Б. И. Голубов, О p-вариации функции, *Матем. заметки*, 1969, том 5, выпуск 2, 195–204

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 2 (1969), 195—204

УДК 517.5

О p-ВАРИАЦИИ ФУНКЦИИ

Б. И. Голубов

Получена формула для вычисления p-вариации функции класса V_q $(1 \leqslant q < p < \infty)$ и показано, что эта формула теряет силу при $1 < q = p < \infty$, в отличие от случая $q = p = 1$. Библ. 10 назв.

Для 2π-периодических функций ограниченной вариации Н. Винер [1] доказал следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)-f(x)\right|^2dx\right)^{1/2}=$$
$$=\left(\sum\nolimits_k|f(x_k+0)-f(x_k-0)|^2\right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $\{x_k\}$ $(0 \leqslant x_k < 2\pi)$ — последовательность всех точек разрыва функции $f(x)$ на периоде. Аналогичное равенство он доказал также для функций, имеющих ограниченную вариацию на всей оси (см. [2], стр. 187 и 179).

В настоящей заметке получено обобщение формулы (1) на функции ограниченной p-вариации в смысле Винера [1]. Из полученного результата, в частности, следует, что формула (1) справедлива и для функций, имеющих ограниченную p-вариацию при $1 < p < 2$, но теряет силу при $p \geqslant 2$.

Сформулируем определение функции ограниченной p-вариации. Говорят, что 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет ограниченную p-вариацию $V_p(f)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или принадлежит классу V_p, если

$$V_p(f)=\lim_{\delta\to+0}\sup_{a,|\Pi_a|\leqslant\delta}\left\{\sum\nolimits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^p\right\}^{1/p}<\infty, \quad (2)$$

где $\Pi_a = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi + a\}$ — произвольное разбиение периода, а

$$|\Pi_a| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

В силу неравенства Иенсена справедливы включения

$$V_p \subset V_q \qquad (1 \leqslant p < q < \infty), \tag{3}$$

причем V_1 — обычный класс функций ограниченной вариации и включения (3) строгие. Отметим также, что

$$\mathrm{Lip}\, 1/p \subset V_p \qquad (1 \leqslant p < \infty), \tag{4}$$

где $\mathrm{Lip}\,\alpha$ — класс функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α.

Как показал Винер [1], правая часть формулы (1) равна квадратической вариации $V_2(f)$ функции $f(x)$, если $f \in V_1$ и в каждой точке x выполнено равенство

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]. \tag{5}$$

Это же верно при условии (5), если $f \in V_p$ $(1 \leqslant p < 2)$ (отметим, что у функций класса $V_p (1 \leqslant p < \infty)$ могут быть лишь разрывы первого рода [1]). Можно было бы ожидать, что и в случае $f \in V_2$ формула (1) останется справедливой, если ее правую часть заменить на квадратическую вариацию $V_2(f)$. Это предположение может показаться тем более вероятным, что в случае первой вариации, т. е. для класса V_1, В. А. Матвеев [3] доказал равенство

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx = V_1(f) \tag{6}$$

для всякой функции класса V_1, удовлетворяющей условию (5) и $f(0) = f(+0)$. При этом предел в левой части равенства (6) существует для всякой функции класса V_1 без каких-либо ограничений. Однако из наших результатов следует, что предел в левой части формулы (1) не обязан существовать для функций из класса V_2. Следовательно, квадратическую вариацию $V_2(f)$ функции можно вычислять по формуле (1) лишь в случае $f \in V_p$ $(1 \leqslant p < 2)$.

Сформулируем более точно полученный результат.

ТЕОРЕМА 1. а) *Если $f \in V_p$, то при $1 \leqslant p < q < \infty$ справедливо равенство*

$$\lim_{h \to +0} \left(\frac{1}{h} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^q dx\right)^{1/q} =$$
$$= \left(\sum\nolimits_k |f(x_k+0) - f(x_k-0)|^q\right)^{1/q}, \qquad (7)$$

где $\{x_k\}$ $(0 \leqslant x_k < 2\pi)$ — последовательность всех точек разрыва функции $f(x)$ на периоде.

б) *При $1 \leqslant p = q < \infty$ утверждение п.* а) *теряет силу в следующем смысле. Если $p = q = 1$, то можно указать функцию $f \in V_1$, для которой равенство* (7) *нарушается (хотя предел существует для любых $f \in V_1$). Если же $1 < p = q < \infty$, то найдется функция $f \in V_p$ (более того, $f \in \mathrm{Lip}\, 1/p$), для которой предел в левой части* (7) *не существует.*

Отметим, что для функций $f \in V_p$ и удовлетворяющих условию (5) правая часть формулы (7) равна $V_q(f)$ при $1 \leqslant p < q < \infty$ (см. [4], § 12), т. е. представляет собой q-вариацию функции $f(x)$.

Следствие 1. *При $p = 1$, $q = 2$ из п.* а) *теоремы* 1 *получается результат Винера* (1), *который на основании равенства Парсеваля можно записать также в виде*

$$\lim_{n \to \infty} \left\{2n \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 \frac{k\pi}{n}\right\}^{1/2} =$$
$$= \left(\sum\nolimits_k |f(x_k+0) - f(x_k-0)|^2\right)^{1/2},$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Следствие 2 (см. [5], теорема 2). *Справедливо равенство* *)

$$V_p \,\mathrm{lip}\,(1/q,\ q) = CV_p \qquad (1 \leqslant p < q < \infty).$$

Здесь C — класс непрерывных функций, а $\mathrm{lip}\,(\alpha, q)$ — класс функций, интегральный модуль непрерывности которых

$$\omega_q(\delta,\ f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left(\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^q dx\right)^{1/q} \qquad (8)$$

*) Через AB обозначается пересечение классов A и B периодических функций.

удовлетворяет условию $\omega_q(\delta, f) = o(\delta^\alpha)$ при $\delta \to +0$. Считается также, что для $f \in V_p$ выполнено условие (5).

Следствие 3. *Если $f \in V_p$, то при $1 \leqslant p < q < \infty$ справедливо равенство*

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{\omega_q(\delta, f)}{\delta^{1/q}} = \left\{\sum_k |f(x_k+0) - f(x_k-0)|^q\right\}^{1/q}. \quad (9)$$

При $1 \leqslant p = q < \infty$ утверждение следствия теряет силу.

Утверждения следствий 1 и 2 вытекают непосредственно из теоремы 1. Для доказательства следствия 3 понадобятся некоторые рассуждения, которые будут проведены после доказательства теоремы 1.

Обозначим через $V_p(-\infty, +\infty)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — класс функций, имеющих ограниченную p-вариацию на всей оси, т. е. $f \in V_p(-\infty, +\infty)$, если

$$V_p(f; -\infty, +\infty) \equiv \sup_{-\infty < a < b < +\infty} V_p(f; [a, b]) < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $f \in V_p(-\infty, +\infty)$, то при $1 \leqslant p < q < \infty$ справедливо равенство*

$$\lim_{h \to +0} \left(\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^q \, dx\right)^{1/q} = \left(\sum_k |f(x_k+0) - f(x_k-0)|^q\right)^{1/q},$$

где $\{x_k\}$ — последовательность всех точек разрыва функций $f(x)$.

Если $f \in L^2(-\infty, +\infty)$, то, положив *)

$$F(x) = \underset{a \to +\infty}{\mathrm{L.\,i.\,m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(t) e^{ixt} dt$$

и воспользовавшись равенством Планшереля, получим

Следствие 4. *Если $f \in L^2 V_p(-\infty, +\infty)$ $(1 \leqslant p < 2)$, то*

$$\lim_{h \to +0} \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2 \sin^2 hu \, du = \sum_k |f(x_k+0) - f(x_k-0)|^2.$$

---

*) Знак L.i.m обозначает предел по норме пространства $L^2(-\infty, +\infty)$.

В случае $p = 1$ это есть фактически теорема Винера (см. [2], стр. 187), а для $f \in LV_1(-\infty, +\infty) \subset L^2V_1(-\infty, +\infty)$ она была передоказана С. М. Лозинским (см. [6], теорема 3).

Из теоремы 2 вытекают также следствия, подобные следствиям 2 и 3 из теоремы 1, но на их формулировках мы останавливаться не будем.

Для доказательства сформулированных утверждений нам понадобится определение модулей непрерывности дробного порядка, которые встречаются (без какого-либо наименования) еще у Винера [1]. Положим

$$\omega_{1-1/p}(\delta, f) = \sup_{a,\ |\Pi_a| \leqslant \delta} \left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right\}^{1/p},$$

где $|\Pi_a| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1})$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = a + 2\pi$. Это обозначение предложено А. П. Терехиным [7]. Легко видеть, что на основании (2)

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_{1-1/p}(\delta, f) = V_p(f) \qquad (1 \leqslant p < \infty). \tag{10}$$

Величина $\omega_{1-1/p}(\delta, f)$ называется *модулем непрерывности функции* $f(x)$ *порядка* $1 - 1/p$. Для нее имеет место следующее неравенство (см. [8], стр. 260 *) и [7], п. 2.5 **)):

$$\omega_p(\delta, f) \leqslant \delta^{1/p} \omega_{1-1/p}(\delta, f) \qquad (1 \leqslant p < \infty), \tag{11}$$

где $\omega_p(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности (8).

Доказательство теоремы 1. а) Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим

$$f(x) - \varphi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x), \tag{12}$$

где $\varphi_\varepsilon(x)$ — ступенчатая 2π-периодическая функция такая, что функция $\psi_\varepsilon(x)$ имеет лишь скачки, не превосходящие ε. Далее, пусть

$$I_h^{(q)}(f) = \left(\frac{1}{h}\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^q\, dx\right)^{1/q} \qquad (h > 0). \tag{13}$$

---

*) Для непериодического случая.

**) Для периодического случая.

Тогда на основании неравенства Минковского и неравенства (11) имеем при $1 \leqslant p < q < \infty$

$$
\begin{aligned}
| I_h^{(q)}(f) - I_h^{(q)}(\varphi_\varepsilon) | \leqslant I_h^{(q)}(\psi_\varepsilon) = \\
= \left\{ \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} | \psi_\varepsilon(x+h) - \psi_\varepsilon(x) |^p \, | \psi_\varepsilon(x+h) - \psi_\varepsilon(x) |^{q-p} dx \right\}^{1/q} \leqslant \\
\leqslant \{\omega_p(h, \psi_\varepsilon)\}^{p/q} \{\omega(h, \psi_\varepsilon)\}^{1-p/q} h^{-1/q} \leqslant \\
\leqslant \{\omega(h, \psi_\varepsilon)\}^{1-p/q} \{\omega_{1-1/p}(h, \psi_\varepsilon)\}^{p/q}, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

где $\omega(h, \psi_\varepsilon)$ — модуль непрерывности функции $\psi_\varepsilon(x)$, т. е. $\omega(h, \psi_\varepsilon) = \sup\limits_x \sup\limits_{|\delta| \leqslant h} | \psi_\varepsilon(x+\delta) - \psi_\varepsilon(x) |$. Но так как скачки функции $\psi_\varepsilon(x)$ не превосходят ε, то существует $h_0 = h_0(\varepsilon)$ такое, что $\omega(h, \psi_\varepsilon) < 2\varepsilon$ при $0 < h < h_0$. Далее, поскольку

$$V_p(\psi_\varepsilon) \leqslant V_p(f) + V_p(\varphi_\varepsilon) \leqslant 2V_p(f) \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

то на основании (10) можно взять h_0 столь малым, чтобы, кроме того, выполнялось неравенство $\omega_{1-1/p}(h, \psi_\varepsilon) \leqslant 3V_p(f)$ при $0 < h < h_0$. После этого из неравенств (14) имеем

$$| I_h^{(q)}(f) - I_h^{(q)}(\varphi_\varepsilon) | \leqslant (2\varepsilon)^{1-p/q} [3V_p(f)]^{p/q} \quad (0 < h < h_0). \qquad (15)$$

Так как число точек разрыва у ступенчатой функции $\varphi_\varepsilon(x)$ на периоде конечно, то при достаточно малых $h > 0$ функция $\varphi_\varepsilon(x+h) - \varphi_\varepsilon(x)$ равна нулю вне сегмента $[x_k - h, x_k]$, где x_k — любая точка разрыва функции $\varphi_\varepsilon(x)$, а на интервале $(x_k - h, x_k)$ она равна скачку функции $\varphi_\varepsilon(x)$ в точке x_k. Поэтому можно считать $h_0 > 0$ столь малым, чтобы, кроме того, было справедливо равенство

$$I_h^{(q)}(\varphi_\varepsilon) = \left\{ \sum_{\sigma_k \geqslant \varepsilon} | f(x_k+0) - f(x_k-0) |^q \right\}^{1/q} \quad (0 < h < h_0), \qquad (16)$$

где $\sigma_k = | f(x_k+0) - f(x_k-0) |$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (13), (15) и (16) следует равенство (7), т. е. утверждение п. а) теоремы 1.

б) Покажем теперь, что при $1 \leqslant p = q < \infty$ равенство (7) нарушается. Пусть сначала $p = q = 1$. Тогда справедлива формула Матвеева (6), если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (5). Поэтому, если функция $f \in V_1$ непрерывна и $f(x) \not\equiv \text{const}$, то равенство (7) при $p = q = 1$ несправедливо.

Пусть теперь $1 < p < \infty$. В силу (4) достаточно построить функцию $f_p \in \operatorname{Lip} 1/p$, для которой предел в левой части равенства (7) не существует при $q = p$. В работе А. И. Рубинштейна [9] строились функции $f \in \operatorname{Lip} \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, для которых отношение $h^{-\alpha} \mid f(x+h) - f(x) \mid$ не имеет предела при $h \to +0$ для почти всех точек x. Мы воспользуемся его идеей для интегральной метрики. Пусть $0 < \beta < \alpha < \infty$. Положим

$$f_p(x) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{a^{k/p}} \cos a^k x, \tag{17}$$

где $a > 1$, $\alpha_{2n} = d$, $\alpha_{2n-1} = \beta$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $f_p(x)$ есть «почти» функция Вейерштрасса (см., например, [10], стр. 82), и поэтому $f_p \in \operatorname{Lip} 1/p$ $(1 < p < \infty)$. Покажем, что для любого $p \in (1, \infty)$ можно выбрать a столь большим, что $I_h^{(p)}(f_p)$ (см. (13)) не имеет предела при $h \to +0$.

В самом деле,

$$f(x) - f(x+h) = 2\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{a^{k/p}} \sin a^k \frac{h}{2} \sin a^k \left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Поэтому *)

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+h)\|_{L^p} \geqslant \frac{2\alpha_N}{a^{N/p}} \left| \sin a^N \frac{h}{2} \right| \cdot \left\| \sin a^N \left(x + \frac{h}{2}\right) \right\|_{L^p} - \\ - 2 \sum\nolimits_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha}{a^{k/p}} \mid \sin a^k h \mid - 2\alpha \sum\nolimits_{k=N+1}^{\infty} a^{-k/p} \equiv \\ \equiv L_N^1(h) - L_N^2(h) - L_N^3. \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично

$$\|f(x) - f(x+h)\|_{L^p} \leqslant L_N^1(h) + L_N^2(h) + L_N^3. \tag{19}$$

---

*) $\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^p dx\right)^{1/p}$

Положим $h_N = \pi a^{-N}$ и оценим $L_N^1(h_N)$, $L_N^2(h_N)$ и L_N^3:

$$L_N^1(h_N) = 2\alpha_N \pi^{-1/p} h_N^{1/p} \|\sin x\|_{L^p},$$

$$L_N^2(h_N) \leqslant 2\alpha\pi^{1-1/p} a^{1/p-1} h_N^{1/p} \sum_{k=0}^{\infty} a^{k\,(1/p-1)},$$

$$L_N^3 = 2\alpha\pi^{-1/p} a^{-1/p} \left(1 - a^{-1/p}\right) h_N^{1/p}.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $(2+\varepsilon)(2-\varepsilon)^{-1} < \alpha/\beta$, и a столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$L_N^2(h_N) + L_N^3 < \varepsilon L_N^1(h_N) \qquad (N = 1, 2, \ldots).$$

Тогда из (18) и (19) получим

$$(2-\varepsilon)\,\alpha_N \pi^{-1/p} \|\sin x\|_{L^p} \leqslant I_{h_N}^{(p)}(f_p) \leqslant (2+\varepsilon)\,\alpha_N \pi^{-1/p} \|\sin x\|_{L^p}. \tag{20}$$

Но при четных N левая часть неравенств (20) равна $\alpha_\varepsilon \equiv (2-\varepsilon)\alpha\pi^{-1/p}\|\sin x\|_{L^p}$, а при нечетных N правая часть этих неравенств равна $\beta_\varepsilon \equiv (2+\varepsilon)\beta\pi^{-1/p}\|\sin x\|_{L^p}$. Поэтому в силу неравенства $\alpha_\varepsilon > \beta_\varepsilon$ из (20) следует, что предел $\lim\limits_{h\to+0} I_h^{(p)}(f_p)$ не существует. Теорема 1 доказана.

Обоснуем теперь справедливость следствия 3. Для этого заметим, что из равенства (8) и п. а) теоремы 1 следует, что

$$\varliminf_{\delta\to+0} \delta^{-1/q}\omega_q(\delta, f) \geqslant \left(\sum\nolimits_k |f(x_k+0) - f(x_k-0)|^q\right)^{1/q}, \tag{21}$$

если $f \in V_p$ и $1 \leqslant p < q < \infty$. С другой стороны, из (10) и (11) имеем

$$\varlimsup_{\delta\to+0} \delta^{-1/q}\omega_q(\delta, f) \leqslant V_q(f). \tag{22}$$

Но так как $f \in V_p$ и $1 \leqslant p < q < \infty$, то при условии (5) правые части неравенств (21) и (22) равны (см. [4], § 12) следовательно, справедливо равенство (9).

Итак, равенство (9) доказано при условии (5). Но левая часть этого неравенства не зависит от значений, принимаемых функцией в точках разрыва, следовательно, оно справедливо и без условия (5). Таким образом, положительная часть утверждений следствия 3 доказана.

Пусть теперь $1 \leqslant p = q < \infty$. Рассмотрим сначала случай $p = q = 1$. В этом случае из равенства Матвеева (6) (при условии (5)) и неравенства Юнга (11) следует, что предел левой части равенства (9) существует и равен $V_1(f)$. Следовательно, если функция $f \in V_1$ непрерывна и $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то в этом случае равенство (9) не имеет места при $p = q = 1$.

Наконец, рассмотрим случай $1 < p = q < \infty$. Из рассмотренного выше примера следует, что для функции (17) верхний предел $\overline{\lim\limits_{\delta \to +0}} \delta^{-1/p} \omega_p(\delta, f_p) > 0$, а так как эта функция непрерывна, то, следовательно, равенство (9) для нее не имеет места при $q = p$. Итак, справедливость следствия 3 установлена.

В связи с теоремой 1 сделаем несколько замечаний.

З а м е ч а н и е 1. Обозначим через $\{x_k\}$ $(0 \leqslant x_k < 2\pi)$ последовательность всех точек разрыва первого рода функции $f(x) \in L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Тогда

$$\underline{\lim_{h \to +0}} \left(\frac{1}{h} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum\nolimits_k |f(x_k + 0) - f(x_k - 0)|^p \right)^{1/p}. \quad (23)$$

Это неравенство легко доказывается примерно так же, как и равенство (16) для ступенчатой функции. Таким образом, равенство (7) теоремы 1 при $q = p$ заменяется неравенством (23). Отметим также, что из (23) следует неравенство

$$\underline{\lim_{h \to +0}} h^{-1/p} \omega_p(h, f) \geqslant \left(\sum\nolimits_k |f(x_k + 0) - f(x_k - 0)|^p \right)^{1/p}.$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что p-вариацию $V_p(f)$ $(1 < p < \infty)$ функции $f \in V_p$ можно вычислить по формуле

$$\lim_{h \to +0} \left(\frac{1}{h} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = V_p(f) \quad (24)$$

не только для функций класса $W_p \equiv \bigcup\limits_{1 \leqslant q < p} V_q$ (теорема 1), но и для более широкого класса W_p^* [4], который определяется как класс таких функций $f \in V_p$, для которых

$$V_p(f) = \left(\sum_k |f(x_k+0) - f(x_k-0)|^p\right)^{1/p},$$

где $\{x_k\}$ $(0 \leqslant x_k < 2\pi)$ — последовательность всех точек разрыва функции $f(x)$. Класс W_p^* совпадает с замыканием класса ступенчатых функций по норме

$$\|f\|_{V_p} = |f(0)| + \sup_{a, \Pi_a} \left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right\}^{1/p},$$

где $\Pi_a = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi + a\}$ (см. [4], § 12).

Равенство (24) для класса W_p^* $(1 < p < \infty)$ вытекает из (23), (10) и из неравенства Юнга (11).

Доказательство теоремы 2 мы приводить не будем ввиду его полной аналогии с доказательством теоремы 1.

Автор благодарит П. Л. Ульянова за ряд замечаний по поводу этой статьи.

Московский физико-
технический институт

Поступило
20.III.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W i e n e r N., The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, Massachusetts J. Math., 3 (1924), 72—94.

[2] В и н е р Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М., 1963.

[3] М а т в е е в В. А., О вариации функции и о коэффициентах Фурье по системам Хаара и Шаудера, Изв. АН СССР. Сер. матем., 30, № 6 (1966), 1397—1419.

[4] L o v e E. R., Y o u n g L. C., On fractional integration by parts, Proc. Lond. Math. Soc., (2), 44, № 1 (1938), 1—35.

[5] Г о л у б о в Б. И., О непрерывных функциях ограниченной p-вариации, Матем. заметки, 1, № 3 (1967), 305—312.

[6] Л о з и н с к и й С. М., Об одной теореме N. Wiener'a, Докл. АН СССР, 53, № 8 (1946), 691—694.

[7] Т е р е х и н А. П., Приближение функций ограниченной p-вариации, Изв. высш. учебн. завед. (математика), 2 (45), (1965), 171—187.

[8] Y o u n g L. C., An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration, Acta Math., 67 (1936), 251—282.

[9] Р у б и н ш т е й н А. И., Об ω-лакунарных рядах и о функциях классов H^ω, Матем. сб., 65, № 2 (1964), 239—271.

[10] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, т. I, М., 1965,