

УДК 533

## ДЕФОРМАЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ СИЛЬНОМ СЖАТИИ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПУЗЫРЬКОВ

© 2015 г. А. А. Аганин, Т. Ф. Халитова

*Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН**E-mail: aganin@kfti.knc.ru, taliny@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.04.2014 г.

Проведено исследование деформации радиально сходящейся ударной волны, возникающей внутри сфероидального кавитационного пузырька при его сильном сжатии. Показано, что ударная волна в ходе своего схождения может сильно деформироваться. В частности, изначально наиболее выпуклые части контура поверхности ударной волны в осевом сечении могут сначала превращаться в прямолинейные, а затем трансформироваться в вогнутые. Вместе с образованием в контуре вогнутых участков в нем возникают и заострения. В дальнейшем на месте заострений могут образовываться небольшие прямолинейные участки. В рассмотренных случаях изначально вытянутого и сплюснутого пузырьков смыкание ударной волны начинается, как и при смыкании сферической ударной волны в идеально сферическом пузырьке, в самом центре пузырька.

DOI: 10.7868/S0040364415050014

### ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее важных особенностей динамики пузырьков в жидкости является возможность достижения в пузырьках при их сильном сжатии (коллапсе) высоких давлений, плотностей и температур [1–4]. В частности, экспериментальные исследования явления однопузырьковой сонолюминесценции показали, что в пузырьке при коллапсе достигаются температуры более  $10^4$  К и давления более  $10^3$  атм. [5]. Другим примером является экспериментально установленный синтез наноалмазов при кавитации бензола [6].

Имеющиеся теоретические оценки сильного сжатия среды в пузырьке основаны на предположении о сферической симметрии процесса коллапса. Согласно этим оценкам, наибольшая кумуляция энергии коллапса пузырька в его полости достигается тогда, когда в ходе заключительной высокоскоростной стадии в пузырьке возникают радиально сходящиеся ударные волны [7]. В результате их схождения и фокусировки значительно более сильному сжатию подвергается среда в центральной области пузырька. Величина достигаемых там степеней сжатия существенно зависит от формы и пузырька, и ударных волн. Ясно, что полученные с применением сферически симметричных моделей оценки размеров и конфигурации области пара в пузырьке с экстремально высокими значениями плотности, температуры, давления будут справедливы лишь тогда, когда и пузырек при коллапсе, и ударные волны в нем будут достаточно близкими к сферическим. Если, например, пузырек при коллапсе разрушится, то и суперсжатие среды в нем вряд ли реализуется. Рост амплитуды малых возмущений сферичности кавитационного пузырька в

дейтерированном ацетоне при его коллапсе подробно рассмотрен в [8]. В этой работе, в частности, показано, что несферичность пузырька при коллапсе возрастает, но не настолько, чтобы пузырек обязательно разрушился. В связи с этим возникает вопрос о том, как деформируется ударная волна в пузырьке в процессе своего схождения. Очевидно, что при большой деформации ударной волны характер суперсжатия среды в пузырьке будет сильно отличаться от того, что реализуется в том случае, когда ударная волна остается близкой к сферической. Насколько известно авторам, до настоящего времени деформации сходящихся ударных волн изучались, и уже довольно давно, но в однородных средах [9]. В частности, рост малых возмущений сферической формы сходящейся ударной волны в газе исследовался, например, в [9, 10]. Вопрос о деформации ударных волн в пузырьке рассматривался лишь в [11], где, однако, отклонения от сферичности имели не физическую, а численную природу (т.е. возникали в результате вычислительных погрешностей).

В настоящей работе изучается деформация радиально сходящейся ударной волны, возникающей внутри сфероидального кавитационного пузырька при его сильном коллапсе в неограниченном объеме жидкости. Данные исследования являются естественным продолжением исследований [1, 7, 8, 12] (и ряда других работ этих авторов), посвященных сильному сжатию среды в пузырьках (в [1, 7] эта проблема изучается в чисто сферическом приближении, в [8, 12] анализируется деформация пузырька). Начальное отклонение формы пузырька от сферической варьируется в широком диапазоне малых значений, при которых форма пузырька в конце сжатия остается сфероидальной или близкой к ней, несмотря на

сильный рост несферичности пузырька в ходе коллапса. Коллапс пузырька рассчитывается с применением двухмерного обобщения модели [1, 7]. В этой модели движение жидкости и пара описывается уравнениями газовой динамики. Учитываются испарение—конденсация, теплопроводность жидкости и пара, используются широкодиапазонные уравнения состояния. Решение находится численно с применением разработанной авторами методики расчета [13].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается деформация радиально сходящейся ударной волны, возникающей внутри осесимметричного кавитационного пузырька при его сильном сжатии в неограниченном объеме жидкости. Поверхность пузырька в ходе сжатия описывается в сферической системе отсчета  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  с началом в центре пузырька:

$$r = R(t) \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n(t) P_n(\cos \theta) \right]. \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время,  $R$  — радиус пузырька,  $\varepsilon_n$  — безразмерная амплитуда (со знаком) отклонения формы пузырька от сферической в виде  $P_n$  (полинома Лежандра степени  $n$ ).

В начале сжатия пузырек сфероидальный, мало отличающийся от сферического, поэтому его форму можно описать выражением  $r = R_0[1 + \varepsilon_{2,0} P_2 \cos \theta]$  (при  $\varepsilon_{2,0} > 0$  сфероид вытянутый, при  $\varepsilon_{2,0} < 0$  — сплюснутый). Среди возможных возмущений в виде  $P_n \cos \theta$  начальное возмущение выбрано в виде  $P_2 \cos \theta$  из-за того, что оно легко реализуется (оно возникает, например, при поступательном движении пузырька, его всплывании, при сжатии около стенки).

В начале сжатия радиус пузырька  $R_0 = 0.5$  мм. Давление жидкости  $p_{\infty} = 15$  бар, температура  $T_{\infty} = 0^{\circ}\text{C}$ . Давление в пузырьке в начале сжатия равно давлению насыщенных паров  $p_s$  ацетона при температуре  $T = T_{\infty}$ . В качестве жидкости принят ацетон, поскольку известно [1, 7], что при принятых условиях в кавитационном пузырьке в ацетоне в финальной высокоскоростной стадии сжатия возникает радиально сходящаяся ударная волна. Целью настоящей работы является изучение деформаций этой волны в процессе ее радиального схождения до начала ее смыкания (т.е. до превращения ограничиваемой ею полости в тор или распада этой полости на отдельные фрагменты). Начальная несферичность пузырька варьируется в диапазоне  $0.001 < |\varepsilon_{2,0}| < 0.01$ .

Для описания происходящих при сжатии физических процессов в пузырьке и окружающей жидкости применяется обобщение одномерной модели [1, 7] на двухмерный осесимметричный случай [13]. Уравнения динамики пара и жидкости при таком обобщении можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0, \\ \rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot (p\mathbf{u} - \kappa \nabla T) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — скорость частицы среды,  $p$  — давление,  $E = e + \mathbf{u}^2/2$  — удельная полная энергия,  $e$  — удельная внутренняя энергия,  $T$  — температура,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Система (2) замыкается широкодиапазонными уравнениями состояния жидкости и пара Нигматулина—Болотновой [14] вида  $p = p(\rho, T)$ ,  $e = e(\rho, T)$  в форме Ми—Грюнайзена.

Граничные условия на поверхности пузырька имеют вид

$$\rho^+ (\mathbf{D} - \mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} = \rho^- (\mathbf{D} - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = j, \quad p^+ = p^-, \quad (3)$$

$$T^+ = T^-, \quad (\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n})^+ - (\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n})^- = jl, \quad (4)$$

где  $\mathbf{D} = D \cdot \mathbf{n}$  — скорость смещения элемента поверхности пузырька,  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль,  $l$  — теплота парообразования,  $j$  — интенсивность фазовых превращений (испарения или конденсации), отнесенная к единице времени и единице поверхности. Верхний знак “плюс” означает отношение к стороне жидкости, “минус” — к стороне газа. Интенсивность фазовых преобразований  $j$  определяется по формуле Герца—Кнудсена—Ленгмюра [1]. Зависимости  $p_s$ ,  $\kappa$ ,  $l$  от  $T$  представляют собой аппроксимации экспериментальных данных.

На большом удалении от пузырька имеем  $p = p_{\infty}$ ,  $T = T_{\infty}$ .

Начальное распределение параметров в паре полагается однородным, а в жидкости определяется с учетом того, что влияние сжимаемости жидкости в начале сжатия несущественно.

Отметим, что в отличие от модели работы [1] в модели настоящей работы не учтены эффекты вязкости пара и жидкости, ионизации и диссоциации пара. Влияние вязкости пара на динамику пузырька по сравнению с вязкостью жидкости незначительно. Вязкость жидкости также мало влияет при сжатии сначала из-за большого радиуса пузырька, а затем из-за большой скорости его сжатия. В [8] показано, что вязкость жидкости не влияет и на рост малой несферичности пузырька в виде низкочастотных сферических гармоник (среди них наиболее низкочастотными являются рассматриваемые сфероидальные). Влиянием вязкости пара на ударную волну пренебрегаем из-за отсутствия экспериментальных данных. Эффекты ионизации и диссоциации не учитываются в силу малости их влияния на деформацию сходящихся ударных волн в рассматриваемой области их схождения.

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА

Методика расчета основана на не увеличивающей полную вариацию (TVD — Total Variation Di-

minishing) модификации схемы С.К. Годунова второго порядка точности по пространству и времени [13]. При этом уравнения газовой динамики записываются в подвижной системе координат, связанной с поверхностью пузырька. Эффективность расчетов достигается посредством учета особенностей рассматриваемых задач. В частности, процесс сжатия разбивается на три фазы, в каждой из которых применяется свой способ математического описания.

**Фаза 1.** Эту фазу составляет продолжительная начальная низкоскоростная стадия сжатия, где отклонения формы пузырька от сферической относительно невелики, пузырек можно считать гомобарическим, а жидкость — несжимаемой. На этой стадии двумерное движение жидкости и пара фактически представляет собой суперпозицию основной сферической составляющей и ее малого возмущения в виде второй сферической гармоники. С учетом этого сферическая составляющая описывается одномерным вариантом системы уравнений в частных производных (2)–(4), а несферическая составляющая — обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно возмущения сферической формы пузырька  $\varepsilon_2$  в виде  $P_2(\cos\theta)$ . При таком подходе компьютерное время сокращается примерно так же, как при переходе от двумерной постановки задачи к одномерной.

**Фаза 2.** В финальной высокоскоростной стадии сжатия отклонения формы пузырька от сферической сильно возрастают, распределение параметров внутри пузырька становится сильно неоднородным, могут возникать ударные волны, сжимаемость жидкости увеличивается. В результате раздельное описание сферической и несферической составляющих движения жидкости и пара становится неправомерным. Поэтому для описания последующего сжатия пузырька применяются двумерные уравнения газовой динамики (2)–(4). При этом учитывается, что в рассматриваемых задачах относительно небольшое отклонение формы ударной волны от сферической в момент ее зарождения в последующем в ходе ее радиального схождения сильно возрастает. С учетом этого высокоскоростная стадия сжатия пузырька разделена на две части. В первой, более продолжительной части высокоскоростной стадии сжатия пузырька до тех пор, пока несферичность сходящейся ударной волны не превысит некоторое пороговое значение, в качестве неподвижной системы отсчета (системы отсчета наблюдателя) принимаются сферические координаты. Эта часть высокоскоростной стадии сжатия пузырька и составляет вторую фазу сжатия. В этой фазе используются криволинейные расчетные сетки, одно семейство сеточных линий которых определяется формой пузырька, а второе представляет собой лучи, выходящие из расположенного в центре пузырька начала координат

(криволинейные радиально-расходящиеся сетки). В случае малой несферичности пузырька и ударной волны такие сетки являются весьма близкими к оптимальным.

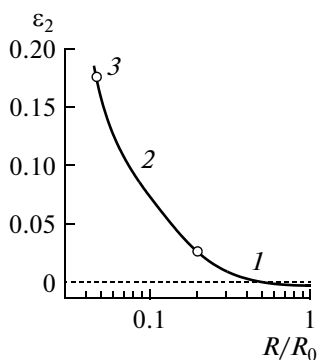
**Фаза 3.** Эту фазу составляет вторая, короткая по времени, заключительная часть финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырька, где ударная волна является сильно несферической. Здесь в качестве неподвижной системы отсчета (системы отсчета наблюдателя) используются не сферические, а цилиндрические координаты. Кроме того, в центральной области пузырька вместо криволинейной радиально расходящейся сетки применяется прямолинейная косоугольная сетка, близкая к декартовой. Пересчет параметров ячеек при переходе с сетки на сетку проводится с применением консервативной интерполяции первого порядка точности [15]. Однако это несильно влияет на точность вычислений, поскольку пересчет проводится лишь один раз.

Результаты тестирования работоспособности и эффективности данной методики и ее отдельных фаз можно найти в работах [13, 16–18].

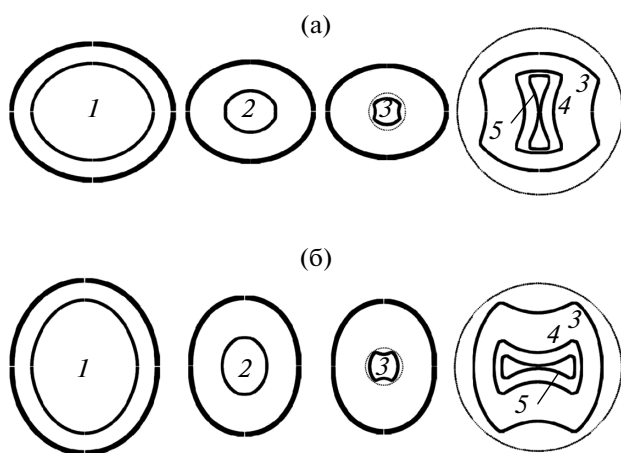
Обсуждаемые ниже особенности рассматриваемых задач соответствуют численным решениям, рассчитанным на сетках с достаточно мелкими ячейками (около  $0.1 \text{ мкм} \times 0.1 \text{ мкм}$  в центральной области пузырька в момент начала смыкания полости перед фронтом ударной волны), так что при дальнейшем уменьшении ячеек эти особенности не изменяются.

## ДЕФОРМАЦИЯ ПУЗЫРЬКА И СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

В результате большого различия начальных давлений в жидкости ( $p_\infty = 15 \text{ бар}$ ) и паре ( $p_S = 0.089 \text{ бар}$ ) пузырек быстро и сильно сжимается. В ходе сжатия за примерно 12 мкс радиус пузырька  $R$  уменьшается примерно в 22 раза (от 500 до 23 мкм). Максимальная скорость уменьшения радиуса достигает около 1 км/с. В финальной высокоскоростной стадии сжатия в полости пузырька в тот момент, когда его радиус  $R \approx 41 \text{ мкм}$ , на удалении примерно 6 мкм от межфазной поверхности возникает радиально сходящаяся ударная волна. В силу малых размеров пузырька ударная волна вскоре после своего образования (примерно через 0.025 мкс) фокусируется в центральной области пузырька. В рассматриваемом диапазоне начальной несферичности пузырька  $0.001 < |\varepsilon_{2,0}| < 0.01$  его форма в ходе всего сжатия остается довольно близкой к сфероидальной. Изменение амплитуды  $|\varepsilon_2|$ , определяющей вклад в несферичность пузырька составляющей, которая в уравнении (1) описывается слагаемым  $\varepsilon_2 P_2(\cos\theta)$ , не зависит от знака начального отклонения от сферической формы. Согласно рис. 1, изначально сплюснутый пузырек ( $\varepsilon_2 < 0$ ) превращается в ходе сжатия сначала в сферический (ему соответствует  $\varepsilon_2 = 0$ ), а затем становится вытянутым ( $\varepsilon_2 > 0$ ).



**Рис. 1.** Изменение безразмерной амплитуды составляющей несферичности пузырька в виде  $P_2(\cos\theta)$  при сжатии:  $\varepsilon_{2,0} = -0.0033$ ; точками отмечены границы между фазами сжатия 1 и 2 и 2 и 3 с разными способами расчета; продолжительность фазы 1 – 11.5 мкс, 2 – 0.15 мкс, 3 – 1 нс.



**Рис. 2.** Деформация поверхности пузырька в три момента времени 1–3 (внешние жирные линии) и радиально сходящейся ударной волны в его полости в пять моментов времени 1–5 (внутренние жирные линии) в процессе сжатия этой волны:  $\varepsilon_{2,0} = +0.0033$  (а),  $-0.0033$  (б); тонкие линии – центральная область пузырька диаметром 14.8 мкм.

Аналогично изначально вытянутый пузырек становится сферическим, а затем сплюснутым. При этом амплитуда  $|\varepsilon_2|$  возрастает в ходе сжатия примерно в 55 раз. Это примерно в два раза меньше, чем получено в [8], что обусловлено используемыми в [8] упрощающими допущениями (о слабой сжимаемости жидкости, малой неоднородности давления и плотности пара в пузырьке), которые в финальной высокоскоростной стадии сжатия нарушаются.

На рис. 2 иллюстрируется деформация поверхности пузырька и ударной волны в нем в процессе сжатия этой волны в интервале между моментами 1 и 5. Момент 1 характеризуется тем, что он близок к моменту возникновения ударной волны, а момент 5 соответствует началу смыкания ее фронта, т.е. моменту, когда ограничиваемая

фронтом волны полость превращается в тор или распадается на отдельные фрагменты. Продолжительность процесса сжатия составляет около 0.025 мкс. Представлены случаи, в которых начальная несферичность пузырька  $\varepsilon_{2,0} = \pm 0.0033$ . Ударная волна возникает около поверхности пузырька, поэтому в момент 1 ее форма близка к форме пузырька. В ходе радиального сжатия несферичность ударной волны быстро и сильно возрастает (моменты 2–5). При этом сначала наиболее выпуклые (т.е. имеющие большую кривизну) в момент 1 части контура поверхности ударной волны в ее осевом сечении превращаются в прямолинейные (2), а затем трансформируются в вогнутые (3). Образование вогнутых участков (им на поверхности ударной волны соответствуют вмятины) приводит к появлению заострений (3). В дальнейшем в контуре ударной волны в ее осевом сечении на месте заострений образуются небольшие прямолинейные участки (4, 5). Возникновение подобных прямолинейных частей в контуре сходящейся слабонесферической ударной волны в ее осевом сечении в случае сжатия ударной волны в однородном газе было показано в [19]. Возможность формирования заострений была отмечена в [9].

В случае изначально вытянутого пузырька (рис. 2а,  $\varepsilon_{2,0} = +0.0033$ ) вмятина в поверхности ударной волны возникает в окрестности множества точек этой волны, образующих на плоскости ее симметрии  $\theta = \pi/2$  окружность. В случае изначально сплюснутого пузырька (рис. 2б,  $\varepsilon_{2,0} = -0.0033$ ) вмятина образуется в окрестности лишь двух точек волны, находящихся на оси ее симметрии. В обоих случаях смыкание ударной волны (5) начинается со столкновения точек ее поверхности в центре пузырька (в точке  $r = 0$ ). При этом при  $\varepsilon_{2,0} = +0.0033$  в центре пузырька сталкиваются сразу все точки поверхности ударной волны, расположенные в плоскости ее симметрии на окружности, а при  $\varepsilon_{2,0} = -0.0033$  – лишь две ее точки, находящиеся на оси симметрии. В момент столкновения в изначально вытянутом пузырьке ограниченная фронтом ударной волны полость становится гантелеподобной, а в изначально сплюснутом пузырьке – дискообразной. Следует отметить, что подобная полость в случае чисто сферического пузырька в момент аналогичного столкновения полностью исчезает.

Естественно, что такое существенное различие процессов фокусировки ударной волны в случаях изначально сферического, вытянутого и сплюснутого пузырьков не может не отразиться как на положении и конфигурации зон с экстремально высокими значениями давления, плотности и температуры в центральной области пузырька, так и на величине этих экстремально высоких значений. Фокусировка ударной волны в изначально сферическом пузырьке чисто сферическая. В изначально вытянутом пузырьке в рассмотренном диа-

пазоне малой несферичности она реализуется как близкая к цилиндрической, а в изначально сплюснутом — как близкая к столкновению плоских волн. Поэтому можно ожидать, что достигаемые степени сжатия среды в окрестности центра пузырька будут в первом случае больше, чем во втором, а во втором — больше, чем в третьем.

Многочисленные вычислительные эксперименты показали, что сценарии деформаций сходящихся ударных волн в пузырьке, подобные тем, что представлены на рис. 2, когда смыкание ударных волн начинается в центре пузырька, реализуются и в изначально вытянутых сфероидальных пузырьках при  $0.001 \leq \varepsilon_{2,0} \leq 0.007$ , и в изначально сплюснутых — при  $-0.008 \leq \varepsilon_{2,0} \leq -0.002$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что возникающие в сфероидальном пузырьке при его сильном сжатии ударные волны претерпевают в ходе своего радиального схождения большие деформации. В частности, изначально наиболее выпуклые части контура поверхности ударной волны в ее осевом сечении могут сначала превращаться в прямолинейные, а затем трансформироваться в вогнутые. Вместе с образованием в контуре вогнутых участков (т.е. вмятин на поверхности ударной волны) в нем возникают и заострения. В дальнейшем на месте заострений могут образовываться небольшие прямолинейные участки. В случаях изначально вытянутого пузырька при  $0.001 \leq \varepsilon_{2,0} \leq 0.007$  и изначально сплюснутого пузырька при  $-0.008 \leq \varepsilon_{2,0} \leq -0.002$  смыкание ударной волны начинается, как и при смыкании сферической ударной волны в идеально сферическом пузырьке, в самом центре пузырька. При этом если в чисто сферическом пузырьке ограниченная фронтом ударной волны полость в момент смыкания превращается в точку (исчезает), то в изначально вытянутом пузырьке она становится гантелеподобной, а в изначально сплюснутом пузырьке — дискообразной. Это означает, что фокусировка ударной волны в изначально вытянутом пузырьке в рассмотренном диапазоне его малой начальной несферичности реализуется как близкая к цилиндрической, а в изначально сплюснутом пузырьке — как близкая к столкновению плоских волн. В силу этого достигаемые степени сжатия среды в окрестности центра пузырька в этих двух случаях могут сильно различаться, а также они могут сильно отличаться и от того, что может быть достигнуто в чисто сферическом случае.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T., Tale-yarkhan R.P. The Theory of Supercompression of Vapor Bubbles and Nano-Scale Thermonuclear Fusion // Phys. Fluids. 2005. V. 17. 107105.
2. Bass A., Ruuth S.J., Camara C., Merriman B., Putterman S. Molecular Dynamics of Extreme Mass Segregation in a Rapidly Collapsing Bubble // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 234301.
3. Бирюков Д.А., Власова М.И., Герасимов Д.Н., Синкевич О.А. Электрическое поле внутри воздушного пузырька при гидродинамической люминесценции // ТВТ. 2013. Т. 51. № 4. С. 629.
4. Lauterborn W., Kurz T. Physics of Bubble Oscillations // Rep. Prog. Phys. 2010. V. 73. 106501.
5. Flannigan D.J., Suslick K.S. Inertially Confined Plasma in an Imploding Bubble // Nature Physics. 2010. V. 6. P. 598.
6. Галимов Э.М., Кудин А.М., Скоробогатский В.Н., Плотниченко В.Г., Бондарев О.Л., Зарубин Б.Г., Страздовский В.В., Аронин А.С. и др. Экспериментальное подтверждение синтеза алмаза в процессе кавитации // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 2. С. 187.
7. Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Ильгамов М.А. Образование сходящихся ударных волн в пузырьке при его сжатии // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 3. С. 282.
8. Нигматулин Р.И., Ильгамов М.А., Аганин А.А., Топорков Д.Ю. Эволюция возмущений сферичности парового пузырька при его сверхсжатии // ПМТФ. 2014. № 3. С. 82.
9. Gardner J.H., Book D.L. Stability of Imploding Shocks in the CCW Approximation // J. Fluid Mech. 1982. V. 114. P. 41.
10. Hosseini S.H.R., Takayama K. Implosion of a Spherical Shock Wave Reflected from a Spherical Wall // J. Fluid Mech. 2005. V. 530. P. 223.
11. Nagrath S., Jansen K., Lahey R.T.Jr., Akhatov I. Hydrodynamic Simulation of Air Bubble Implosion Using a Level Set Approach // J. Comp. Phys. 2006. V. 215. P. 98.
12. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Нигматулин Р.И., Топорков Д.Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 57.
13. Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Численное моделирование радиально сходящихся ударных волн в полости пузырька // Матем. моделирование. 2014. Т. 26. № 24. С. 3.
14. Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния органических жидкостей на примере ацетона // Докл. РАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 617.
15. Аганин А.А., Кузнецов В.Б. Метод консервативной интерполяции интегральных параметров ячеек произвольных сеток // Динамика оболочек в потоке. Тр. семинара. Казань: КФТИ КФАН СССР, 1985. № 18. С. 144.
16. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Халитова Т.Ф. Моделирование сильного сжатия газовой полости в жидкости // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 11. С. 89.
17. Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Метод численного решения задач сильного сжатия несферического кавитационного пузырька // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. С. 14.
18. Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Эволюция малых искажений парового пузырька при его сверхсжатии // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 10. С. 82.
19. Somogyi Z., Roberts P.H. Stability of an Imploding Spherical Shock Wave in a van der Waals Gas II // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2007. V. 60. P. 289.