = 0$ при $(x, t) \in K'_\epsilon \times [0, \infty)$, то по теореме об области зависимости (см. [2]) решения задач (4) и (5) совпадают при $(x, t) \in \in K_\epsilon \times [0, t_0]$, стало быть, на этом множестве $\varphi(x, t) = \sin \mu t \overset{0}{u}(x)/\mu$. Отсюда и из (7) вытекает, что

$$|\cos \mu t_0| \ \| \overset{0}{u} \|_{L_2(K_\epsilon)} \leqslant c_1 \| \overset{0}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$(8) \qquad \exp(t_0 |\operatorname{Im} \mu|) \| \overset{0}{u} \|_{L_2(K_\epsilon)} \leqslant c_2 \| \overset{0}{u} \|_{L_2(K')}.$$

В оценке (8) постоянная c_2 не зависит от ϵ, поэтому, устремляя ϵ к нулю, получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. В работе [2] теоремы, на которые мы ссылались, доказаны для вещественнозначных решений задачи Коши для оператора с вещественными коэффициентами, но легко проверить, что они остаются справедливыми и в комплексном случае.

Теорема 2. *Для любого комплексного λ, любых компактов K и K' области G, первый из которых лежит строго внутри второго, и любого $\epsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$(9) \qquad \exp((\sigma(K, K') - \epsilon)|\operatorname{Im} \mu|) \| \overset{i}{u} \|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i, \epsilon) \| \overset{i}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Доказательство будет проводиться по индукции. Предположим $i = 1$. Пусть компакт K_1 лежит строго внутри компакта K', причем $\sigma(K, K_1) \geqslant$

$\geqslant \sigma(K, K') - \epsilon/3$. Определим функцию $\psi_1(x, t)$ равенством

$$\psi_1(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^t \sum_{j=0}^{1} \left(\frac{\tau^2}{2}\right)^j \frac{1}{j!} \frac{J_{j-1/2}(\mu\tau)}{(\mu\tau)^{j-1/2}} \overset{1-j}{u}(x)\, d\tau.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\psi_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi_1(x, 0) = \overset{1}{u}(x), \quad x \in G,$$

$$\hat{L}(\psi_1(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in K' \times (-\infty, \infty).$$

Рассуждая аналогично теореме 1, получим

$$(10) \quad \left\| \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t_0^2}{2}\right)^j \frac{1}{j!} \frac{J_{j-1/2}(\mu t_0)}{(\mu t_0)^{j-1/2}} \overset{1-j}{u}(x) \right\|_{L_2(K)} \leqslant C(K') \| \overset{1}{u} \|_{L_2(K')},$$

где $t_0 = \sigma(K, K') - \epsilon/2$. Из теоремы 1 следует

$$(11) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{1} \frac{t_0^2}{2} \left| \frac{J_{1/2}(\mu t_0)}{(\mu t_0)^{1/2}} \right| \| \overset{0}{u} \|_{L_2(K)} \leqslant \frac{c_1}{|\mu| + 1} \| \overset{0}{u} \|_{L_2(K_1)}.$$

Из работы [1] вытекает

$$(12) \quad \| \overset{0}{u} \|_{L^2(K_1)} \leqslant c_2 (|\operatorname{Im}\lambda| + |\mu| + 1) \| \overset{1}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Из неравенств (10), (11), (12) получаем

$$(13) \quad |\cos \mu t_0| \cdot \| \overset{1}{u} \|_{L_2(K)} \leqslant \frac{c_3 (|\operatorname{Im}\lambda| + 1)}{|\mu| + 1} \| \overset{1}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Из (13) и легко проверяемой оценки

$$\exp(-\epsilon |\operatorname{Im}\mu| /2) (|\operatorname{Im}\lambda| + 1)/(|\mu| + 1) \leqslant c_4$$

вытекает справедливость неравенства (9).

Для произвольного $i \geqslant 2$ доказательство проводится аналогично.

Замечание 2. В теореме 1 постоянная $\sigma(K, K')$ является точной в том смысле, что ее нельзя увеличить. Рассмотрение функции $\overset{1}{u}(x) = x \exp(i\mu x)/2\mu$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, при $\operatorname{Im}\mu \to \infty$ показывает, что в теореме 2 нельзя положить $\epsilon = 0$.

Замечание 3. Из работы [1] и неравенства (9) сразу вытекает следующая оценка антиаприорного типа:

$$\| \overset{i-1}{u} \|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i, \epsilon) \exp(-(\sigma(K, K') - \epsilon) \times$$
$$\times |\operatorname{Im}\mu|) (|\mu| + 1) \| \overset{i}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Замечание 4. Для одномерного оператора Шредингера аналогичные результаты получены В.В. Тихомировым [3, 4]. Для собственных и присоединенных функций оператора (1) оценка

$$|\operatorname{Im}\lambda| \, \| \overset{i}{u} \|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i) (|\lambda| + 1)^{1/2} \| \overset{i}{u} \|_{L_2(K')}$$

и вытекающая из нее и работы [1] антиаприорная оценка

$$\| \overset{i}{u} \|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i) (|\mu| + 1) \| \overset{i+1}{u} \|_{L_2(K')}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

справедливая при любых значениях спектрального параметра, получена Н.Ю. Капусти-

ным в работе [5]. Н.Ю. Капустин сообщил, что им получена оценка

$$\exp(\operatorname{dist}(K, \partial K')|\operatorname{Im}\mu|/C(L,i))\|\overset{i}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K,K',i)\|\overset{i}{u}\|_{L_2(K')},$$
$$i = 0, 1, \ldots,$$

где $C(L, i)$ – некоторая постоянная, зависящая от коэффициентов оператора L и номера i.

Автор выражает глубокую благодарность проф. В.А. Ильину за внимание к работе и полезное обсуждение ее результатов, а также проф. Е.И. Моисееву и Н.Ю. Капустину за проявленный к работе интерес.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
3 II 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 1, с. 30–37. 2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 3. *Тихомиров В.В.* – Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1378–1385. 4. *Тихомиров В.В.* – ДАН, 1983, т. 273, № 4, с. 807–810. 5. *Капустин Н.Ю.* – ДАН, 1984, т. 277, № 4, с. 791–794.

УДК 519 МАТЕМАТИКА

Г.А. МИХАЙЛОВ

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВЕСОВЫХ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

(*Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 6 I 1984*)

1. Формулировка критерия. Рассмотрим систему интегральных уравнений 2-го рода:

$$(1)\qquad \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_X k_{ij}(x, y)\varphi_j(y)dy + H_i(x), \text{ или } \varphi = K\Phi + H,$$

где $H = (h_1, h_2, \ldots, h_m) \in L_\infty$, $K \in L_\infty \to L_\infty$, и $\|H\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup_{i,x} h_i(x)$. Предполагается, что спектральный радиус $\rho(K) < 1$. Рассмотрим также цепь Маркова $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, с плотностью перехода $p(x', x)$, причем величина $1 - \int p(x, y)dy \geqslant 0$ рассматривается как вероятность обрыва цепи в точке x, N – случайный номер последнего состояния, $x_0 = x$. Стандартная векторная оценка метода Монте-Карло для $H(x)$ строится на основе соотношений

$$\Phi(x) = \mathbf{M}\xi_x, \quad \xi_x = H(x) + \sum_{n=1}^{N} Q_n H(x_n),$$

$$Q_0 = I, \quad Q_{n+1} = K(x_n, x_{n+1})Q_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где I – единичная матрица, а $K(x, y)$ – матрица ядер $\{k_{ij}(x, y)\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что соотношение $\Phi(x) = \mathbf{M}\xi_x$ справедливо при выполнении достаточно ясных условий несмещенности и дополнительного условия $\rho(K) < 1$, где K_1 – опе-