



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О неравенстве для чисел Бетти гиперкэлеровых многообразий размерности шесть

Н. Курнос

1. Введение. *Гиперкэлеровым многообразием* называется риманово многообразие M с тройкой комплексных структур I, J и K , удовлетворяющих следующим свойствам:

- (i) метрика g на M кэлерова для этих комплексных структур;
- (ii) для эндоморфизмов I, J и K вещественного касательного расслоения выполнено $I \circ J = -J \circ I = K, I^2 = J^2 = K^2 = -1$.

Если компактное гиперкэлеровое многообразие M имеет $\pi_1(M) = 0, H^{2,0}(M) = \mathbb{C}$, то оно называется *простым (неприводимым)*. Согласно знаменитой теореме Богомолова любое компактное гиперкэлеровое многообразие допускает конечное накрытие произведением тора и нескольких неприводимых гиперкэлеровых многообразий [1]. В комплексной размерности четыре и выше известно две серии гиперкэлеровых многообразий – схемы Гильберта n точек над $K3$ и обобщенные многообразия Куммера [2], а также два sporadic примера О’Грэди [3], [4]. Позднее было доказано, что пространства модулей векторных расслоений при других численных параметрах, отличных от тех, что дают примеры выше, не допускают симплектического разрешения [5].

Хойбрехтс [6] доказал конечность числа классов деформаций голоморфно симплектических структур на каждом гладком гиперкэлеровом многообразии. Тем не менее, открытой остается гипотеза Бовилля, утверждающая конечность числа компактных неприводимых гиперкэлеровых многообразий в каждой размерности. Гуан [7] доказал эту гипотезу в комплексной размерности четыре; в частности, второе число Бетти b_2 может принимать значения от 3 до 8 или 23.

В данной работе получено неравенство для чисел Бетти гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть M – компактное неприводимое гиперкэлеровое многообразие размерности шесть. Тогда выполнено*

$$97 + \frac{37}{2} b_3 - \frac{19}{2} b_4 - \frac{1}{2} b_5 + \frac{23}{2} h^{2,2} \leq \frac{38b_2^2 - 1030b_2 + 7572}{b_2 + 1}. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке РФФ (грант № 14-21-00053 от 11.08.2014). Автор частично поддержан грантом МК-1297.2014.1.

DOI: 10.4213/mzm10838

2. Основные определения. Комплексное многообразие M называется *голоморфно симплектическим*, если на нем существует замкнутая голоморфная 2-форма Ω такая, что $\Omega^n = \Omega \wedge \Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ – нигде невырожденное сечение канонического класса на M , где $2n = \dim_{\mathbb{C}}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы Бохнера о занулении и классификации голономий Берже [8] следует, что гиперкэлерово многообразие имеет максимальную голономию $\mathrm{Sp}(n)$ тогда и только тогда, когда $\pi_1(M) = 0$, $H^{2,0}(M) = \mathbb{C}$.

Простое вычисление [8] показывает, что форма

$$\Omega = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K \quad (2)$$

имеет тип $(2, 0)$ и эта форма замкнутая, а следовательно, голоморфная, а также нигде невырожденная. Эта форма называется *канонической голоморфно симплектической формой многообразия M* . Значит, комплексное многообразие (M, L) голоморфно симплектическое для всех гиперкэлеровых многообразий M и индуцированных комплексных структур L . Верно и обратное утверждение в предположении кэлеровости многообразия M .

ТЕОРЕМА 2 [2], [8]. Пусть M – компактное кэлерово голоморфно симплектическое многообразие с голоморфно симплектической формой Ω , w – кэлерова форма, $n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Предположим, что $\int_M w^n = \int_M (\mathrm{Re} \Omega)^n$. Тогда существует единственное гиперкэлерова структура (I, J, K, g) на M такая, что класс когомологий симплектической формы $w_I = g(\cdot, I \cdot)$ равен w и $\Omega = w_J + \sqrt{-1}w_K$.

3. Форма Богомолова–Бовилля–Фуджики.

ТЕОРЕМА 3 [9]. Пусть M – неприводимое гиперкэлеровое многообразие и $2n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Тогда существует примитивная квадратичная форма q на $H^2(M, \mathbb{Z})$ и целое число $\lambda > 0$ такие, что $\int_M \eta^{2n} = \lambda q(\eta, \eta)^n$ для любой формы $\eta \in H^2(M)$.

Форма q называется *формой Богомолова–Бовилля–Фуджики* (ББФ). Она определяется соотношением Фуджики канонически, с точностью до знака. Для нечетных n знак определен однозначно. В случае четного n выбор знака можно задать с помощью явной формулы для формы ББФ или неравенства

$$q(\Omega, \bar{\Omega}) > 0, \quad 0 \neq \Omega \in H^{2,0}(M).$$

4. Инварианты Розанского–Виттена. Определим инварианты Розанского–Виттена, следуя Хитчину и Сейвону [10], [11]. Рассмотрим простое гиперкэлеровое многообразие M ; тензор кривизны можно рассматривать как сечение $K \in \Omega^{1,1}(\mathrm{End} T)$. В локальных координатах тензор кривизны имеет вид $K_{jk\bar{l}}^i$. Используя голоморфно симплектическую 2-форму Ω , можно отождествить касательное и кокасательное расслоения, поэтому мы можем опустить первый индекс и определить форму

$$\Phi \in \Omega^{1,1}(T^* \otimes T^*) = \Omega^{0,1}(T^* \otimes T^* \otimes T^*)$$

по формуле

$$\Phi_{ijk\bar{l}} = \sum_m \Omega_{im} K_{jk\bar{l}}^m.$$

Этот тензор симметричен по индексам j, k , поскольку связность без кручения и сохраняет комплексную структуру. Поскольку кривизна принимает значения в алгебре Ли $\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{C})$ и состоит из матриц вида A_j^i , где $S_{ij} = \sum_k \omega_{ik} A_j^k$ и S_{ij} симметричные, поэтому тензор $\Phi_{ijk\bar{l}}$ также симметричен по индексам i, j . Значит, $\Phi \in \Omega^{0,1}(\mathrm{Sym}^3 T^*)$.

Пусть Γ – тривалентный граф с четным числом $2k$ вершин и без петель. Определим ориентацию графа Γ как класс эквивалентности циклических порядков в каждой вершине; два таких порядка эквивалентны, если отличаются на четном числе вершин. Зафиксируем

ориентацию графа и рассмотрим тензор $\Phi \otimes \Phi \otimes \dots \otimes \Phi$ с $2k$ сомножителями. Если вершины v_m и v_n ($m < n$) соединены ребром, то свернем тензор с $\tilde{\Omega}$ на T^* , двойственной к Ω . Заметим, что при переходе к двойственному базису матрица Ω^{ij} тензора $\tilde{\Omega}$ – это минус обратная к Ω_{ij} . В результате получаем

$$c_{m,n} \Omega^{i_m i_n} \Phi \otimes \dots \otimes \Phi_{i_m \dots} \otimes \dots \otimes \Phi_{i_n \dots} \otimes \dots \otimes \Phi,$$

где $c_{m,n} = 1$, если ребро ориентировано от v_m к v_n , и $c_{m,n} = -1$ иначе. Прделавав такую операцию по всем $3k$ ребрам, мы получаем сечение $\bar{T}^* \otimes \dots \otimes \bar{T}^*$. Спроецировав на внешнее произведение, получаем форму

$$\Gamma(\Phi) \in \Omega^{0,2k}.$$

Инвариантом Розанского–Виттена для тривалентного графа Γ на гиперкэлеровом многообразии M называется

$$b_\Gamma(M) = \frac{1}{(8\pi^2)^k k!} \int_M \Gamma(\Phi) \omega^k. \quad (3)$$

Инварианты Розанского–Виттена постоянны на компонентах связности пространства модулей гиперкэлеровых метрик на M .

5. Доказательство теоремы 1. Инварианты Розанского–Виттена подробно рассматривались в [10], [11], в частности получены формулы для инвариантов простых графов Θ^k (k копий графа Θ на двух вершинах) и Θ_2 (граф на четырех вершинах) через геометрические инварианты многообразия.

Для начала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1 [11]. *Пусть M – неприводимое гиперкэлеровое многообразие комплексной размерности $2n$. Тогда*

$$-b_{\Theta^k} \leq (b_2 + 2(k-1))b_{\Theta^{k-2}\Theta_2}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим двойственную к форме ББФ форму в $\text{Sym}^2 H^2(M)$ за Q . Тогда c_2 представляется в виде $\mu Q + p$, где p лежит в примитивных когомологиях $H_{\text{prim}}^4(M)$. Тогда $c_2^2 = \mu^2 Q^2 + 2\mu Qp + p^2$; умножая на $\Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2}$ и интегрируя, имеем

$$\int_M c_2^2 \Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2} = \mu^2 \int_M Q^2 \Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2} + \int_M p^2 \Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2} \geq \mu^2 \int_M Q^2 \Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2},$$

где мы воспользовались ортогональностью $Q \Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2}$ и p . Константу μ можно определить, домножив равенство для c_2 на $\Omega^{n-1} \bar{\Omega}^{n-1}$ и проинтегрировав. Таким образом, получаем

$$\left(\int_M c_2^2 \Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2} \right) \left(\int_M Q \Omega^{n-1} \bar{\Omega}^{n-1} \right)^2 \geq \left(\int_M c_2 \Omega^{n-1} \bar{\Omega}^{n-1} \right)^2 \left(\int_M Q^2 \Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2} \right).$$

Домножив обе части неравенства на $(\int_M c_2 \Omega^{n-1} \bar{\Omega}^{n-1})^{n-2} / (\int_M \Omega^n \bar{\Omega}^n)$ и используя формулы для b_{Θ^k} и $b_{\Theta^{k-2}\Theta_2}$, получаем неравенство

$$n(b_{\Theta^n} + 2b_{\Theta^{n-2}\Theta_2}) \left(\int_M Q \Omega^{n-1} \bar{\Omega}^{n-1} \right)^2 \geq (n-1)b_{\Theta^n} \left(\int_M Q^2 \Omega^{n-2} \bar{\Omega}^{n-2} \right) \left(\int_M \Omega^n \bar{\Omega}^n \right).$$

Заметим, что мы можем перейти от $\Omega \bar{\Omega}$ к $\Omega + \bar{\Omega}$. Полученное неравенство остается верным и после деформации комплексной структуры, а значит, мы можем заменить $\Omega + \bar{\Omega}$ на произвольную форму u . Тем самым мы получаем неравенство

$$(2n-1)(b_{\Theta^n} + 2b_{\Theta^{n-2}\Theta_2}) \left(\int_M Q u^{2n-2} \right)^2 \geq (2n-3)b_{\Theta^n} \left(\int_M Q^2 u^{2n-4} \right) \left(\int_M u^{2n} \right). \quad (5)$$

Пусть e_1, \dots, e_{b_2} – ортонормальный базис на $H^2(M, \mathbb{C})$ такой, что $Q = \sum_{i=1}^{b_2} e_i^2$, а в качестве формы u возьмем $\sum_{i=1}^{b_2} e_i$. Тогда, пользуясь формулой Фуджики и [12; следствие 23.17], получаем

$$\int_M Q u^{2n-2} = \lambda_Q q \left(\sum e_i \right)^{n-1} = \lambda \left(\frac{b_2 + 2n - 2}{2n - 1} \right) b_2^{n-1},$$

$$\int_M Q^2 u^{2n-4} = \lambda_{Q^2} q \left(\sum e_i \right)^{n-1} = \lambda \left(\frac{(b_2 + 2n - 2)(b_2 + 2n - 4)}{(2n - 1)(2n - 3)} \right) b_2^{n-2},$$

где $\lambda = \int_M e_i^{2n}$. Таким образом, подставляя все это в неравенство (5), получаем требуемое.

Используя формулу “пузырьков” [11; с. 68], получаем выражение для инварианта Розанского–Виттена графа $\Theta^{k-2}\Theta_2$

$$b_{\Theta^{k-2}\Theta_2} = -2^{k-2} (24)^{k-1} (k-2)! (48k + s_2) \text{Td}^{(1/2)}, \quad (6)$$

где $\text{Td}^{(1/2)}$ – мультипликативная последовательность классов Понтрягина, определенная степенным рядом

$$\left(\frac{\sqrt{z}/2}{\sinh \sqrt{z}/2} \right)^{1/2},$$

а s_2 – нормированный класс Черна. Производящая функция для $\text{Td}^{(1/2)}$ получена в [11; теорема 10] и может быть выражена в терминах классов Черна.

Для графа Θ^k имеем [10] $b_{\Theta^{k-2}\Theta_2} = 48^k k! \text{Td}^{(1/2)}$.

В размерности четыре лемма 1 дает в точности результат Гуана [7].

В размерности шесть ($k = 3$), используя значения инвариантов Розанского–Виттена, получаем из леммы 1 следующее неравенство:

$$\left(-s_2^3 - \frac{12}{5} s_2 s_4 - \frac{64}{35} s_6 \right) \geq (b_2 + 4) (2 \cdot 24^2 (48 \cdot 3 + s_2) \times \left(1 - \left(\frac{1}{48} \right) s_2 + \left(\frac{1}{48^2 2!} \right) \left(s_2^2 + \frac{4}{5} s_4 \right) - \left(\frac{1}{48^3 3!} \right) \left(s_2^3 + \frac{12}{5} s_2 s_4 + \frac{64}{35} s_6 \right) \right),$$

которое можно упростить, выразив классы Черна через $\chi^i = \sum_{j=0}^n h^{i,j}$ ([11; с. 123]):

$$3(3948 + 19\chi^1 + \chi^2) \geq (b_2 + 4)(1068 + 19\chi^1 + \chi^2). \quad (7)$$

Заметим, что по определению

$$\chi^1 = 5 - 2b_2 + b_3 - \frac{1}{2} b_4 + \frac{1}{2} h^{2,2} \quad \text{и} \quad \chi^2 = 2 - \frac{1}{2} b_3 + 2h^{2,2} - \frac{1}{2} b_5.$$

Подставив это в предыдущее неравенство, получаем искомое.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $\text{Hilb}^3(K3)$ выполнено равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку различных чисел Бетти пять, а чисел Ходжа шесть, в отличие от случая размерности четыре, полностью исключить последние нельзя. В размерности восемь ситуация сложнее, поскольку числа Черна неоднозначно выражаются через χ^i .

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Михаилу Вербицкому за советы и обсуждение работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. А. Богомолов, *Матем. сб.*, **93**:4 (1974), 573–575. [2] A. Beauville, *J. Differential Geom.*, **18**:4 (1983), 755–782. [3] K. G. O’Grady, *J. Reine Angew. Math.*, **512** (1999), 49–117. [4] K. G. O’Grady, *J. Algebraic Geom.*, **12** (2003), 435–505. [5] D. Kaledin, M. Lehn, Ch. Sorger, *Invent. Math.*, **164**:3 (2006), 591–614. [6] D. Huybrechts, *Finiteness Results for Hyperkaehler Manifolds*, 2001, arXiv: math/0109024v1. [7] D. Guan, *Math. Res. Lett.*, **8**:5 (2001), 663–669. [8] A. Besse, *Einstein Manifolds*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), Springer-Verlag, New York, 1987. [9] A. Fujiki (Sendai, 1985), *Adv. Stud. Pure Math.*, **10** (1987), 105–165. [10] N. Hitchin, J. Sawon, *Duke Math. J.*, **106**:3 (2001), 599–615. [11] J. Sawon, *Rozansky–Witten Invariants of Hyperkähler Manifolds*, Ph.D. Thesis, University of Cambridge, 1999. [12] D. Huybrechts, *Calabi–Yau Manifolds and Related Geometries*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 161–225.

Н. Курносов

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва
E-mail: nikon.kurnosov@gmail.com

Поступило
03.07.2015