МАРТ 1994 г., ТОМ 30, № 3

УДК 517.95

В. И. ПРОХОРЕНКО

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ. II

В статье [1] для дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered}\varepsilon T(-iD)u+a(x_1,x_2)u=h(x_1,x_2,\varepsilon),\\ T(-iD)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2}a_\alpha(-iD)^\alpha\end{gathered}\tag{1}$$

указаны необходимые и достаточные условия на правую часть и коэффициенты (см. теоремы 1—4), при выполнении которых уравнение (1) имеет аналитическое в окрестности особой точки $\varepsilon=0$ периодическое по x_1, x_2 решение $u=u(x_1,x_2,\varepsilon)$. Здесь $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ — целочисленный мультииндекс, a_α — действительные числа, $(-iD)^\alpha=(-iD_1)^{\alpha_1}(-iD_2)^{\alpha_2}$, $D_k=\partial/\partial x_k$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$. Отметим, что упомянутые выше условия заключаются в требовании существования у оператора $F=a^{-1}(x_1,x_2)\times\times T(-iD)$ базиса из периодических собственных функций с определенными свойствами (см. предположения 1°—4° в [1]).

В настоящей работе выделяем классы уравнений (1) (путем конкретизации типа оператора $T(-iD)$ и вида функции $a(x_1,x_2)$), для которых выполняются предположения 1°—4° и утверждения теорем 1—4 из [1] и которые, следовательно, имеют аналитические по ε периодические решения.

1. $a=\mathrm{const}\neq 0$; тогда собственными значениями задачи

$$(F-\lambda I)v=0,\ \ v(x_1,x_2)\in C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2;\mathbf{C})\tag{2}$$

являются числа

$$\lambda_{kn}=a^{-1}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}(2\pi)^{|\alpha|}a_\alpha(k/\tau_1)^{\alpha_1}(k/\tau_2)^{\alpha_2},\ \ k,n=0,\pm1,\dots,\tag{3}$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$w_{kn}(x_1,x_2)=\exp[2\pi i(kx_1/\tau_1+nx_2/\tau_2)],\ \ k,n=0,\pm1,\dots\tag{4}$$

Отметим, что система функций (4) образует ортогональный базис в пространстве $L^2_{|a|}(\Pi)$ (см. [2]) и, кроме того, коэффициенты Фурье по системе (4) произвольной функции $f(x_1,x_2)$ класса $C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2;\mathbf{C})$ удовлетворяют соотношению

$$\begin{gathered}f_{kn}\equiv(\tau_1\tau_2)^{-1}a\iint_\Pi f(x_1,x_2)\exp[-2\pi i(kx_1/\tau_1+nx_2/\tau_2)]dx_1dx_2=\\ =O((|k|+1)^{-p}(|n|+1)^{-q}),\ \ k,n=0,\pm1,\dots,\end{gathered}$$

при любых целых p, q. Отсюда следует, что система собственных функций (4) удовлетворяет условиям 4° а, б, в [1], поэтому имеет место

Следствие 1. *Пусть $a=\mathrm{const}\neq 0$, $F=a^{-1}T(-iD)$ и пусть коэффициенты a_α и числа τ_1, τ_2 таковы, что последовательность (3) удовлетворяет условию 2° из [1]. Тогда, для того чтобы функция $g(x_1,x_2)$ при некотором $\nu>0$ принадлежала пространству Y^ν_{Fp} (см. определение*

этого пространства в [1]), необходимо и достаточно, чтобы $g(x_1, x_2)$ представлялась в виде

$$g(x_1, x_2) = \sum_{|\lambda_{kn}| \leqslant \nu} g_{kn} \exp[2\pi i(kx_1/\tau_1 + nx_2/\tau_2)]. \tag{5}$$

Для того чтобы уравнение

$$\varepsilon T(-iD)u + au = h_0(x_1, x_2) \tag{6}$$

имело решение $u = u(x_1, x_2, \varepsilon)$, принадлежащее классу $AC^2_{\tau_1, \tau_2}$ (см. определение в [1]), необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $h_0(x_1, x_2) = ag(x_1, x_2)$ с некоторой функцией $g(x_1, x_2)$ вида (5). Указанное решение определяется однозначно и представляется в следующем виде:

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{|\lambda_{kn}| \leqslant \nu} (g_{kn}/(1 + \varepsilon\lambda_{kn})) \exp[2\pi i(kx_1/\tau_1 + nx_2/\tau_2)], \ |\varepsilon| < \nu^{-1}.$$

В рассматриваемом случае справедливы также заключения теорем 3, 4 из [1].

Отметим, что условие 2° из [1] (а значит, и утверждение следствия 1) выполняется, например, для следующих операторов $F = a^{-1}T(-iD)$:

1.1. $a = \text{const} \neq 0$, $\omega = a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$, т. е. $T(-iD)$—оператор эллиптического типа (в частности, $T = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$); в этом случае выполняются условия 2°, 3°а из [1], поэтому любое пространство $Y^{\nu}_{F_p}$ состоит из тригонометрических многочленов вида (5).

Из следствия 1 вытекает, в частности, что уравнение

$$\varepsilon(\partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2) + au = \cos x_1 \cos x_2, \ a = \text{const} \neq 0,$$

имеет единственное решение класса $AC^2_{2\pi, 2\pi}$: $u = (a - 2\varepsilon)^{-1} \cos x_1 \cos x_2$, $|\varepsilon| < 2^{-1}|a|$, а уравнение

$$\varepsilon(\partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2) + au = \exp(\cos x_1 \cos x_2), \ a = \text{const} \neq 0,$$

не имеет решений класса $AC^2_{2\pi, 2\pi}$. Заметим, что последнее уравнение имеет решение, периодическое по x_1, x_2 с периодами 2π, представимое в виде ряда по степеням ε, который в обычном смысле расходится, но сходится асимптотически при $\varepsilon \to 0$.

1.2. $a = \text{const} \neq 0$, $T(-iD) = -a_{20}\partial^2/\partial x_1^2 - a_{02}\partial^2/\partial x_2^2$ — оператор гиперболического типа, т. е. $\omega = -a_{20}a_{02} > 0$, и, кроме того, выполняется одно из следующих соотношений:

а) $a_{02}\tau_1^2(a_{20}\tau_2^2)^{-1} = -p^2$, $p \in N$; тогда собственное подпространство задачи (2), отвечающее собственному значению $\lambda = 0$, бесконечномерно, причем его базис образуют функции $\{\exp[2\pi n i(px_1/\tau_1 + x_2/\tau_2)], \ n = 0, \pm 1, \ldots\}$, а каждое из собственных значений $\lambda_{kn} \neq 0$ (см. (3)) имеет конечную кратность;

б) $a_{02}\tau_1^2(a_{20}\tau_2^2)^{-1} = -q$, $q \in N$, причем q не представляется в виде квадрата целого числа; тогда собственное подпространство задачи (2), отвечающее собственному значению $\lambda = 0$, одномерно (с базисом $v_0(x_1, x_2) \equiv 1$), а каждое из различных собственных значений $\lambda_{kn} \neq 0$, определяемых равенством (3), бесконечномерно (см. [3]).

Так, например, если $T(-iD) = \partial^2/\partial x_1^2 - 2\partial^2/\partial x_2^2$, $a = \text{const} \neq 0$, то собственному подпространству задачи (2), отвечающему собственному значению $\lambda = -7a^{-1}$, принадлежит бесконечное множество функций $\omega_k(x_1, x_2) = \cos a_k x_1 \cos b_k x_2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $a_k = 5m_k + 6n_k$, $b_k = 3m_k + 5n_k$, $m_k = 2^{-1}[(3 + 2\sqrt{2})^k + (3 - 2\sqrt{2})^k]$, $n_k = (2\sqrt{2})^{-1}[(3 + 2\sqrt{2})^k - (3 - 2\sqrt{2})^k]$. Поэтому в данном случае представление правой части уравнения (6) в виде тригонометрического многочлена хотя и является достаточным, но не является необходимым условием существования решения класса $AC^2_{2\pi, 2\pi}$ уравнения (6). Например, уравнение

$$\varepsilon(\partial^2 u/\partial x_1^2 - 2\partial^2 u/\partial x_2^2) + au = h_{01}(x_1, x_2), \ a = \text{const} \neq 0,$$

$$h_{01}(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(a_k+b_k)} \cos a_k x_1 \cos b_k x_2$$

имеет единственное аналитическое решение класса $AC^2_{2\pi,\,2\pi}$: $u(x_1, x_2, \varepsilon) = h_{01}(x_1, x_2)/(a-7\varepsilon)$, $|\varepsilon| < |a|/7$.

1.3. $a = \text{const} \neq 0$, $T(-iD) = -ia_{10}\partial/\partial x_1 - a_{02}\partial^2/\partial x_2^2$ — оператор Шредингера; тогда

а) если $\pi a_{02}\tau_1(a_{10}\tau_2^2)^{-1}$ — число иррациональное, то все собственные подпространства задачи (2), соответствующие различным собственным значениям из последовательности (3), конечномерны (размерности 1 при $\lambda_{00}=0$ и размерности 2 при $\lambda_{kn} \neq 0$);

б) если $\pi a_{02}\tau_1(a_{10}\tau_2^2)^{-1}$ — число рациональное, то все собственные подпространства задачи (2), соответствующие различным собственным значениям из последовательности (3), бесконечномерны.

В частности, если $T = -i\partial/\partial x_1 - \partial^2/\partial x_2^2$, $\tau_1 = \tau_2 = 2\pi$, то задача (2) (с $a = \text{const} \neq 0$) имеет счетное множество собственных значений $\lambda_l = l/a$, $l = 0, \pm 1, \ldots$, каждому из которых соответствует бесконечномерное подпространство с базисом $\{\exp[i((l-j^2)x_1 + jx_2)],\ j = 0, \pm 1, \ldots\}$, $l = 0, \pm 1, \ldots$ Следовательно, как вытекает из следствия 1, уравнение

$$\varepsilon\left(-i\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + au = \sum_{l=-l_1}^{l_1} v_l^*(x_1, x_2),\quad a = \text{const} \neq 0,\quad l_1 \in N,$$

$$v_l^* = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-|l-j^2|-|j|} \exp[i((l-j^2)x_1 + jx_2)],$$

имеет единственное решение класса $AC^2_{2\pi,\,2\pi}$:

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{l=-l_1}^{l_1} (v_l^*(x_1, x_2)/(a+\varepsilon l)),\quad |\varepsilon| < |a|/l_1.$$

2. $T(-iD)$ — оператор эллиптического типа (т. е. $\omega < 0$), $a = a(x_1, x_2)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию 1°. В этом случае собственные значения и собственные функции оператора $F = a^{-1}T(-iD)$ удовлетворяют условиям 2°, 3°а, 4°а из [1] (см. [4—6]). Таким образом, для уравнения (1) с оператором $T(-iD)$ эллиптического типа справедливы утверждения теорем 1—4 из [1].

3. $T(-iD) = -ia_{10}\partial/\partial x_1 - a_{02}\partial^2/\partial x_2^2$ — оператор Шредингера, $\pi a_{02}\tau_1(a_{10}\tau_2^2)^{-1}$ — иррациональное число, $a = a(x_1) \in C^\infty_{\tau_1}(R; R)$, $a(x_1) \neq 0$, $\forall x_1 \in R$.

В этом случае задачу (2) запишем в следующем виде:

$$-ia_{10}\frac{\partial w}{\partial x_1} - a_{02}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \lambda a(x_1) w,\quad w(x_1, x_2) \in C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C}), \tag{7}$$

и ее решения $w(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\psi(x_2)$ находим из таких уравнений:

$$\psi''(x_2) = -\mu\psi(x_2),\quad \psi(x_2) \in C^\infty_{\tau_2}(R; \mathbf{C}), \tag{8}$$

$$\begin{gathered} -ia_{10}\varphi'(x_1) + a_{20}\mu\varphi(x_1) = \lambda a(x_1)\varphi(x_1), \\ \varphi(x_1) \in C^\infty_{\tau_1}(R; \mathbf{C}). \end{gathered} \tag{9}$$

Задача (8) имеет счетное множество собственных значений $\mu_n = (2\pi n\tau_2^{-1})^2$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, которым соответствует система собственных функций $\psi_n(x_2) = \exp(2\pi i x_2 \tau_2^{-1})$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, образующих ортогональный базис в пространстве $L^2(0, \tau_2)$ (см. [2]).

При каждом $\mu = \mu_n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, задача (9) имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_{kn} = 2\pi(a_{10}k + 2\pi a_{02}\tau_1\tau_2^{-2}n^2)\left(\int_0^{\tau_1} a(\xi)\,d\xi\right)^{-1}, \tag{10}$$

$k=0, \pm 1, \ldots$, которым соответствует система собственных функций

$$\varphi_{nk}(x_1)=\exp\left[\frac{i}{a_{10}}\left(\lambda_{kn}\int_0^{x_1} a(\xi)\,d\xi-\frac{4\pi^2 a_{02}n^2x_1}{\tau_1^2}\right)\right],\ k=0, \pm 1, \ldots,$$

образующих ортогональный базис в пространстве $L^2_{|a(x_1)|}(0, \tau_1)$ [7, с. 91]. Следовательно, задача (7) имеет счетное множество собственных значений (10) ($k, n=0, \pm 1, \ldots$), которым соответствует система собственных функций

$$w_{kn}(x_1, x_2)=\varphi_{nk}(x_1)\psi_n(x_2)=\exp\left[i\left(\frac{\lambda_{kn}}{a_{10}}\int_0^{x_1} a(\xi)\,d\xi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{4\pi^2 a_{02}n^2x_1}{a_{10}\tau_1^2}+\frac{2\pi n x_2}{\tau_2}\right)\right],\ k, n=0, \pm 1, \ldots, \tag{11}$$

образующих ортогональный базис в пространстве $L^2_{|a(x_1)|}(\Pi)$ [8, с. 210].

Таким образом, в рассматриваемом случае различные собственные значения (10) ($n=0, 1, \ldots, k=0, \pm 1, \ldots$) и собственные функции (11) удовлетворяют условиям 2°, 3°а, 4°а (причем каждое собственное значение λ_{kn} имеет кратность 2 при $n=1, 2, \ldots, k=0, \pm 1, \ldots$ и является простым при $n=0$, $k=0, \pm 1, \ldots$), поэтому для уравнения

$$\varepsilon\left(-ia_{10}\frac{\partial u}{\partial x_1}-a_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+a(x_1)u=h(x_1, x_2, \varepsilon)$$

справедливы утверждения теорем 1—4 из [1].

4. $T(-iD)=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$, $a=a_1(x_1)a_2(x_2)$, $a_j\in C^\infty_{\tau_j}(R; R)$, $a_j(x_j)\neq 0$, $\forall x_j\in R$, $j=1, 2$.

В этом случае по аналогии с предыдущим примером решения $w(x_1, x_2)=\varphi(x_1)\psi(x_2)$ задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}=\lambda a_1(x_1)a_2(x_2)w,\ w\in C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C}), \tag{12}$$

находятся из следующих уравнений:

$$i\varphi'(x_1)=\mu a_1(x_1)\varphi(x_1),\ \varphi(x_1)\in C^\infty_{\tau_1}(R; \mathbf{C}), \tag{13}$$

$$i\mu\psi'(x_2)=-\lambda a_2(x_2)\psi(x_2),\ \psi(x_2)\in C^\infty_{\tau_2}(R; \mathbf{C}). \tag{14}$$

Задача (13) имеет счетное множество собственных значений $\mu_k=-2\pi k\left(\int_0^{\tau_1} a_1(\xi)\,d\xi\right)^{-1}$, $k=0, \pm 1, \ldots$, и счетную систему собственных функций $\varphi_k(x_1)=\exp\left[2\pi ki\int_0^{x_1} a_1(\xi)\,d\xi\left(\int_0^{\tau_1} a_1(\xi)\,d\xi\right)^{-1}\right]$, $k=0, \pm 1, \ldots$, являющуюся ортогональным базисом в пространстве $L^2_{|a_1(x_1)|}(0, \tau_1)$ [7, с. 91]. При каждом $\mu=\mu_k$, $k=0, \pm 1, \ldots$, задача (14) также имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_{kn}=-4\pi^2 kn\left(\int_0^{\tau_1} a_1(\xi)\,d\xi\int_0^{\tau_2} a_2(\xi)\,d\xi\right)^{-1},\ n=0, \pm 1, \ldots$$

(с учетом бесконечной кратности собственного значения $\lambda=0$), которым соответствует система собственных функций $\psi_n(x_2)=\exp\left[2\pi ni\int_0^{x_2} a_2(\xi)\,d\xi\times\right.$ $\left.\times\left(\int_0^{\tau_2} a_2(\xi)\,d\xi\right)^{-1}\right]$, $n=0, \pm 1, \ldots$, образующих базис в пространстве $L^2_{|a_2(x_2)|}(0, \tau_2)$.

Следовательно, задача (12) имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_{00}=0,\ \lambda_{kn}=-4\pi^2 kn\left(\int_0^{\tau_1} a_1(\xi)\,d\xi\int_0^{\tau_2} a_2(\xi)\,d\xi\right)^{-1}, \tag{15}$$

$$k, n=\pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и систему собственных функций

$$w_{kn}(x_1, x_2)=\varphi_k(x_1)\psi_n(x_2)=\exp\left\{2\pi i\left[k\int_0^{x_1} a_1(\xi)\,d\xi\left(\int_0^{\tau_1} a_1(\xi)\,d\xi\right)^{-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+n\int_0^{x_2} a_2(\xi)\,d\xi\left(\int_0^{\tau_2} a_2(\xi)\,d\xi\right)^{-1}\right]\right\},\ k, n=0, \pm 1, \ldots, \tag{16}$$

являющуюся ортогональным базисом в пространстве $L^2_{|a_1a_2|}(\Pi)$ [8, с. 210]. Отметим, что собственные значения (15) удовлетворяют условиям 2°, 3°б (бесконечномерным является собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_{00}=0$). Покажем, что собственные функции (16) удовлетворяют условию 4°б из [1].

Выше показано, что система (16) образует ортогональный базис в пространстве $L^2_{|a_1a_2|}(\Pi)$. Пусть $f(x_1, x_2)$ — произвольная функция класса $C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2;\ \mathbf{C})$ и пусть

$$f(x_1, x_2)=\sum_{k,n=-\infty}^{+\infty} f_{kn}w_{kn}(x_1, x_2) \tag{17}$$

— ее ряд Фурье по системе (16), где

$$f_{kn}=A^{-1}\iint_\Pi f(x_1, x_2)\bar{w}_{kn}(x_1, x_2)\,|a_1(x_1)a_2(x_2)|\,dx_1dx_2 \tag{18}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x_1, x_2)$ по системе (16) (здесь $A=\iint_\Pi |a_1(x_1)a_2(x_2)|\,dx_1dx_2$). Преобразуя двойной интеграл (18) к повторному и интегрируя по частям по переменной x_1 и по переменной x_2, получаем, что для коэффициентов Фурье (18) произвольной функции $f(x_1, x_2)\in C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2;\ \mathbf{C})$ при любых целых неотрицательных p, q справедливы соотношения $f_{kn}=O((|k|+1)^{-p}(|n|+1)^{-q})$, $k, n=0, \pm 1, \ldots$ Отсюда следует, что ряд Фурье (17) функции $f(x_1, x_2)\in C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2;\ \mathbf{C})$ сходится по норме пространства $C^2_{\tau_1,\tau_2}(R^2;\ \mathbf{C})$, т. е. система собственных функций (16) удовлетворяет условию 4б из [1].

Из изложенного выше вытекает, что для уравнения

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+a_1(x_1)a_2(x_2)u=h(x_1, x_2, \varepsilon)$$

справедливы утверждения теорем 1—4 из [1].

Литература

1. Прохоренко В. И. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 12. С. 2168—2177.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965.
3. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. М., 1978.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1966.
5. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
6. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные уравнения. М., 1969.
8. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 12 июля 1993 г.