Е. А. Барабанов, Сингулярные показатели и критерии правильности линейных дифференциальных систем,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 147–157

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 147–157

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

СИНГУЛЯРНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ И КРИТЕРИИ ПРАВИЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2005 г. Е. А. Барабанов

1. В теории устойчивости движения и теории показателей Ляпунова существенную роль играют открытые и изученные А.М. Ляпуновым правильные системы линейных дифференциальных уравнений [1, с. 38]. Их значение определяется следующим фундаментальным фактом: если у нелинейной системы (при обычных предположениях на правую часть) система ее линейного приближения правильная и обладает свойством условной экспоненциальной устойчивости, то этим же свойством (с теми же размерностью устойчивого многообразия и показателем его асимптотики) обладает и нулевое решение нелинейной системы [1, с. 53–55]. Если же система первого приближения не является правильной, то учет меры ее неправильности (задаваемой так называемыми коэффициентами неправильности) позволяет строить признаки устойчивости или неустойчивости нулевого решения нелинейной системы [1, с. 51–52; 2, § 13].

Для систем с треугольной матрицей коэффициентов критерий их правильности дал А.М. Ляпунов [1, с. 39]. Для общих линейных систем различные критерии правильности получены О.Перроном [3], В.П. Басовым [4] и Р.Э. Виноградом [5]. Из этих критериев только критерий Ляпунова является эффективным (выраженным в терминах коэффициентов самой системы): для правильности треугольной системы необходимо и достаточно существования точных интегральных средних у ее диагональных коэффициентов. Критерий Перрона – симметричность относительно нуля показателей Ляпунова (с учетом их кратности) системы показателям Ляпунова сопряженной ей системы, критерий Басова – приводимость системы обобщенным преобразованием Ляпунова к диагональной системе с постоянными коэффициентами, критерий Винограда – наличие точных показателей у решений какого-либо нормального базиса системы и точных нулевых показателей у углов между любым решением этого базиса и линеалом, натянутым на предшествующие ему решения базиса. В настоящей работе получен критерий правильности системы, формулирующийся на языке ее сингулярных показателей.

2. Приведем необходимые определения. Будем рассматривать систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на полуоси $t \geq 0$ матрицей коэффициентов $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Пусть $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ – ее показатели Ляпунова [1, с. 27, 34; 6, с. 61–62]. Система (1) называется правильной [1, с. 38], если для нее выполнены два условия:

1) существует предел $S = \lim\limits_{t \to +\infty} t^{-1} \int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau$;

2) $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = S$.

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, – фундаментальная матрица системы (1) (для определенности нормированная в нуле), а $\sigma_1(t) \geq \ldots \geq \sigma_n(t)$ – ее сингулярные числа [7, с. 236] (т.е. положительные квадратные корни из собственных значений ее мультипликативной симметризации $X^S(t) \overset{\text{def}}{=} X^{\mathrm{T}}(t)X(t)$). Числа

$$\underline{\sigma}_k(A) = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_{n-k+1}(t), \quad \overline{\sigma}_k(A) = \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_{n-k+1}(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

назовем соответственно k-м нижним и k-м верхним сингулярными показателями системы (1), а совокупности $\underline{\sigma}_1(A) \leq \ldots \leq \underline{\sigma}_n(A)$ и $\overline{\sigma}_1(A) \leq \ldots \leq \overline{\sigma}_n(A)$ – соответственно ее нижним и верхним сингулярным спектром*). Так как матрица коэффициентов системы (1) равномерно ограничена на полуоси, то все сингулярные числа конечны и принадлежат отрезку $[-a, a]$, где $a = \sup\limits_{t\geq 0} \|A(t)\|$, а $\|\cdot\|$ – операторная норма матрицы, порожденная естественным скалярным умножением. Геометрически числа $\underline{\sigma}_k(A)$ и $\overline{\sigma}_k(A)$ – это соответственно точные нижняя и верхняя границы изменения при $t \to +\infty$ показателей роста $(n-k+1)$-х главных полуосей эллипсоидов, являющихся образами единичной сферы при линейных отображениях $X(t)$, $t \geq 0$.

С общей точки зрения отличие сингулярных (верхних и нижних) показателей от соответственно показателей Ляпунова и Перрона состоит в том, что первые являются асимптотическими характеристиками семейства линейных отображений, определяемого решениями системы (1), в то время как вторые – это асимптотические характеристики ее индивидуальных решений. Сравнение показателей Ляпунова и верхних сингулярных показателей показывает, что их вычисления отличаются только порядком выполнения предельных переходов. Действительно, из теоремы Ляпунова [1, с. 34; 6, с. 62] и обобщенной теоремы Куранта–Фишера [8, с. 499, 217]**) вытекают соответственно равенства

$$\lambda_k(A) = \min_{L\in\mathcal{G}_k} \max_{\substack{\xi\in L\\ \|\xi\|=1}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \|X(t)\xi\|, \quad \overline{\sigma}_k(A) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \min_{L\in\mathcal{G}_k} \max_{\substack{\xi\in L\\ \|\xi\|=1}} \frac{1}{t} \ln \|X(t)\xi\|;$$

здесь и всюду ниже $\mathcal{G}_k$ – совокупность k-мерных линеалов в $\mathbb{R}^n$. Показатели Ляпунова и верхние сингулярные показатели системы (1) связаны соотношениями: $\lambda_n(A) = \overline{\sigma}_n(A)$ [6, с. 93, 100] и $\lambda_i(A) \geq \overline{\sigma}_i(A)$ при $i = 1, \ldots, n-1$ [9]. Можно привести примеры [9] систем (1), для которых $\lambda_i(A) > \overline{\sigma}_i(A)$, если $i \neq n$. Отметим, что, как легко показать, нижние и верхние сингулярные показатели (2) не изменятся, если в качестве $X(t)$, $t \geq 0$, взять любую другую фундаментальную матрицу системы (1) или считать в (2), что $t \in \mathbb{N}$, или подвергнуть систему (1) преобразованию Ляпунова.

Скажем, что все сингулярные показатели системы (1) точны, если и только если при каждом $k = 1, \ldots, n$ существует предел $\sigma_k(A) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \sigma_{n-k+1}(t)$ (или равносильно при каждом $k = 1, \ldots, n$ показатели $\underline{\sigma}_k(A)$ и $\overline{\sigma}_k(A)$ совпадают, и их общее значение обозначается через $\sigma_k(A)$)***). Основной результат работы (теорема 1) состоит в доказательстве того, что точность всех сингулярных показателей системы – необходимое и достаточное условие ее правильности; сама же теорема может служить одной из мотивировок введения сингулярных показателей.

3. В этом пункте изложим в удобном для нас виде вспомогательные результаты, нужные для доказательства теоремы 1.

Считаем заданным в $\mathbb{R}^n$ естественное скалярное умножение. Через $\mathrm{Lin}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ обозначаем линейную оболочку векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$, через $\mathrm{pr}_L \xi$ – ортогональную проекцию вектора ξ на линеал L, через $\oplus$ – прямую сумму линеалов и через $M^\perp$ – ортогональное дополнение линеала $M \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

3.1. Для ненулевых линеалов M и N в $\mathbb{R}^n$ обозначим $\prec(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{0\neq\xi\in M} \min\limits_{0\neq\eta\in N} \angle(\xi, \eta)$.

Величину $\angle(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\prec(M, N), \prec(N, M)\}$ назовем линейным углом между этими линеалами. Вообще говоря, $\prec(M, N) \neq \prec(N, M)$, что легко подтвердить соответствующими примерами, однако на линеалах одинаковой размерности функция $\prec(\cdot, \cdot)$ симметрична, что, в частности, устанавливает

*) Подчеркнем, что показатели Ляпунова и сингулярные (нижние и верхние) показатели нумеруются в порядке неубывания, а сингулярные числа – в порядке невозрастания.

**) Обобщенную теорему Куранта–Фишера здесь и в дальнейшем удобно формулировать в следующем виде: $\sigma_{n-k+1}(t) = \min\limits_{L\in\mathcal{G}_k} \|X(t)|_L\|$, $k = 1, \ldots, n$, где $\mathcal{G}_k$ – совокупность k-мерных линеалов в $\mathbb{R}^n$, а $X(t)|_L$ – сужение оператора $X(t)$ на линеал L.

***) В случае точности сингулярных показателей одним и тем же символом σ обозначаются как сами показатели, так и сингулярные числа. Это не приводит к недоразумениям, поскольку символ в аргументе (матрица или число) показывает, о чем идет речь.

Лемма 1. *Если* $\dim M = \dim N$, *то* $\prec(M,N) = \prec(N,M)$ *и* $\angle(M,N) = \angle(M^\perp, N^\perp)$.

Доказательство. Могут представиться только две возможности: либо а) линеал M содержит вектор $\xi_0 \neq 0$, ортогональный линеалу N, либо б) каждый ненулевой вектор из M не ортогонален линеалу N.

В случае а) легко видеть, что тогда и линеал N содержит вектор $\eta_0 \neq 0$, ортогональный линеалу M. Действительно, линеалы $M^\perp$ и N лежат в линеале $(\mathrm{Lin}\,\xi_0)^\perp$, размерность которого $n-1$. Но поскольку $\dim M^\perp + \dim N = \dim N^\perp + \dim N = n$, то $M^\perp \bigcap N \neq \{0\}$. Значит, существует ненулевой вектор $\eta_0 \in N$, который принадлежит линеалу $M^\perp$, т.е. $\eta_0 \perp M$. Поэтому в случае а) получаем: $\prec(M,N) = \prec(N,M) = \pi/2$.

В случае б) покажем сначала, что любой вектор $\eta \in N$ является ортогональной проекцией на N некоторого вектора $\xi_\eta \in M$. В самом деле, так как $\dim N^\perp + \dim M = n$ и в случае б) верно равенство $N^\perp \bigcap M = \{0\}$, то $N^\perp \oplus M = \mathbb{R}^n$. Значит, найдутся такие векторы $\eta_1 \in N^\perp$ и $\xi_\eta \in M$, что $\eta = \eta_1 + \xi_\eta$ или $\xi_\eta = \eta - \eta_1$, что и утверждалось. Иными словами, $N = \{\mathrm{pr}_N \xi : \xi \in M\}$. Отсюда, поскольку $\min\limits_{0\neq\eta\in N} \angle(\xi,\eta) = \angle(\xi, \mathrm{pr}_N\xi)$, получаем

$$\prec(M,N) = \max_{0\neq\xi\in M} \angle(\xi, \mathrm{pr}_N\xi) \geq \max_{0\neq\xi\in M} \min_{0\neq\mu\in M} \angle(\mu, \mathrm{pr}_N\xi) =$$

$$= \max_{0\neq\eta\in N} \min_{0\neq\mu\in M} \angle(\mu,\eta) = \prec(N,M). \qquad (3)$$

Поменяв в рассуждениях случая б) линеалы M и N местами, получим $\prec(N,M) \geq \prec(M,N)$. Следовательно, $\prec(M,N) = \prec(N,M)$ для линеалов одинаковых размерностей.

Обозначим $\alpha = \angle(M,N)$. Из неравенства в (3) вытекает, что найдутся векторы $\xi_0 \in M$ и $\eta_0 \in N$ такие, что $\angle(\xi_0, \eta_0) = \alpha$ и $\mathrm{pr}_N \xi_0 \in \mathrm{Lin}\,\eta_0$, $\mathrm{pr}_M \eta_0 \in \mathrm{Lin}\,\xi_0$. В самом деле, верно неравенство $\angle(\xi, \mathrm{pr}_N\xi) \geq \angle(\mathrm{pr}_M \mathrm{pr}_N \xi, \mathrm{pr}_N\xi)$ для любого ненулевого вектора $\xi \in M$. Поэтому если бы для каждого $\xi \in M$, такого, что $\angle(\xi, \mathrm{pr}_N\xi) = \alpha$ (множество таких векторов непусто вследствие симметричности функции $\prec(\cdot,\cdot)$), предыдущее неравенство было строгим, то в силу неравенства в (3) имели бы $\prec(M,N) > \prec(N,M)$, что неверно. Значит, найдется вектор $\xi_0 \in M$, для которого $\alpha = \angle(\xi_0, \mathrm{pr}_N\xi_0) = \angle(\mathrm{pr}_M\mathrm{pr}_N\xi_0, \mathrm{pr}_N\xi_0)$. Из последнего равенства в силу того, что угол между вектором и его ортогональной проекцией на линеал – наименьший из углов между этим вектором и векторами линеала, вытекает, что вектор $\mathrm{pr}_M\mathrm{pr}_N\xi_0 \in \mathrm{Lin}\,\xi_0$, т.е. векторы ξ_0 и $\eta_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_N\xi_0$ искомые.

Выберем в линеалах M и N указанные выше векторы $\xi_0 \in M$ и $\eta_0 \in N$. Считая их без нарушения общности единичными, получим $\xi_0 = \cos\alpha\cdot\eta_0 + \sin\alpha\cdot\eta_1$ и $\eta_0 = \cos\alpha\cdot\xi_0 + \sin\alpha\cdot\xi_1$, где $\eta_1 \in N^\perp$, $\xi_1 \in M^\perp$. Эта система равносильна системе: $-\xi_1 = \cos\alpha\cdot\eta_1 + \sin\alpha\cdot(-\eta_0)$ и $\eta_1 = \cos\alpha\cdot(-\xi_1) + \sin\alpha\cdot\xi_0$, т.е. $\mathrm{pr}_{N^\perp}\xi_1 \in \mathrm{Lin}\,\eta_1$, $\mathrm{pr}_{M^\perp}\eta_1 \in \mathrm{Lin}\,\xi_1$ и $\angle(-\xi_1, \eta_1) = \alpha$. Любое из двух последних равенств дает неравенство $\alpha = \angle(M,N) \leq \angle(M^\perp, N^\perp)$. Поменяв в этих рассуждениях пары линеалов M, N и $M^\perp, N^\perp$ местами, получим обратное неравенство, а с ним и нужное равенство $\angle(M,N) = \angle(M^\perp, N^\perp)$. Лемма 1 доказана.

Отметим, хотя в дальнейшем нам это не понадобится, что равенство $\angle(M,N) = \angle(M^\perp, N^\perp)$ верно и для линеалов несовпадающих размерностей, поскольку линейный угол между ними равен $\pi/2$ (действительно, если $0 < \dim M < \dim N$, то $M^\perp \bigcap N \neq \{0\}$, а значит, существует ненулевой вектор $\eta \in N$, ортогональный линеалу M).

3.2. Линейный угол между линеалами дает точную оценку сверху углов между векторами одного (любого) из них и их ортогональными проекциями на другой линеал. Кроме этой точки зрения для нас в дальнейшем будет важна и другая: та, что функция линейного угла (точнее, ее синус) превращает совокупность $\mathcal{G}$ линеалов в $\mathbb{R}^n$ в компактное метрическое пространство.

Проще всего это обосновать, если предварительно вложить совокупность $\mathcal{G}$ в метрическое пространство $\mathcal{K}(B_n)$ всех компактов замкнутого единичного шара $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Метрика h в $\mathcal{K}(B_n)$ – так называемое отклонение Хаусдорфа [10, с. 166] – задается равенством $h(F,G) = \inf\{\rho : F \subset O(G,\rho) \text{ и } G \subset O(F,\rho)\}$, $F, G \in \mathcal{K}(B_n)$, где $O(H,\rho)$ – замкнутая ρ-окрестность в $\mathbb{R}^n$ множества H, т.е. в рассматриваемой ситуации $O(H,\rho) = \bigcup_{x\in H}\{y \in B_n : \|x-y\| \leq \rho\}$. Отождествим каждый линеал L в $\mathbb{R}^n$ с компактом $\varkappa(L) \overset{\mathrm{def}}{=} L \bigcap B_n \in \mathcal{K}(B_n)$, т.е.

$\varkappa(L)$ – $\dim L$-мерный шар с центром в нуле и радиуса 1. Ясно, что отображение $\varkappa : \mathcal{G} \to \mathcal{K}(B_n)$ инъективно. Так как расстояние от вектора до линеала равно длине ортогональной проекции вектора на ортогональное дополнение этого линеала, то из этого и определения линейного угла следует, что для ненулевых линеалов M и N имеет место равенство

$$h(\varkappa(M), \varkappa(N)) = \sin\angle(M, N). \tag{4}$$

Если дополнительно считать по определению $\angle(\mathbf{0}, M)$ равным $\pi/2$ при $M \neq \mathbf{0}$ и нулю, если $M = \mathbf{0}$, то формула (4) будет верна для линеалов любой размерности. Поскольку шар B_n компактен, то по теореме Хаусдорфа [10, с. 168] компактным является и метрическое пространство $(\mathcal{K}(B_n), h)$. Скажем, что последовательность $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ линеалов в $\mathbb{R}^n$ сходится (фундаментальна), если последовательность $\{\varkappa(L_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится (фундаментальна) в пространстве $(\mathcal{K}(B_n), h)$. Будем говорить также, что последовательность $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ линеалов сходится к линеалу L, если в пространстве $(\mathcal{K}(B_n), h)$ последовательность $\{\varkappa(L_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к $\varkappa(L)$.

Лемма 2. *Если последовательность $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ линеалов одинаковой размерности фундаментальна, то она сходится к линеалу L той же размерности.*

Доказательство. Так как в силу теоремы Хаусдорфа [10, с. 168] пространство $(\mathcal{K}(B_n), h)$ компактно и по условию последовательность $\{\varkappa(L_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальна, то она сходится. Остается поэтому доказать, что для $K = \lim\limits_{k\to+\infty} \varkappa(L_k)$ выполнено соотношение $K = \varkappa(L)$, где L – линеал, имеющий ту же размерность, что и размерности линеалов L_k, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\dim L_k = l$ и $h(K, \varkappa(L_k)) = \rho_k$, $k \in \mathbb{N}$. Так как $\varkappa(L_k) \underset{k\to+\infty}{\to} K$ в метрике h, то $\rho_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Докажем сначала, что максимальное число линейно независимых векторов, принадлежащих компакту K, равно l. Допустим, что это не так: их число отлично от l и равно v, а сами векторы – это $\xi_1, \ldots, \xi_v$. Пусть $v > l$. Так как векторы ξ_i, $i = 1, \ldots, v$, линейно независимы, то найдется такое $\delta > 0$, что линейно независимыми будут и векторы $\xi_i + h_i$, $i = 1, \ldots, v$, при любых векторах h_i, удовлетворяющих неравенству $\|h_i\| < \delta$, $i = 1, \ldots, v$. Но поскольку $O(\varkappa(L_k), \rho_k)$ содержит K, то, значит, для каждого $i = 1, \ldots, v$ найдется вектор $\eta_i \in \varkappa(L_k)$ такой, что $\eta_i + h_i = \xi_i$, где $\|h_i\| \le \rho_k$, что невозможно, если $\rho_k < \delta$, так как тогда линеал L_k размерности l содержал бы $v > l$ линейно независимых векторов $\eta_i = \xi_i - h_i$, $i = 1, \ldots, v$.

Если $v < l$, то пусть M – линейная оболочка векторов компакта K. Тогда $M^\perp \bigcap L_k \neq \{0\}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому для каждого k существует единичный вектор $\eta_k \in L_k$, ортогональный линеалу M, а значит, ортогональный каждому вектору из K. Поэтому $h(\varkappa(L_k), K) = 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Противоречие.

Следовательно, $v = l$ и компакт K лежит в некотором замкнутом l-мерном шаре $B(K)$ с центром в 0 и радиуса 1. Остается показать, что $K = B(K)$. Допустим, что это не так. Тогда вследствие компактности K и $B(K)$ величина $\rho \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{\xi\in B(K)} \min\limits_{\eta\in K} \|\xi - \eta\|$ положительна. Поскольку $O(K, \rho_k)$ содержит L_k, то тем более его содержит $O(B(K), \rho_k)$. Значит, если L – тот линеал, для которого $\varkappa(L) = B(K)$, то $\prec (L_k, L) \le \arcsin \rho_k$, т.е. в силу леммы 1 верно неравенство $\angle(L_k, L) \le \arcsin \rho_k$. Пусть $\xi_0 \in B(K)$ – вектор, на котором реализуется величина ρ, а $\eta_k \in \varkappa(L_k)$ – вектор, ортогональная проекция которого на L совпадает с ξ_0 (так как $\angle(L_k, L) < \pi/2$, то такой вектор η_k найдется, что показано в доказательстве леммы 1). Докажем, что вектор η_k не принадлежит $O(K, \rho_k)$, если $\rho_k < \rho/2$. В самом деле, если бы нашелся вектор $\xi_k \in K$ такой, что для некоторого вектора h_k, $\|h_k\| \le \rho_k$, верно равенство $\xi_k + h_k = \eta_k$, то, поскольку $\|\xi_0 - \eta_k\| \le \rho_k$, имели бы $\|\xi_0 - \xi_k\| \le \|\xi_0 - \eta_k\| + \|\eta_k - \xi_k\| \le 2\rho_k$, что невозможно, если $\rho_k < \rho/2$. Поэтому $K = B(K) = \varkappa(L)$. Лемма 2 доказана.

Поскольку линейный угол между линеалами разных размерностей равен $\pi/2$, то лемма 2 означает, что метрическое пространство $(\mathcal{G}, \sin\angle(\cdot,\cdot))$ распадается в дизъюнктную сумму компактов $\mathcal{G}_k$, состоящих из линеалов одинаковой размерности, $k = 0, 1, \ldots, n$. В дальнейшем для линеалов M и N вместо $h(\varkappa(M), \varkappa(N))$ будем писать $h(M, N)$.

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ линеалов сходится к линеалу L и пусть $L_k = N_k \oplus M_k$, где M_k – ортогональное дополнение линеала N_k в линеале L_k. Если последовательность $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к линеалу N, то $N \subset L$ и последовательность $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к линеалу M, являющемуся ортогональным дополнением линеала N в линеале L.*

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $\dim L_k = \dim L$ и $\dim N_k = \dim N$, как это соответственно следует из сходимостей $L_k \to L$ и $N_k \to N$. Так как $\angle(L_k, L) \to 0$ при $k \to +\infty$, то, не нарушая общности, считаем, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет случай б) из доказательства леммы 1, и поэтому $L = \{\mathrm{pr}_L \xi : \xi \in L_k\}$ при каждом $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим ортогональные проекции на линеал L линеалов N_k и M_k, т.е. линеалы $P_k^1 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathrm{pr}_L \eta : \eta \in N_k\}$ и $P_k^2 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathrm{pr}_L \xi : \xi \in M_k\}$. Верно равенство $L = P_k^1 \oplus P_k^2$, поскольку в противном случае равенство $L = \{\mathrm{pr}_L \xi : \xi \in L_k\}$ не имело бы места. Значит, $\dim P_k^1$ и $\dim P_k^2$ не зависят от k. В силу неравенства треугольника $h(N, P_k^1) \leq h(N, N_k) + h(N_k, P_k^1)$. В правой части этого неравенства оба слагаемых стремятся при $k \to +\infty$ к нулю: первое – в силу сходимости $N_k \to N$, а второе – вследствие неравенства $\angle(N_k, P_k^1) \leq \angle(L_k, L)$ и сходимости $L_k \to L$. Следовательно, $P_k^1 \to N$ при $k \to +\infty$. В частности, $N \subset L$. Если P_k^* – ортогональное дополнение линеала P_k^1 в линеале L, то в силу леммы 1 $\angle(P_k^*, M) = \angle(P_k^1, N)$, а значит, $P_k^* \to M$ при $k \to +\infty$.

Пусть $U_k \overset{\mathrm{def}}{=} \{\angle(\xi, \eta) : 0 \neq \xi \in P_k^1,\ 0 \neq \eta \in P_k^2\}$. Докажем, что $\alpha_k \overset{\mathrm{def}}{=} \min U_k \to \pi/2$ при $k \to +\infty$ (тогда и $\max U_k \to \pi/2$, так как $\max U_k = \pi - \min U_k$). Пусть единичные векторы $\xi_1^k \in N_k$ и $\xi_2^k \in M_k$ таковы, что угол между их проекциями на линеал L равен α_k. Тогда $\xi_i^k = \cos\beta_i \cdot \xi_{i1}^k + \sin\beta_i \cdot \xi_{i2}^k$, где $\xi_{i1}^k = \mathrm{pr}_L \xi_i^k \in P_k^i$, $\xi_{i2}^k \in L^\perp$ и $\beta_i = \angle(\xi_i^k, \xi_{i1}^k) \leq \leq \angle(L_k, L)$. Почленно скалярно перемножая оба эти представления, учитывая, что $\xi_1^k \perp \xi_2^k$ и $\xi_{i1}^k \perp \xi_{j2}^k$ ($i, j = 1, 2$), получаем равенство $0 = \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 \cdot \cos\alpha_k + \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \cos\angle(\xi_{12}^k, \xi_{22}^k)$, которое, так как $0 \leq \beta_i \leq \angle(L_k, L) \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ ($i = 1, 2$), возможно лишь в случае $\alpha_k \to \pi/2$ при $k \to +\infty$. Отсюда вытекает, что $\angle(P_k^2, P_k^*) \to 0$ при $k \to +\infty$. Действительно, взяв любой вектор $\eta \in P_k^2$, разложим его: $\eta = \eta_1 + \eta_2$, где $\eta_1 \in P_k^1$, $\eta_2 \in P_k^*$. Поскольку $\eta_1 \perp \eta_2$ и $\pi/2 \geq \angle(\eta, \eta_1) \geq \alpha_k \underset{k \to +\infty}{\to} \pi/2$, то $\angle(\eta, \eta_2) \leq \pi/2 - \alpha_k \underset{k \to +\infty}{\to} 0$, что и утверждалось.

Согласно неравенству треугольника, получаем неравенство $h(M_k, M) \leq h(M_k, P_k^2) + h(P_k^2, M) \leq h(L_k, L) + h(P_k^2, P_k^*) + h(P_k^*, M)$. Все три слагаемых в последнем выражении стремятся при $k \to +\infty$ к нулю. Значит, $M_k \to M$ при $k \to +\infty$. Лемма 3 доказана.

4. Теорема 1. *Система (1) правильная, если и только если все ее сингулярные показатели точны.*

Доказательство. 1) Докажем, что из правильности системы (1) вытекает точность всех ее сингулярных показателей. Вследствие полярного представления матрицы [7, с. 244] справедливо тождество $|\det X(t)| = \prod_{i=1}^n \sigma_i(t)$. С другой стороны, по формуле Остроградского–Лиувилля $|\det X(t)| = |\det X(0)| \exp \int_0^t \mathrm{tr}\, A(\tau)\, d\tau$. Значит, $\prod_{i=1}^n \sigma_i(t) = |\det X(0)| \exp \int_0^t \mathrm{tr}\, A(\tau)\, d\tau$ или равносильно

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t) = \frac{1}{t} \ln |\det X(0)| + \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{tr}\, A(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Допустим, что $\varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_m(t) \neq \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_m(t)$ при некотором $m \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность, по которой

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{t_k} \ln \sigma_m(t_k) = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_m(t) = \underline{\sigma}_m(A). \tag{6}$$

Не нарушая общности, считаем, что последовательность $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, кроме того, такова, что при всех $i \neq m$, $1 \leq i \leq n$, существуют точные пределы

$$\sigma_i^* \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{t_k} \ln \sigma_i(t_k) \tag{7}$$

(в противном случае проредим последовательность $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ до последовательности, удовлетворяющей условиям (7)).

Считая в тождестве (5) $t = t_k$, возьмем пределы при $k \to +\infty$ от обеих его частей (вследствие условия 1) правильности системы (см. начало п. 2) и равенств (6), (7)) и получим

$$\underline{\sigma}_m(A) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} \sigma_i^* = S. \tag{8}$$

Согласно [9] верны неравенства $\overline{\sigma}_k(A) \le \lambda_i(A)$, $i = 1,\ldots,n$, и тем более $\sigma_i^* \le \lambda_i(A)$, $i = 1,\ldots,n$, $i \neq m$, и $\underline{\sigma}_m(A) < \lambda_m(A)$. Поэтому из условия 2) правильности системы (п. 2) и равенства (8) вытекает, что

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) > \underline{\sigma}_m(A) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} \sigma_i^* = S.$$

Противоречие. Значит, $\overline{\sigma}_m(A) = \underline{\sigma}_m(A)$ для любого $m \in \{1,\ldots,n\}$, т.е. все сингулярные показатели правильной системы (1) точны.

2) Докажем, что из точности всех сингулярных показателей линейной дифференциальной системы вытекает ее правильность.

2.1) Пусть система (1) имеет точные сингулярные показатели $\sigma_1(A) \le \ldots \le \sigma_n(A)$. Пусть среди них ровно r различных; обозначим их через $s_1 < \ldots < s_r$, а их кратности – соответственно через $n_1,\ldots,n_r$. Пусть $l_0 = 0$ и $l_m = n_r + \ldots + n_{r-m+1}$, если $m = 1,\ldots,r$. В дальнейшем считаем, что числа $1,2,\ldots,n$ разбиты на r подмножеств; m-е подмножество ($m = 1,\ldots,r$) состоит из n_m чисел $l_{r-m}+1,\ldots,l_{r-m+1}$, причем символ n_m будет обозначать также и само m-е подмножество.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ пусть $\sigma_1(k) \ge \ldots \ge \sigma_n(k)$ – сингулярные числа матрицы $X(k)$ (т.е. показатели $\sigma_i(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} k^{-1}\ln\sigma_{n-i+1}(k)$ ($i = 1,\ldots,n$) и $s_m = \lim\limits_{k\to+\infty} k^{-1}\ln\sigma_j(k)$, если и только если $j \in n_m$), а $\Xi_k = \{\xi_k^1,\ldots,\xi_k^n\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов матрицы $X^S(k)$, упорядоченных так, что отвечающие им собственные значения не возрастают: $\sigma_1^2(k) \ge \ldots \ge \sigma_n^2(k)$ (пространство $\mathbb{R}^n$, содержащее векторы ξ_k^i, $i = 1,\ldots,n$, $k \in \mathbb{N}$, удобно считать отвечающим в расширенном фазовом пространстве значению $t = 0$). Для $m = 1,\ldots,r$ через Ξ_k^m обозначим подсемейство базиса Ξ_k, состоящее из векторов ξ_k^j при $j \in n_m$. Линейные оболочки векторов из Ξ_k^m и $\bigsqcup_{m=1}^{q} \Xi_k^m$ обозначим соответственно через $N_m(k)$ и $L_q(k)$, где $m,q \in \{1,\ldots,r\}$ ($\dim N_m(k) = n_m$ и $\dim L_q(k) = n - l_{r-q}$ для любого $k \in \mathbb{N}$). Так как Ξ_k – ортонормированный базис, то ортогональное дополнение $L_q^{\perp}(k)$ линеала $L_q(k)$ – это линейная оболочка векторов $\bigsqcup_{m=q+1}^{r} \Xi_k^m$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и $m = 1,\ldots,r$ обозначим $\alpha_m(k) \overset{\text{def}}{=} \max\{\max\{k^{-1}\ln\sigma_j(k) - s_m : j \in n_m\}, 0\}$ и $\omega_m(k) \overset{\text{def}}{=} \max\{\max\{s_m - k^{-1}\ln\sigma_j(k) : j \in n_m\}, 0\}$. Так как $s_m = \lim\limits_{k\to+\infty} k^{-1}\ln\sigma_j(k)$ при $j \in n_m$, то $\alpha_m(k) \to +0$ и $\omega_m(k) \to +0$ при $k \to +\infty$. Поэтому без нарушения общности считаем в дальнейшем, что $s_q + \alpha_q(k) < s_{q+1} - \omega_{q+1}(k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $q = 1,\ldots,r-1$. Вследствие этого, введенных обозначений и обобщенной теоремы Куранта–Фишера получаем

$$\|X(k)|_{L_q(k)}\| = (s_q + \alpha_q(k))k, \tag{9}$$

$$(s_{q+1} - \omega_{q+1}(k))k \le \|X(k)|_M\| \le (s_r + \alpha_r(k))k \quad \text{для любого линеала} \quad M \subset L_q^{\perp}(k). \tag{10}$$

2.2) Обозначим $\delta_q(k) \overset{\text{def}}{=} \angle(L_q(k), L_q(k+1))$ и $\Delta_q \overset{\text{def}}{=} s_{q+1} - s_q$, где $q = 1,\ldots,r-1$. Докажем, что характеристический показатель последовательности $\{\delta_q(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ не превосходит $-\Delta_q$, т.е.

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k}\ln\delta_q(k) \le -\Delta_q, \quad q = 1,\ldots,r-1 \tag{11}$$

(как обычно, считаем $\ln 0 = -\infty$ и что $-\infty < d$ для любого $d \in \mathbb{R}$, а $\dfrac{-\infty}{d} = -\infty$, если $d > 0$). Допустим противное. Тогда найдется последовательность $\{k_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел, для которой $\delta_q(k_l) \geq \exp\{(-\Delta_q + c)k_l\}$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и некотором положительном c.

Для любого единичного вектора $\xi \in L_q(k+1)$ вследствие равенства (9) верно неравенство

$$\|x(k+1;\xi)\| \leq \exp\{(s_q + \alpha_q(k+1))(k+1)\}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{12}$$

(здесь и всюду ниже $x(\cdot;\xi)$ – решение системы (1) с начальным вектором $\xi = x(0;\xi)$).

Пусть теперь единичный вектор $\xi = \xi(k) \in L_q(k+1)$ таков, что на нем реализуется линейный угол между линеалами $L_q(k)$ и $L_q(k+1)$, т.е. $\angle(\xi, \mathrm{pr}_{L_q(k)}\xi) = \delta_0(k)$ (существование такого вектора установлено в доказательстве леммы 1). Пусть $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1 = \mathrm{pr}_{L_q(k)}\xi$, $\xi_2 = \mathrm{pr}_{L_q^\perp(k)}\xi$. Так как векторы ξ_1, ξ_2 и векторы $x(k;\xi_1)$, $x(k;\xi_2)$ ортогональны, то вследствие неравенства перед формулой (9) и самих неравенств (9), (10) $x(\cdot;\xi_1/\|\xi_1\|)$ – минимальное, а $x(\cdot;\xi_2/\|\xi_2\|)$ – максимальное на отрезке $[0,k]$ решения ограничения системы (1) на линеал этих решений (т.е. для любого решения $x(\cdot;\xi)$, такого, что $\xi \in \mathrm{Lin}\{\xi_1,\xi_2\}$ и $\|\xi\| = 1$, выполнены неравенства $\|x(k;\xi_1/\|\xi_1\|)\| \leq \|x(k;\xi)\| \leq \|x(k;\xi_2/\|\xi_2\|)\|$). Поэтому по лемме Миллионщикова [11, а также 2, с. 90] и с учетом левой части оценки (10) получаем

$$\|x(k+1;\xi)\| \geq \|x(k;\xi)\|\exp(-a) \geq \frac{1}{2}\sin\delta_q(k)\cdot\|x(k;\xi_2/\|\xi_2\|)\|\exp(-a) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}\delta_q(k)\exp\{(s_{q+1} - \omega_{q+1}(k))k - a\}$$

или, считая здесь $k = k_l$,

$$\|x(k+1;\xi)\| \geq \exp\{(-\Delta_q + c + s_{q+1} - \omega_{q+1}(k))k - a - \ln 4\}. \tag{13}$$

Из неравенств (12) и (13) следует, что $c \leq \omega_{q+1}(k) + \alpha_q(k+1) + (s_q + \alpha_q(k+1) + a + \ln 4)/k$ для любого $k = k_l$. Но это неравенство невозможно, поскольку его левая часть – число положительное, а правая – стремится к нулю при $k \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (11), которое для дальнейшего удобно переписать в следующем равносильном виде:

$$\delta_q(k) = \exp\{(-\Delta_q + o_q(k))k\}, \quad \text{где} \quad \overline{\lim_{k\to+\infty}}\, o_q(k) \leq 0. \tag{14}$$

Не нарушая общности, ниже считаем, что $|o_q(k)|$ положителен и монотонно убывает.

2.3) Из соотношений (14) следует как сходимость последовательности $\{L_q(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ к некоторому линеалу L_q, так и оценка скорости этой сходимости. Последовательность $\{L_q(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальна (в смысле, описанном в п. 3.2). Действительно, для любого $m > k$ имеем

$$h(L_q(k), L_q(m)) \leq \sum_{i=k}^{m-1} h(L_q(i), L_q(i+1)) \leq \sum_{i=k}^{\infty} h(L_q(i), L_q(i+1)) = \sum_{i=k}^{\infty}\sin\delta_q(i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=k}^{\infty}\delta_q(i) \overset{(14)}{=} \sum_{i=k}^{\infty}\exp\{(-\Delta_q + o_q(i))i\} \leq \sum_{i=k}^{\infty}\exp\{-(\Delta_q + o_q(k))i\} \leq$$

$$\leq \int\limits_{k-1}^{\infty}\exp\{-(\Delta_q + o_q(k))\tau\}\,d\tau \leq \frac{2}{\Delta_q}\exp\{-(\Delta_q + o_q(k))(k-1)\} \overset{\mathrm{def}}{=} \rho_q(k).$$

Следовательно, так как $\rho_q(k) \to 0$ при $k \to +\infty$, последовательность $\{L_q(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторому линеалу L_q размерности $n - l_{r-q}$ (лемма 2) и $h(L_q, L_q(k)) \leq \rho_q(k)$; последнее неравенство в силу (4) равносильно неравенству $\angle(L_q, L_q(k)) \leq \arcsin\rho_q(k)$.

Отсюда и из леммы 3 вытекает, что последовательность $\{N_m(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторому линеалу N_m размерности n_m. Действительно, $L_m(k) = L_{m-1}(k) \oplus N_m(k)$ и $L_{m-1}(k) \perp N_m(k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ ($L_r(k) = \mathbb{R}^n$). Как доказано выше, $L_m(k) \to L_m$ и $L_{m-1}(k) \to L_{m-1}$ при $k \to +\infty$. Поэтому по лемме 3 последовательность $\{N_m(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к линеалу N_m, являющемуся ортогональным дополнением линеала L_{m-1} в линеале L_m.

2.4) В этом пункте индукцией (спуском) по $m = r, r-1, \ldots, 1$ докажем следующее утверждение: любое ненулевое решение системы (1), начинающееся (при $t = 0$) в линеале N_m, имеет точный показатель, равный s_m (иными словами, при любом $\xi \in N_m$ существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|x(t;\xi)\|$, равный s_m), а показатель Ляпунова решений, выходящих в момент времени $t = 0$ из линеала L_{m-1}, не превосходит s_{m-1}.

Зафиксируем $w \in \{0, 1, \ldots, r-2\}$ и какой-либо единичный вектор $\eta \in L^{\perp}_{r-w-1}$. Пусть $\eta = \eta_1^k + \eta_2^k$, где $\eta_1^k \in L^{\perp}_{r-w-1}(k)$ и $\eta_2^k \in L_{r-w-1}(k)$. Согласно лемме 1 и п. 2.3), получим $\angle(\eta, \eta_1^k) \overset{\mathrm{def}}{=} \psi_k^w \le \angle(L^{\perp}_{r-w-1}, L^{\perp}_{r-w-1}(k)) = \angle(L_{r-w-1}, L_{r-w-1}(k)) = \arcsin\rho_{r-w-1}(k)$. Рассмотрим разложение

$$x(k;\eta) = \cos\psi_k^w \cdot x(k;\eta_1^k/\|\eta_1^k\|) + \sin\psi_k^w \cdot x(k;\eta_2^k/\|\eta_2^k\|). \tag{15}$$

Пусть $w = 0$. Так как $\rho_{r-1}(k) \to 0$ при $k \to +\infty$, то первое слагаемое в представлении (15) (при $w = 0$) имеет в силу оценок (10) (при $q = r-1$) точный показатель, равный s_r, а показатель Ляпунова второго слагаемого не превосходит s_{r-1} вследствие (9).

Пусть единичный вектор $\eta \in L_{r-1}$ и $\eta = \xi_1^k + \xi_2^k$, где $\xi_1^k \in N_r(k)$, $\xi_2^k \in L_{r-1}(k)$. Рассмотрим решение $x(\cdot;\eta)$. Поскольку $\angle(\eta, \xi_2^k) \le \angle(L_{r-1}, L_{r-1}(k))$, а последний угол ограничен сверху величиной $\exp((-\Delta_{r-1} + o_{r-1}(k))(k-1))$, то

$$\|x(k;\eta)\| \le 2\max\{\sin\angle(\eta,\xi_2^k)\cdot\|x(k;\xi_1^k/\|\xi_1^k\|)\|, \|x(k;\xi_2^k/\|\xi_2^k\|)\|\} \le$$

$$\le 2\exp((s_{r-1} + o_{r-1}(k))(k-1) + s_r),$$

т.е. показатель Ляпунова решения $x(\cdot;\eta)$ не превосходит s_{r-1}. Поэтому для любого ненулевого вектора $\eta \in L^{\perp}_{r-1} = N_r$ существует $\lim\limits_{k\to+\infty} k^{-1}\ln\|x(k;\eta)\| = s_r$. База индукции установлена.

Если же $w \in \{1, \ldots, r-2\}$, то представление (15) дает оценку снизу показателей Ляпунова ненулевых решений, выходящих в момент $t = 0$ из линеала $L^{\perp}_{r-w-1}$. Так как $\rho_{r-w-1}(k) \to 0$ при $k \to +\infty$, то первое слагаемое в представлении (15) вследствие левой оценки в (10) имеет показатель Ляпунова, не меньший s_{r-w}, а показатель Ляпунова второго слагаемого в силу (9) не превосходит s_{r-w-1}. Поэтому для любого ненулевого вектора $\eta \in L^{\perp}_{r-w-1}$ (в частности, для $\eta \in N_{r-w}$) выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\, \frac{1}{k}\ln\|x(k;\eta)\| \ge s_{r-w}, \quad \eta \in L^{\perp}_{r-w-1}. \tag{16}$$

Продолжим доказательство сформулированного утверждения. Предположим, что оно доказано для всех $m = r, \ldots, r-w+1$, т.е. показатели ненулевых решений, выходящих из линеала N_m, точны и равны s_m, а показатели Ляпунова решений, выходящих из линеала L_{m-1}, не превосходят s_{m-1}, $m = r, \ldots, r-w+1$. Докажем его для $m = r - w$. Из неравенства (16) и индукционного предположения вытекает, что показатели ненулевых решений, выходящих из линеала N_{r-w}, точны и равны s_{r-w}. Поэтому остается только установить, что показатели Ляпунова решений, начинающихся в линеале L_{r-w-1}, не превосходят s_{r-w-1}. Рассмотрим единичный вектор $\eta \in L_{r-w-1}$ и решение $x(\cdot;\eta)$. Пусть $\eta = \xi_1^k + \xi_2^k$, где $\xi_1^k \in L^{\perp}_{r-w-1}(k)$, $\xi_2^k \in L^{\perp}_{r-w-1}(k)$. Так как $L_{r-w-1}(k) \underset{k\to+\infty}{\to} L_{r-w-1}$, то $\xi_2^k \underset{k\to+\infty}{\to} \eta$. Не нарушая общности рассуждений, считаем также, что $\|x(k;\xi_i^k)\| = \exp(\mu_i k)$, $i = 1, 2$. Тогда $\mu_1 \ge s_{r-w}$, $\mu_2 \le s_{r-w-1}$. Уточним скорость сходимости $\xi_2^k \to \eta$. Так же, как и при оценке величины $\delta_q(k)$, показывается, что $\angle(\xi_2^k, \xi_2^{k+1}) \le \exp((\mu_2 - \mu_1 + o(k))k)$, где $o(k) \to 0$ при $k \to +\infty$, откуда, как и выше, получаем, что $\angle(\eta, \xi_2^k) \le \exp((\mu_2 - \mu_1 + o(k))(k-1))$. Из этой оценки и ортогональности как начальных ξ_1^k, ξ_2^k, так и конечных $x(k;\xi_1^k)$, $x(k;\xi_2^k)$ векторов, а также точности показателей, выходящих из линеалов N_i, $i=r,\ldots,r-w$, вытекает оценка

$$\|x(k;\eta)\|\le 2\max\{\sin\angle(\eta,\xi_2^k)\cdot\|x(k;\xi_1^k/\|\xi_1^k\|)\|,\|x(k;\xi_2^k/\|\xi_2^k\|)\|\}\le 2\exp((\mu_2+o(k))(k-1)+\mu_1),$$

т.е. показатель Ляпунова решения $x(\cdot;\eta)$ не превосходит s_{r-w-1}. Утверждение доказано.

2.5) Так как все сингулярные показатели системы точны, то существует предел при $t\to+\infty$ левой части тождества (5), равный $\sum_{i=1}^n\sigma_i(A)$. Следовательно, существует предел при $t\to+\infty$ и правой части тождества (5), т.е. $\sum_{i=1}^n\sigma_i(A)=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\operatorname{tr}A(\tau)\,d\tau$. Поскольку, как доказано в п. 2.4), при всех $i=1,\ldots,n$ имеют место равенства $\sigma_i(A)=\lambda_i(A)$, то $\sum_{i=1}^n\lambda_i(A)=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\operatorname{tr}A(\tau)\,d\tau$. Стало быть, система, все сингулярные показатели которой точны, правильная. Теорема 1 доказана.

5. В этом пункте получим некоторые следствия из теоремы 1. Эти следствия и теорему 1 применим затем к построению новых коэффициентов неправильности линейных систем.

5.1. Из теоремы 1 вытекает, что в определении Ляпунова правильной системы (см. начало п. 2) показатели Ляпунова можно заменить верхними сингулярными показателями. Именно имеет место

Теорема 2. *Система (1) правильная, если и только если для нее выполнены два условия: 1) существует предел* $S=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\operatorname{tr}A(\tau)\,d\tau$ *и 2′)* $\sum_{i=1}^n\overline{\sigma}_i(A)=S$.

Доказательство. 1) Если система (1) правильная, то выполнено условие 1) и условие 2) $\sum_{i=1}^n\lambda_i(A)=S$. Но, как следует из тождества (5), для системы (1), удовлетворяющей условию 1), верно неравенство $\sum_{i=1}^n\overline{\sigma}_i(A)\ge S$. Отсюда и из условия 2) вытекает, что $\sum_{i=1}^n\overline{\sigma}_i(A)\ge$ $\ge\sum_{i=1}^n\lambda_i(A)$. С другой стороны [9], для произвольной системы (1) справедливо неравенство $\sum_{i=1}^n\lambda_i(A)\ge\sum_{i=1}^n\overline{\sigma}_i(A)$. Поэтому $\sum_{i=1}^n\lambda_i(A)=\sum_{i=1}^n\overline{\sigma}_i(A)=S$.

2) Пусть для системы (1) выполнены условия 1) и 2′). Тогда показатели системы (1) точные. В самом деле, если бы это было не так: $\underline{\sigma}_m(A)<\overline{\sigma}_m(A)$ для некоторого $m\in\{1,\ldots,n\}$, то, выбрав последовательность $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для которой выполнено равенство (6), получили бы

$$S=\lim_{t\to+\infty}t^{-1}\int\limits_0^t\operatorname{tr}A(\tau)\,d\tau\le\underline{\sigma}_m(A)+\sum_{\substack{i=1\\i\ne m}}^n\overline{\sigma}_i(A)<\sum_{i=1}^n\overline{\sigma}_i(A)=S.$$

Противоречие. Следовательно, при выполнении условий 1) и 2′) сингулярные показатели системы (1) точны, а значит, по теореме 1 она является правильной. Теорема 2 доказана.

Эта теорема останется верной, если в условии 2′) верхние сингулярные показатели заменить нижними, т.е. верна

Теорема 2′. *Система (1) правильная, если и только если для нее выполнены два условия: 1) существует предел* $S=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\operatorname{tr}A(\tau)\,d\tau$ *и 2″)* $\sum_{i=1}^n\underline{\sigma}_i(A)=S$.

Необходимость теоремы 2′ следует из теорем 1 и 2, а достаточность можно доказать аналогично доказательству достаточности теоремы 2.

Мы же получим теорему 2′ автоматически из теоремы 2 (и позже точно так из теоремы 1 – теорему 3, а из нее – теорему 3′), воспользовавшись двойственностью, существующей между верхними (нижними) сингулярными показателями системы (1) и нижними (верхними) сингулярными показателями системы, ей сопряженной. Именно для произвольной системы (1) имеют место следующие формулы двойственности:

$$\overline{\sigma}_i(A)=-\underline{\sigma}_{n-i+1}(-A^{\mathrm T})\quad\text{и}\quad\underline{\sigma}_i(A)=-\overline{\sigma}_{n-i+1}(-A^{\mathrm T}),\quad i=1,\ldots,n.\tag{17}$$

Для доказательства соотношений (17) обозначим через $\sigma_1(t)\ge\ldots\ge\sigma_n(t)$ сингулярные числа фундаментальной матрицы $X(t)$, $t\ge0$, системы (1), а через $s_1(t)\ge\ldots\ge s_n(t)$ сингулярные числа матрицы $(X^{-1}(t))^{\mathrm T}$, $t\ge0$, являющейся [6, с. 119] фундаментальной матрицей системы, сопряженной системе (1). Как следует из полярного представления матрицы [7, с. 234–236], сингулярные числа невырожденной матрицы с учетом их кратности обратны сингулярным числам обратной ей матрицы. Поэтому $\sigma_n^{-1}(t) \geq \ldots \geq \sigma_1^{-1}(t)$ – сингулярные числа матрицы $(X^{-1}(t))^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, т.е. $s_i(t) = \sigma_{n-i+1}^{-1}(t)$ при всех $i = 1, \ldots, n$ и $t \geq 0$. Тогда по определению (2) сингулярных показателей получаем

$$\overline{\sigma}_i(A) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \sigma_{n-i+1}(t) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln s_i^{-1}(t) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \left(-\frac{1}{t} \ln s_i(t) \right) =$$

$$= -\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln s_i(t) = \underline{\sigma}_{n-i+1}(-A^{\mathrm{T}}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Первые равенства в формулах (17) доказаны. Вторые равенства означают то же, что и первые, в силу инволютивности операции перехода к сопряженной системе.

Выведем теорему $2'$ из теоремы 2, воспользовавшись соотношениями (17). Система (1) (например, вследствие критериев правильности Ляпунова или Перрона) правильная тогда и только тогда, когда правильной является система, ей сопряженная, а правильность системы, сопряженной системе (1), по теореме 2 равносильна выполнению условий: 1) существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^t \mathrm{tr}(-A^{\mathrm{T}}(\tau))\, d\tau = -S$ и $2'$) $\sum_{i=1}^n \overline{\sigma}_i(-A^{\mathrm{T}}) = -S$. Условие 1) здесь то же, что и условие 1) в теореме $2'$, а условие $2'$) вследствие (17) и условия 1) равносильно условию $2''$) теоремы $2'$. Теорема $2'$ доказана.

5.2. Теорему 1 можно считать аналогом, сформулированным на языке сингулярных показателей, критерия Винограда правильности системы. Как видим, в этом случае при переходе на язык сингулярных показателей происходит формальное улучшение формулировки, поскольку по сравнению с критерием Винограда снимается требование на показатели соответствующих углов. Напротив, доказанная ниже теорема 3, являющаяся аналогом критерия Перрона правильности системы, дословно формулируется, как и указанный критерий, с заменой показателей Ляпунова верхними сингулярными показателями.

Теорема 3. *Система (1) правильная, если и только если ее верхние сингулярные показатели с учетом их кратности симметричны относительно нуля верхним сингулярным показателям сопряженной ей системы.*

Доказательство. По теореме 1 правильность системы (1) равносильна выполнению равенств $\overline{\sigma}_i(A) = \underline{\sigma}_i(A)$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Заменив в этих равенствах $\underline{\sigma}_i(A)$ по формуле из (17), получим $\overline{\sigma}_i(A) = -\overline{\sigma}_{n-i+1}(-A^{\mathrm{T}})$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 вследствие формул двойственности (17) означает то же, что и

Теорема $3'$. *Система (1) правильная, если и только если ее нижние сингулярные показатели с учетом их кратности симметричны относительно нуля нижним сингулярным показателям сопряженной ей системы.*

Верхние сингулярные показатели системы (1) являются аналогами ее показателей Ляпунова. В этом смысле теоремы 2 и 3 – это аналоги соответственно определения Ляпунова правильной системы и критерия Перрона правильности, выраженные на языке верхних сингулярных показателей. Теоремы 2 и 3 допускают двойственную формулировку (теоремы $2'$ и $3'$ соответственно), получающуюся формальной заменой верхних сингулярных показателей нижними (в этом смысле теорема 1 самодвойственна). Вместе с тем ни определение Ляпунова, ни критерий Перрона не имеют двойственной формулировки на языке показателей Перрона, аналогами которых являются нижние сингулярные показатели. Это связано с тем, что множество показателей Перрона системы (1), вообще говоря, не конечно (не более чем счетно или континуально) [13, 14], поэтому перенесение на нижние показатели Перрона понятий суммы показателей или их кратности, чтобы для этих показателей были верны указанные аналоги, достаточно проблематично.

5.3. Доказанные теоремы позволяют к имеющимся коэффициентам неправильности $\sigma_{\text{Л}}$ Ляпунова [1, с. 51], $\sigma_{\text{П}}$ Перрона [3] и σ_{Γ} Гробмана [12] (см. также обзор [2, § 5]) добавить новые. Напомним, что коэффициентом неправильности называется функционал $\varkappa : \mathcal{M}_n \to$ $\to [0, +\infty)$ ($\mathcal{M}_n$ – совокупность систем (1)) такой, что прообраз нуля $\varkappa^{-1}(0)$ состоит в точности из совокупности правильных систем. При этом подразумевают, что выполнено никак не формализуемое требование (Ю.С. Богданов) вычислимости функционала $\varkappa$, понимаемое как то, что он должен быть определен через решения линейной системы при помощи операций анализа (это требование исключает из рассмотрения не отвечающие существу рассматриваемых вопросов функционалы типа равных нулю на правильных системах и единице на неправильных). Из теоремы 1 вытекает, что коэффициентом неправильности является функционал $\varkappa_1(A) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{\overline{\sigma}_i(A) - \underline{\sigma}_i(A)\}$, а из теорем 2 и $2'$ – что функционалы

$$\varkappa_2(A) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma}_i(A) - \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau \quad \text{и} \quad \varkappa_3(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau - \sum_{i=1}^{n} \underline{\sigma}_i(A).$$

Из теорем 3 и $3'$ следует, что коэффициентами неправильности являются также и функционалы $\varkappa_4(A) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{\overline{\sigma}_i(A) + \overline{\sigma}_{n-i+1}(-A^{\mathrm{T}})\}$ и $\varkappa_5(A) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{-\underline{\sigma}_i(A) - \underline{\sigma}_{n-i+1}(-A^{\mathrm{T}})\}$, но в силу (17) $\varkappa_1(A) = \varkappa_4(A) = \varkappa_5(A)$ для любой $A \in \mathcal{M}_n$. Коэффициент $\varkappa_1$ – это сингулярный аналог коэффициента неправильности Перрона $\sigma_{\text{П}}$ (что легко видеть, если записать $\varkappa_1$ в виде $\varkappa_4$). Так как $\lambda_i(A) \geq \overline{\sigma}_i(A)$ при всех $i = 1,\ldots,n$, то $\sigma_{\text{П}}(A) \geq \varkappa_1(A)$ при всех $A \in \mathcal{M}_n$. Коэффициенты $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ – это сингулярные аналоги коэффициента неправильности Ляпунова $\sigma_{\text{Л}}$, при этом $\varkappa_2(A) = \varkappa_3(-A^{\mathrm{T}})$ для любой $A \in \mathcal{M}_n$. Следующие неравенства легко вытекают из определений соответствующих коэффициентов неправильности: $\sigma_{\text{Л}}(A) \geq \varkappa_2(A)$ и $n\varkappa_1(A) \geq \varkappa_2(A) + \varkappa_3(A)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 6 т. Т. 2. М.; Л., 1956.
2. *Изобов Н.А.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.
3. *Perron O.* // Math. Zeitschr. 1929. Bd 31. Hf 4. S. 748–766.
4. *Басов В.П.* // Вестн. Ленингр. ун-та. 1952. № 12. С. 3–8.
5. *Виноград Р.Э.* // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9. Вып. 2. С. 129–136.
6. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
8. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.
9. *Барабанов Е.А., Фоминых Е.И.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 11. С. 1572–1573.
10. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1937.
11. *Миллионщиков В.М.* // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
12. *Гробман Д.М.* // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
13. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 4. С. 469–477.
14. *Барабанов Е.А.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1843–1853.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
22.11.2004 г.