С. Я. Серовайский, Дифференцирование обратной функции в ненормированных пространствах, *Функц. анализ и его прил.*, 1993, том 27, выпуск 4, 84–87

4) все функции $\{\partial^{k+l+m}F^{(\alpha)}(x,u,y)/\partial x^k \partial u^l \partial y^m\}|_{y=\gamma_\alpha(x,u)}$ равномерно сходятся к аналогичным производным функции $F^{(0)}(x,u,y)$, вычисленным в точках многообразия N_0.

В случае когда все N_α совпадают с вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$, определение 3 превращается в более простое определение 1.

Теорема. *Если семейство гиперповерхностей M_α сходится вдоль цепных подмногообразий $N_\alpha \subset M_\alpha$ при $\alpha \to 0$ к невырожденной гиперповерхности M_0 с выделенным цепным подмногообразием N_0, то существуют нормальные уравнения M^*_α поверхностей этого семейства, сходящиеся вдоль $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$ к нормальному уравнению M^*_0.*

Для доказательства необходимо выпрямить каждое из M_α вдоль N_α, а затем воспользоваться поэтапной нормализацией, описанной выше.

Литература

1. *Chern S. S., Moser J. K.* // Acta Math. – 1974. – V. 133. – p. 219–271. **2.** *Витушкин А. Г.* // УМН. – 1985. – Т. 40, вып. 2. – С. 3–31. **3.** *Кружилин Н. Г.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1985. - Т. 49, №3. – С. 566–591. **4.** *Лобода А. В.* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52, №1. – С. 76–85.

Воронежский
инженерно-строительный институт

Поступило в редакцию
10 июля 1992 г.
В переработанном виде
14 апреля 1993 г.

УДК 517.988

Дифференцирование обратной функции в ненормированных пространствах

 С. Я. Серовайский

Устанавливается расширенная дифференцируемость обратного оператора в линейных топологических пространствах при возможном нарушении условий теоремы об обратной функции.

Задаются линейные топологические пространства X, Y, оператор $L\colon Y \to X$ и точка $y_0 \in Y$. Рассматриваются линейные пространства X_0, Y_0 и линейные топологические пространства X_*, Y_*, такие, что X и X_0 являются подпространствами пространства X_*, а Y_* — подпространством пространств Y_0 и Y. Пусть β есть некоторое семейство множеств из Y_*.

Определение. Линейный оператор $D\colon Y_0 \to X_0$ назовем $(Y_0, X_0; Y_*, X_*)$-расширенной β-производной оператора L в точке y_0, если его сужение D_* на Y_* есть непрерывный оператор $Y_* \to X_*$, удовлетворяющий равенству $L(y_0 + h) = Ly_0 + D_*h + r(h)$, и для любого $B \in \beta$ при $\sigma \to 0$ имеет место равномерная по $h \in B$ сходимость $r(\sigma h)/\sigma \to 0$ в X_*.

Если β — семейство всех конечных (соответственно всех ограниченных) множеств, то D есть $(Y_0, X_0\,; Y_*, X_*)$-расширенная производная Гато (Фреше) [1]. $(Y, X\,; Y, X)$-расширенная производная Гато (Фреше) совпадает с классической производной Гато (Фреше).

Рассмотрим линейные топологические пространства X, Y, оператор $A\colon X \to Y$ и точки $x_0 \in X$, $y_0 = Ax_0$. Задается локально выпуклое пространство Y_* с топологией ограниченной сходимости, являющееся подпространством в Y, а в нем — окрестность нуля θ_* и семейство множеств β. Положим $\theta = y_0 + \theta_*$. Пусть для любого $y \in \theta$ существует такая точка $x = x(y) \in X$, что $Ax = y$. Если оператор A дифференцируем по Гато, то с помощью теоремы о среднем устанавливается равенство

$$Ax - Ax_0 = \int_0^1 A'[x_0 + t\,(x - x_0)]\,dt\,(x - x_0)\,.$$

Для любого $y \in \theta$ определим оператор $G(y) \in \mathcal{L}(X, Y)$ по формуле

$$G(y) = \int_0^1 A'[x_0 + t\,(x(y) - x_0)]\,dt\,.$$

Справедливо соотношение

$$G(y)[x(y) - x_0] = y - y_0 \qquad \forall\, y \in \theta,$$

откуда следует, что

$$\lambda G(y)[x(y) - x_0] = \lambda\,(y - y_0) \qquad \forall\, y \in \theta,\ \lambda \in Y', \tag{1}$$

где Y' — пространство, сопряженное с Y.

Для любого $y \in \theta$ рассматриваются такие линейные пространства $X(y)$, $Y(y)$, что X, Y_*, $Y(y)$ являются подпространствами в $X(y)$, $Y(y)$, Y соответственно. Пусть для любого $y \in \theta$ существует такое непрерывное продолжение $\overline{G}(y)$ оператора $G(y)$ на $X(y)$, что $\operatorname{Im}\overline{G}(y) \subset Y(y)$. Линейный непрерывный оператор $\overline{G}(y)\colon X(y) \to Y(y)$ обладает сопряженным $\overline{G}(y)^*\colon Y(y) \to X(y)$. Учитывая включение $x(y) \in x_0 + X(y)$, из равенства (1) получим

$$\overline{G}(y)^*\lambda\,[x(y) - x_0] = \lambda\,(y - y_0) \qquad \forall\,\lambda \in Y(x)',\ y \in \theta\,. \tag{2}$$

Рассмотрим линейное уравнение

$$\overline{G}(y)^* p = \mu, \tag{3}$$

называемое квазисопряженной системой [1, 2]. Положим $X_0 = X(y_0)$, $Y_0 = Y(y_0)$. Предположим, что для любого $\mu \in X_0'$ при $y = y_0$ уравнение (3) имеет решение $p = p_\mu \in Y_0'$. Пусть X_* — локально выпуклое пространство с топологией ограниченной сходимости, причем $X(y)$ есть подпространство в X_* для любого $\mu \in \theta$, M — произвольное ограниченное множество из X_*', β — некоторое семейство множеств из Y_* и для любых $\mu \in M$, $y \in \theta$ уравнение (3) имеет решение $p = p_\mu(y) \in Y(y)'$, причем для любого $B \in \beta$ при $\sigma \to 0$ имеет место равномерная по $\mu \in M$, $h \in B$ слабая сходимость $p_\mu(y_0 + \sigma h) \to p_\mu$ в Y_*'.

Теорема. *При сделанных предположениях оператор* $A^{-1}: Y \to X$ *имеет* $(Y_0, X_0\,; Y_*, X_*)$*-расширенную* β*-производную* D *в точке* y_0, *определяемую равенством*

$$\mu D h = p_\mu h \qquad \forall\, \mu \in X_0',\ h \in Y_0\,.$$

Доказательство. Пусть Σ — некоторое упорядоченное множество, а $\{h_\sigma\}$ $(\sigma \in \Sigma)$ — такая направленность, что при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость в смысле Мура–Смита $h_\sigma \to h$ в Y_*. В силу определения топологии в Y_* для любого ограниченного в Y_*' множества Λ имеем равномерную по $h \in \Lambda$ сходимость $\Lambda h_\sigma \to \Lambda h$. Семейство $\{p_\mu\}$ $(\mu \in M)$ ограничено в слабой топологии пространства Y_*', которая отделима [3, с. 197]. Поскольку в отделимом локально выпуклом пространстве слабо ограниченное множество ограничено [3, с. 219], семейство $\{p_\mu\}$ $(\mu \in M)$ ограничено в Y_*'. Следовательно, имеет место равномерная по $\mu \in M$ сходимость $p_\mu h_\sigma \to p_\mu h$.

Сужение D_* оператора D на Y_* удовлетворяет равенству

$$\mu D_* h_\sigma = p_\mu h_\sigma \qquad \forall\, \mu \in M, \sigma \in \Sigma\,.$$

Переходя к пределу, установим, что $\mu D_* h_\sigma \to \mu D_* h$ равномерно по $\mu \in M$, откуда, поскольку множество M произвольно, следует, что $D_* h_\sigma \to D_* h$ в X_*. Тогда оператор $D_*: Y_* \to X_*$ непрерывен.

Положив в (2) $\lambda = p_\mu(y)$ при $\mu \in M$, получим

$$\mu[x(y) - x_0] = p_\mu(y)(y - y_0) \qquad \forall\, y \in \theta,\ \mu \in M\,.$$

В пространстве Y_* зададим оператор r, полагая $r(h) = x(y_0 + h) - x_0 - D_* h$. Для любых $\mu \in M$, $h \in Y_*$ и достаточно малых σ имеем

$$\mu[r(\sigma h)/\sigma] = \mu\{[x(y_0 + \sigma h) - x_0]/\sigma - D_* h\} = [p_\mu(y_0 + \sigma h) - p_\mu]\, h\,.$$

Переходя к пределу при $\sigma \to 0$, установим равномерную по $\mu \in M$, $h \in B$ сходимость $\mu[r(\sigma h)/\sigma] \to 0$, откуда следует, что $r(\sigma h)/\sigma \to 0$ в X_* равномерно по $h \in B$. Таким образом, оператор D действительно является расширенной производной обратного оператора A. Теорема доказана.

Условия теоремы кажутся громоздкими, однако имеет место

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы об обратной функции для оператора* A *справедливы условия доказанной теоремы.*

Рассмотрим пример. В открытой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ исследуется однородная задача Дирихле для уравнения

$$-\Delta x + |x|^\rho x = y, \tag{4}$$

где $\rho > 0$. Положим $X = H_0^1 \cap L_{\rho+2}$, $Y = X'$. Для любого $y \in Y$ уравнение имеет единственное решение $x = x(y)$ из X [4]. Нетрудно установить следующее утверждение:

Лемма 2. *При достаточно больших значениях* ρ *и* n *оператор* $x(\,\cdot\,): Y \to X$ *не дифференцируем по Гато.*

Однако с помощью приведенной выше теоремы доказывается

Лемма 3. *В любой точке $y_0 \in Y$ оператор $x(\cdot)$ имеет $(Y_0, X_0; Y_*, X_*)$-расширенную производную Гато D, характеризуемую равенством*

$$\int_\Omega \mu Dh \, d\Omega = \int_\Omega p_\mu h \, d\Omega \qquad \forall \mu \in X_0', \ h \in Y_0,$$

где

$$X_* = H_0^1, \quad X_0 = X_* \cap \{x : |x(y_0)|^{\rho/2} x \in L_2\}, \quad Y_* = X_*', \quad Y_0 = X_0',$$

а p_μ — решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p_\mu + (\rho + 1) |x(y_0)|^\rho p_\mu = \mu \, .$$

Полученные результаты могут быть использованы, например, при решении задач оптимального управления нелинейными бесконечномерными системами при отсутствии дифференцируемости функции состояния по управлению, когда использование классических методов оптимизации затруднительно [5]. Одна экстремальная задача для уравнения (4) решается в [2]. В [1] рассмотрено нелинейное параболическое уравнение, для которого справедливы утверждения, аналогичные леммам 2 и 3.

Литература

1. *Серовайский С. Я.* // Изв. вузов. Сер. матем. – 1991. – №12. – С. 55–63. **2.** *Серовайский С. Я.* // Изв. вузов. Сер. матем. – 1989. – №4. – С. 61–69. **3.** *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. – М.: ИЛ, 1959. **4.** *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. **5.** *Лионс Ж.-Л.* // Успехи матем. наук. – 1973. – №4. – С. 15–46.

Казахский государственный
университет

Поступило в редакцию
27 ноября 1991 г.
В переработанном виде
18 января 1993 г.

УДК 519.46

Непрерывные псевдохарактеры на связных локально компактных группах являются характерами

 А. И. Штерн

Напомним [1] определения псевдохарактера и квазихарактера на группе.

Определение 1. Пусть S — (полу)группа. Вещественная функция f на S называется вещественным *квазихарактером* на S, если множество $\{f(st) - f(s) - f(t) : s, t \in S\}$ ограничено. Вещественный квазихарактер f на S называется вещественным *псевдохарактером* на S, если $f(x^n) = nf(x)$ для всех $x \in S$ и всех $n \in N$.

Напомним также, что справедлива следующая