

УДК 519.3:62-50

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ПО ПАРАМЕТРУ

В. Ф. ДЕМЬЯНОВ, А. Б. ПЕВНЫЙ

(Ленинград)

Экстремальное значение параметрической задачи математического программирования рассматривается как функция от параметра. Для этой функции изучаются производные различных порядков по направлениям.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \max_{y \in \Omega(x)} f(x, y),$$

где $\Omega(x)$ — замкнутые множества из E_y , зависящие от параметра $x \in E_x$; E_x, E_y — конечномерные евклидовы пространства. Нас интересует первая производная по направлению $\partial\varphi(x_0)/\partial g$. Такая задача рассматривалась в [1-10]. Если $\partial\varphi(x_0)/\partial g$ существует и конечна, то предел

$$(0.1) \quad \frac{\partial^2\varphi(x_0)}{\partial g^2} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2}{t^2} \left[\varphi(x_0 + tg) - \varphi(x_0) - \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g} t \right]$$

будем называть второй производной по направлению. Если предел (0.1) существует и конечен, то

$$\varphi(x_0 + tg) = \varphi(x_0) + \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi(x_0)}{\partial g^2} t^2 + o(t^2).$$

Задача о существовании и нахождении второй производной затрагивалась в [6-8]. Аналогично определяются производные более высокого порядка.

В дальнейшем будем предполагать, что точечно-множественное отображение Ω непрерывно при $x=x_0$ (см. [11]), множества $\Omega(x_0 + tg)$ содержатся в некотором ограниченном множестве D при $0 \leq t < t_1$, а функция $f(x, y)$ непрерывна. Эти условия обеспечивают непрерывность функции $\varphi(x_0 + tg)$ при $t=+0$.

§ 1. Первая производная по направлению

1. Зафиксируем точку x_0 и направление g . Пусть $y \in \Omega(x_0)$. Как и в [6-7], введем множество

$$\gamma(y) = \{v \mid \exists t_0 > 0: y + tv \in \Omega(x_0 + tg) \text{ при } 0 \leq t < t_0\}.$$

Замыкание $\gamma(y)$ обозначим $\Gamma(y)$ и назовем множеством допустимых направлений. В общем случае $\Gamma(y)$ не является конусом и может оказаться пустым.

О п р е д е л е н и е [6-7]. Будем говорить, что отображение Ω допускает аппроксимацию первого порядка в точке $\bar{y} \in \Omega(x_0)$, если для любой последовательности $\{y_k\}$ такой, что

$$(1.1) \quad y_k \in \Omega(x_0 + t_k g), \quad t_k \rightarrow +0, \quad y_k \rightarrow \bar{y},$$

справедливо представление

$$(1.2) \quad y_k = \bar{y} + t_k v_k + o(t_k),$$

где $v_k \in \Gamma(\bar{y})$, $t_k v_k \rightarrow 0$.

Введем множество

$$R(x_0) = \{y \in \Omega(x_0) \mid \varphi(x_0) = f(x_0, y)\}.$$

В [7] доказана следующая

Т е о р е м а 1. Пусть отображение Ω допускает аппроксимацию первого порядка в каждой точке $\bar{y} \in R(x_0)$, функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема и для любой последовательности $\{y_k\}$ вида (1.1), (1.2), где $\bar{y} \in R(x_0)$, справедливо соотношение

$$(1.3) \quad f(x_0 + t_k g, y_k) - f(x_0, \bar{y}) \leq t_k [(f_x(x_0, \bar{y}), g) + (f_y(x_0, \bar{y}), v_k)] + o(t_k).$$

Тогда существует $\partial\varphi(x_0)/\partial g$ и справедлива формула

$$(1.4) \quad \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g} = \max_{y \in R(x_0)} \sup_{v \in \Gamma(y)} [(f_x(x_0, y), g) + (f_y(x_0, y), v)],$$

причем максимум по $y \in R(x_0)$ достигается.

З а м е ч а н и я. 1. Условие (1.3) выполнено, например, если функция $f(x_0, y)$ вогнута по y в окрестности каждой точки $\bar{y} \in R(x_0)$.

2. Формула, аналогичная (1.4), получена также в [1] в предположении, что множества $\Omega(x)$ заданы выпуклыми неравенствами, а $f(x, y)$ вогнута по y при каждом x .

2. Пусть теперь множества $\Omega(x)$ имеют вид

$$\Omega(x) = M \cap \{y \mid h_i(x, y) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m\},$$

где M — выпуклое замкнутое множество, не зависящее от x , а функции h_i непрерывно дифференцируемы.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Для каждой точки $\bar{y} \in R(x_0)$, для которой $Q(\bar{y}) = \{i \mid h_i(x_0, \bar{y}) = 0\} \neq \emptyset$, существует v (зависящее от \bar{y}) такое, что

$$(1.5) \quad v \in K_M(\bar{y}), \quad (h_{iy}(x_0, \bar{y}), v) > 0 \quad \forall i \in Q(\bar{y}),$$

где $K_M(\bar{y})$ — конус допустимых направлений для M в точке \bar{y} . Существование такого v равносильно условию

$$K_M^*(\bar{y}) \cap \text{co}\{h_{iy}(x_0, \bar{y}) \mid i \in Q(\bar{y})\} = \emptyset,$$

т. е. тому, что точка \bar{y} не является стационарной точкой на множестве M функции

$$h(y) = \max_{i=1,2,\dots,m} h_i(x_0, y).$$

Здесь $K_M^*(\bar{y})$ — конус, сопряженный конусу $K_M(\bar{y})$.

При этом предположении нетрудно доказать следующее утверждение, аналогичное лемме 1 из [7].

Лемма 1. Для любого $\bar{y} \in R(x_0)$ множество $\Gamma(\bar{y})$ не пусто и имеет вид

$$\Gamma(\bar{y}) = K_M(\bar{y}) \cap \{v \mid (h_{ix}(x_0, \bar{y}), g) + (h_{iy}(x_0, \bar{y}), v) \leq 0, \quad i \in Q(\bar{y})\}.$$

Предположение 2. Для любого $\bar{y} \in R(x_0)$ и для любой последовательности (1.1) справедливо соотношение

$$h_i(x_0, y_k) - h_i(x_0, \bar{y}) \geq (h_{iy}(x_0, \bar{y}), y_k - \bar{y})$$

для $i \in Q(\bar{y})$ и для достаточно больших k .

Это условие выполнено, например, если функции $h_i(x_0, y)$, $i \in Q(\bar{y})$, выпуклы по y в окрестности точки \bar{y} .

Лемма 2. Если выполнены предположения 1 и 2, то отображение Ω допускает аппроксимацию первого порядка в каждой точке $\bar{y} \in R(x_0)$.

Доказательство. Пусть $\bar{y} \in R(x_0)$ и выполнено (1.1). Представим y_k в виде $y_k = \bar{y} + t_k v_k'$. Ясно, что $v_k' \in K_M(\bar{y})$. Для $i \in Q(\bar{y})$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &\geq h_i(x_0 + t_k g, y_k) = h_i(x_0 + t_k g, y_k) - h_i(x_0, y_k) + \\ &+ h_i(x_0, y_k) - h_i(x_0, \bar{y}) \geq t_k (h_{ix}(x_0, \bar{y}), g) + o(t_k) + t_k (h_{iy}(x_0, \bar{y}), v_k'). \end{aligned}$$

Отсюда

$$(h_{ix}(x_0, \bar{y}), g) + (h_{iy}(x_0, \bar{y}), v_k') \leq \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

В силу (1.5), существует v_0 такое, что

$$v_0 \in K_M(\bar{y}), \quad (h_{iy}(x_0, \bar{y}), v_0) < -1, \quad i \in Q(\bar{y}).$$

Положим теперь $v_k = v_k' + |\varepsilon_k| v_0$. Тогда (1.2) будет выполнено, причем $v_k \in \Gamma(\bar{y})$.

Теорема 2. Если выполнены предположения 1 и 2, функция f непрерывно дифференцируема и для любой последовательности вида (1.1), (1.2), где $\bar{y} \in R(x_0)$, выполнено соотношение (1.3), то существует $\partial\varphi(x_0)/\partial g$ и справедлива формула

$$\frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g} = \max_{y \in R(x_0)} \min_{\lambda \in \Lambda(y)} \left(f_x(x_0, y) - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_{ix}(x_0, y), g \right),$$

где $\Lambda(y)$ — множество множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \Lambda(y) = \left\{ \lambda \mid -f_y(x_0, y) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_{iy}(x_0, y) \in K_M^*(y), \lambda_i \geq \right. \\ \left. \geq 0, \lambda_i h_i(x_0, y) = 0, i = 1, 2, \dots, m \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку выполнены предположения теоремы 1, то справедливо (1.4). Нахождение

$$(1.6) \quad \sup_{v \in \Gamma(\bar{y})} (f_y(x_0, \bar{y}), v),$$

где $\Gamma(\bar{y})$ описано в лемме 1, есть задача линейного программирования. Двойственная к ней задача заключается в нахождении

$$(1.7) \quad \inf_{\lambda \in \Lambda(\bar{y})} \left[- \sum_{i=1}^m \lambda_i (h_{ix}(x_0, \bar{y}), g) \right]$$

(см., например, [2], стр. 9–11). Множество $\Lambda(\bar{y})$ не пусто для $\bar{y} \in R(x_0)$. Действительно, в силу необходимого условия максимума, для $\bar{y} \in R(x_0)$ найдутся числа λ_0, λ_i , не все равные нулю, такие, что

$$(1.8) \quad -\lambda_0 f_y(x_0, \bar{y}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_{iy}(x_0, \bar{y}) \in K_M^*(\bar{y}),$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i h_i(x_0, \bar{y}) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

(см. [12], стр. 67–70). Если $\lambda_0 = 0$, то, в силу (1.5),

$$v \in K_M(\bar{y}), \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i h_{iy}(x_0, \bar{y}), v \right) < 0,$$

что противоречит (1.8) с $\lambda_0 = 0$. Поэтому $\lambda_0 > 0$, можно считать $\lambda_0 = 1$ и, значит, $\Lambda(\bar{y}) \neq \emptyset$. Условие (1.5) означает, что задача (1.6) удовлетворяет условию Слейтера. Поэтому величины (1.6) и (1.7) равны, конечны, причем инфимум (1.7) достигается (см. [2], стр. 27). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Все результаты п.п. 1 и 2 почти дословно переносятся на бесконечномерный случай.

3. Пусть выпуклое множество $X \subset E_x$. Найдем направления наискорейшего спуска функции $\varphi(x)$ на X в точке $x_0 \in X$ и получим необходимое условие минимума $\varphi(x)$ на X .

Пусть $K(x_0)$ — конус допустимых направлений для X в точке x_0 , $K_1(x_0) = \{g \in \overline{K(x_0)} \mid \|g\| \leq 1\}$, где черта обозначает замыкание, а $\|g\|$ — евклидова норма.

Предположим, что для любого $g \in K_1(x_0)$ выполнены условия теоремы 2. Тогда для всех $g \in K_1(x_0)$

$$\frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} = \max_{y \in R(x_0)} \min_{\lambda \in \Lambda(y)} (L_x(x_0, y, \lambda), g),$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x, y).$$

Будем рассматривать функции $\lambda(\cdot)$, заданные на $R(x_0)$ и такие, что $\lambda(y) \in \Lambda(y)$ для всех $y \in R(x_0)$. Нетрудно показать, что

$$(1.9) \quad \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} = \min_{\lambda(\cdot)} \sup_{y \in R(x_0)} (L_x(x_0, y, \lambda(y)), g).$$

Минимум по функциям $\lambda(\cdot)$ достигается, так как минимум по $\lambda \in \Lambda(y)$ достигается для любого $y \in R(x_0)$. С каждой функцией $\lambda(\cdot)$ свяжем множество

$$P = \overline{\text{co}} \{L_x(x_0, y, \lambda(y)) \mid y \in R(x_0)\}.$$

Можно показать, что, в силу (1.5), множества $\Lambda(y)$, $y \in R(x_0)$, ограничены в совокупности. Поэтому множества P являются выпуклыми компактными и также ограничены в совокупности.

Теперь (1.9) можно записать в виде

$$(1.10) \quad \partial \varphi(x_0) / \partial g = \min_P \max_{v \in P} (v, g).$$

Отсюда следует, что $\partial \varphi(x_0) / \partial g$ как функция от g удовлетворяет условию Липшица. Поэтому $\min_{g \in K_1(x_0)} \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g}$ достигается, т. е. существуют направления наискорейшего спуска. В силу (1.10),

$$\min_{g \in K_1(x_0)} \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} = \min_{g \in K_1(x_0)} \min_P \max_{v \in P} (v, g) = \min_P \min_{g \in K_1(x_0)} \max_{v \in P} (v, g).$$

Введем расстояние $\rho(P)$ от сопряженного конуса $K^*(x_0)$ до P :

$$\rho(P) = \min_{w \in K^*(x_0)} \min_{v \in P} \|w - v\| = \|w(P) - v(P)\|,$$

где $w(P) \in K^*(x_0)$, $v(P) \in P$. Тогда

$$\min_{g \in K_1(x_0)} \max_{v \in P} (v, g) = -\rho(P),$$

и если $\rho(P) > 0$, то минимум достигается в единственной точке

$$g(P) = \frac{w(P) - v(P)}{\|w(P) - v(P)\|}$$

(см. [13], стр. 152).

Из предыдущих рассуждений легко следует

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$(1.11) \quad \min_{g \in K_1(x_0)} \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} = - \max_P \rho(P).$$

Если максимум положителен, то множество

$$\{g(P_0) \mid \rho(P_0) = \max_P \rho(P)\}$$

является множеством направлений наискорейшего спуска функции $\varphi(x)$ на X в точке x_0 .

Итак, для нахождения направлений наискорейшего спуска нужно искать компакты P_0 , наиболее удаленные от $K^*(x_0)$, и затем строить векторы $g(P_0)$.

Если функция $\varphi(x)$ в точке x_0 достигает минимума на X , то левая и правая части (1.11) равны нулю. Отсюда сразу следует необходимое условие минимума

$$(1.12) \quad K^*(x_0) \cap P \neq \emptyset \text{ для всех } P.$$

4. Пусть теперь множество X не выпукло. Используем для получения необходимого условия минимума конус направлений, допустимых в широком смысле (см. [14]).

Пусть $x_0 \in X$. Вектор g назовем допустимым в широком смысле направлением, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число t_ε и вектор g_ε такие, что

$$(1.13) \quad x_0 + t_\varepsilon g_\varepsilon \in X, \quad 0 < t_\varepsilon < \varepsilon, \quad \|g_\varepsilon - g\| < \varepsilon.$$

Конус направлений, допустимых в широком смысле, обозначим $M(x_0)$. Отметим, что $M(x_0)$ — замкнутый конус.

Конус $M(x_0)$ можно представить в виде объединения конечного или бесконечного числа выпуклых замкнутых конусов $M_\alpha(x_0)$:

$$M(x_0) = \bigcup_{\alpha} M_\alpha(x_0).$$

Например, в качестве $M_\alpha(x_0)$ можно взять лучи, из которых состоит конус $M(x_0)$. Но, разумеется, наиболее интересно минимальное представление для $M(x_0)$. Справедливо следующее

У т в е р ж д е н и е. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0 . Тогда для того, чтобы $\varphi(x)$ достигала минимума на X в точке x_0 , необходимо выполнение равенства

$$(1.14) \quad \inf_{g \in M_\alpha(x_0)} \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} = 0 \quad \text{для всех } \alpha.$$

Условие (1.14) равносильно условию

$$(1.15) \quad M_\alpha^*(x_0) \cap P \neq \emptyset \text{ для всех } P \text{ и } \alpha.$$

Действительно, если (1.14) не выполнено, то для некоторого α найдется $g \in M_\alpha(x_0)$, для которого $\partial \varphi(x_0) / \partial g < 0$. Для этого g найдутся t_ε и g_ε , удовлетворяющие (1.13). Тогда, в силу условия Липшица, при малых ε

$$\varphi(x_0 + t_\varepsilon g_\varepsilon) \leq \varphi(x_0 + t_\varepsilon g) + Lt_\varepsilon \|g_\varepsilon - g\| < \varphi(x_0).$$

Полученное противоречие доказывает (1.14). Равносильность (1.14) и (1.15) устанавливается, как и выше, с использованием (1.10).

З а м е ч а н и е. Идея выделения из конуса всех возможных в широком смысле направлений выпуклых конусов $M_\alpha(x_0)$ вполне аналогична идее В. Г. Болтянского [15], рассмотревшего несколько «шатров», являющихся выпуклыми конусами. С помощью «шатров» в [15] получено необходимое условие минимума гладкой функции на множестве довольно общего вида.

§ 2. Вторые производные по направлению

Пусть $y \in \Omega(x_0)$, $v \in \Gamma(y)$. Введем множество

$$\gamma_2(y, v) = \{w \mid \exists t_c > 0: y + tv + t^2 w \in \Omega(x_0 + tg) \quad \forall t \in [0, t_0]\}.$$

Замыкание $\gamma_2(y, v)$ обозначим $\Gamma_2(y, v)$ и назовем множеством допустимых направлений второго порядка. В случае, когда $\Omega(x)$ не зависят от x , аналогичное множество было рассмотрено в [16].

О п р е д е л е н и е [6]. Будем говорить, что отображение Ω допускает аппроксимацию второго порядка в точке $\bar{y} \in \Omega(x_0)$, если для любой последовательности $\{y_k\}$ такой, что

$$(2.1) \quad y_k \in \Omega(x_0 + t_k g), \quad t_k \rightarrow +0, \quad y_k = \bar{y} + t_k \bar{v} + o(t_k), \quad \bar{v} \in \Gamma(\bar{y}),$$

справедливо представление

$$(2.2) \quad y_k = \bar{y} + t_k \bar{v} + t_k^2 w_k + o(t_k^2), \quad w_k \in \Gamma_2(\bar{y}, \bar{v}), \quad t_k w_k \rightarrow 0.$$

Пусть теперь множества $\Omega(x)$ заданы неравенствами

$$\Omega(x) = \{y \mid h_i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

где функции $h_i(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

П р е д п о л о ж е н и е 3. Для каждой точки $\bar{v} \in R(x_0)$, для которой $Q(\bar{y}) \neq \emptyset$, существует $v = v(\bar{y})$ такое, что

$$(2.3) \quad (h_{iy}(x_0, \bar{y}), v) < 0, \quad i \in Q(\bar{y}) = \{i \mid h_i(x_0, y) = 0\}.$$

При этом предположении справедливы следующие две простые леммы.

Л е м м а 3. Для любых $\bar{y} \in R(x_0)$, $v \in \Gamma(\bar{y})$ множество $\Gamma_2(\bar{y}, v)$ не пусто и имеет вид

$$\Gamma_2(\bar{y}, v) = \{w \mid 2(h_{iy}, w) + (h_{iyy}v, v) + 2(h_{ixy}v, g) + (h_{ixx}g, g) \leq 0, \quad i \in Q_2(\bar{y}, v)\},$$

где

$$Q_2(\bar{y}, v) = \{i \in Q(\bar{y}) \mid (h_{iy}, v) + (h_{ix}, g) = 0\},$$

а все производные берутся в точке $[x_0, \bar{y}]$.

Л е м м а 4. Отображение Ω допускает аппроксимацию второго порядка в каждой точке $\bar{y} \in R(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы аналогично доказательству леммы 2.

Если существует $\partial\varphi(x_0)/\partial g$ и справедливо равенство (1.4), то через T обозначим множество пар $[y, v]$, на которых достигается экстремум в (1.4):

$$T = \left\{ [y, v] \mid \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial\sigma} = (f_x(x_0, y), g) + (f_y(x_0, y), v), \quad y \in R(x_0), \quad v \in \Gamma(y) \right\}.$$

Предположение 4. Для любого $\bar{y} \in R(x_0)$ функции $h_i(x_0 + tg, y)$, $i \in Q(\bar{y})$, выпуклы по y в некоторой окрестности точки \bar{y} при любом фиксированном $0 \leq t < t_1$.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения 3 и 4, функция f дважды непрерывно дифференцируема и для любого $\bar{y} \in R(x_0)$ матрица $f_{yy}(x, \bar{y})$ отрицательно определена. Тогда существует вторая производная $\partial^2 \varphi(x_0) / \partial g^2$, причем

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x_0)}{\partial g^2} = \max_{[y, v] \in T} \max_{w \in \Gamma_2(y, v)} [2(f_y, w) + (f_{yy}v, v) + 2(f_{xy}v, g) + (f_{xx}g, g)],$$

где все производные берутся в точке $[x_0, y]$.

Доказательство. Введем обозначение

$$\Phi(y, v, w) = 2(f_y, w) + (f_{yy}v, v) + 2(f_{xy}v, g) + (f_{xx}g, g).$$

Заметим, что множество T не пусто: максимум по $y \in R(x_0)$ в (1.4) достигается по теореме 1. Нахождение супремума по $v \in \Gamma(y)$ есть задача вида (3.1), (3.2). Поэтому максимум по $v \in \Gamma(y)$ достигается при любом $y \in R(x_0)$.

Фиксируем $[y, v] \in T$ и $w \in \gamma_2(y, v)$. Тогда $y + tv + t^2w \in \Omega(x_0 + tg)$ при малых t . Поэтому

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi(x_0 + tg) &\geq f(x_0 + tg, y + tv + t^2w) = \varphi(x_0) + t \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} + \\ &+ \frac{1}{2} t^2 \Phi(y, v, w) + o(t^2), \\ \underline{A} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2}{t^2} \left[\varphi(x_0 + tg) - \varphi(x_0) - t \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} \right] \geq \Phi(y, v, w). \end{aligned}$$

В силу произвольности $[y, v] \in T$ и $w \in \gamma_2(x, v)$, получим, что $\underline{A} \geq A$, где A обозначает правую часть (2.4).

Докажем, что $\bar{A} \leq A$. Выберем $\{y_k\}$ и $\{t_k\}$ так, чтобы

$$\frac{2}{t^2} \left[\varphi(x_0 + t_k g) - \varphi(x_0) - t_k \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} \right] \rightarrow \bar{A}, \quad y_k \in R(x_0 + t_k g), \quad y_k \rightarrow \bar{y}.$$

Ясно, что $\bar{y} \in R(x_0)$. Представим y_k в виде $y_k = \bar{y} + t_k v_k'$, $t_k v_k' \rightarrow 0$. Для $i \in Q(\bar{y})$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &\geq h_i(x_0 + t_k g, y_k) - h_i(x_0, \bar{y}) = t_k [(h_{ix}(x_0, \bar{y}), g) + (h_{iy}(x_0, \bar{y}), v_k')] + \\ &+ \frac{1}{2} t_k^2 [(h_{iyy} v_k', v_k') + 2(h_{ixy} v_k', g) + (h_{ixx} g, g)], \end{aligned}$$

где вторые производные берутся в точке

$$(2.6) \quad \theta_{ik} = [x_0 + \tau_{ik} g, \bar{y} + \tau_{ik} v_k'], \quad 0 < \tau_{ik} < t_k.$$

В силу предположения 4, $(h_{iyy}v_k', v_k') \geq 0$. Отсюда

$$(2.7) \quad \begin{aligned} (h_{ix}, g) + (h_{iy}, v_k') &\leq \varepsilon_k = t_k \max_i \left[-(h_{ix}v_k', g) - \frac{1}{2}(h_{ixx}g, g) \right], \\ |\varepsilon_k| &\leq t_k [C_1 \|v_k'\| + C_2]. \end{aligned}$$

В силу (2.3), существует v_0 такое, что

$$(h_{iy}(x_0, \bar{y}), v_0) \leq -1, \quad i \in Q(\bar{y}).$$

Положим $v_k = v_k' + |\varepsilon_k| v_0$. По лемме 1, $v_k \in \Gamma(\bar{y})$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + t_k g) = f(x_0 + t_k g, y_k) &= f(x_0, \bar{y}) + t_k [(f_x, g) + (f_y, v_k)] - \\ &- t_k |\varepsilon_k| (f_y, v_0) + 1/2 t_k^2 [(f_{yy}v_k', v_k') + 2(f_{xy}v_k', g) + (f_{xx}g, g)], \end{aligned}$$

где вторые производные берутся в некоторой точке вида (2.6). В силу (1.4), $(f_x, g) + (f_y, v_k) \leq \partial\varphi(x_0)/\partial g$. При больших k

$$(2.8) \quad (f_{yy}v_k', v_k') \leq -\frac{m}{2} \|v_k'\|^2, \quad m > 0.$$

Учитывая (2.7) и (2.8), получим

$$(2.9) \quad \varphi(x_0 + t_k g) \leq \varphi(x_0) + t_k \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g} + \frac{1}{2} t_k^2 \left[-\frac{m}{2} \|v_k'\|^2 + C_3 \|v_k'\| + C_4 \right].$$

Сравнивая (2.5) и (2.9), получаем

$$\Phi(y, v, w) + o(1) \leq -\frac{m}{2} \|v_k'\|^2 + C_3 \|v_k'\| + C_4.$$

Отсюда последовательность $\{v_k'\}$ ограничена.

Можно считать, что $v_k' \rightarrow \bar{v}$. Поэтому также $v_k \rightarrow \bar{v}$. Но $v_k \in \Gamma(\bar{y})$, поэтому и $\bar{v} \in \Gamma(\bar{y})$. Далее имеем

$$\varphi(x_0 + t_k g) = \varphi(x_0) + t_k \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g} + o(t_k),$$

$$\varphi(x_0 + t_k g) = f(x_0 + t_k g, y_k) = \varphi(x_0) + t_k [(f_y, v_k) + (f_x, g)] + o(t_k).$$

Отсюда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [(f_x, g) + (f_y, v_k)] = (f_x, g) + (f_y, \bar{y}) = \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g},$$

т. е. $[\bar{y}, \bar{v}] \in T$. Представим теперь y_k в виде $y_k = \bar{y} + t_k \bar{v} + o(t_k)$. По лемме 4, справедливо представление

$$y_k = \bar{y} + t_k \bar{v} + t_k^2 w_k + o(t_k^2), \quad w_k \in \Gamma_2(\bar{y}, \bar{v}), \quad t_k w_k \rightarrow 0.$$

Поэтому имеем

$$\varphi(x_0 + t_k g) = \varphi(x_0) + t_k \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g} + 1/2 t_k^2 \Phi(\bar{y}, \bar{v}, w_k) + o(t_k^2),$$

$$\bar{A} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{2}{t} \left[\varphi(x_0 + t_k g) - \varphi(x_0) - t_k \frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial g} \right] \leq \sup_{w \in \Gamma_2(\bar{y}, \bar{v})} \Phi(\bar{y}, \bar{v}, w).$$

Теорема доказана.

§ 3. Использование множителей Лагранжа

Пусть выполнены предположения теоремы 4. Тогда существует $\partial\varphi(x_0)/\partial g$ и справедлива формула (1.4). Фиксируем $y \in R(x_0)$ и рассмотрим задачу линейного программирования

$$(3.1) \quad \max_{v \in \Gamma(y)} (f_y(x_0, y), v),$$

$$(3.2) \quad \Gamma(y) = \{v \mid (h_{ix}(x_0, y), g) + (h_{iy}(x_0, y), v) \leq 0, i \in Q(y)\}$$

и двойственную к ней задачу

$$(3.3) \quad \min_{\lambda \in \Lambda(y)} \left[- \sum_{i=1}^m \lambda_i (h_{ix}(x_0, y), g) \right],$$

$$(3.4) \quad \Lambda(y) = \left\{ \lambda \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i h_{iy}(x_0, y) = f_y(x_0, y), \lambda_i \geq 0, \lambda_i h_{ix}(x_0, y) = 0 \right\}.$$

Множества $\Gamma(y)$ и $\Lambda(y)$ не пусты, поэтому обе задачи имеют решения.

Пусть $V_2(y)$ — множество решений задачи (3.1), (3.2), $\Lambda_2(y)$ — множество решений задачи (3.3), (3.4), $R_2(x_0)$ — множество тех $y \in R(x_0)$, на которых достигается максимум в (1.4).

По теореме 1, $R_2(x_0)$ не пусто. Фигурирующее в (2.4) множество есть $T = \{[y, v] \mid y \in R_2(x_0), v \in V_2(y)\}$. Заметим также, что для $\Lambda_2(y)$ справедливо представление

$$(3.5) \quad \Lambda_2(y) = \left\{ \lambda \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i h_{iy}(x_0, y) = f_y(x_0, y), \lambda_i \geq 0, \lambda_i h_{ix}(x_0, y) = 0, \right.$$

$$\left. \lambda_i [(h_{iy}(x_0, y), v) + (h_{ix}(x_0, y), g)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \right\},$$

где v — любое решение задачи (3.1), (3.2), т. е. $v \in V_2(y)$.

Теорема 5. В условиях теоремы 4 справедливы равенства

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x_0)}{\partial g^2} = \max_{y \in R_2(x_0)} \left[\max_{v \in V_2(y)} \min_{\lambda \in \Lambda_2(y)} d^2 L(y, v, \lambda) \right] = \\ = \max_{y \in R_2(x_0)} \left[\min_{\lambda \in \Lambda_2(y)} \max_{v \in V_2(y)} d^2 L(y, v, \lambda) \right],$$

где

$$d^2 L(y, v, \lambda) = (L_{yy}(x_0, y, \lambda) v, v) + 2(L_{xy}(x_0, y, \lambda) v, g) + \\ + (L_{xx}(x_0, y, \lambda) g, g),$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x, y).$$

Доказательство. Рассмотрим формулу (2.4). Нахождение $\sup (f_y, w)$ по $w \in \Gamma_2(y, v)$ есть задача линейного программирования, в силу лем-

мы 3. Множество допустимых решений двойственной задачи есть множество (3.5). Поэтому при $[y, v] \in T$

$$\max_{w \in \Gamma_2(y, v)} 2(f_y, w) = \min_{\lambda \in \Lambda_2(y)} \left[- \sum_{i=1}^m \lambda_i d^2 h_i \right].$$

Первое равенство в (3.6) доказано. Покажем, что максимум и минимум в квадратных скобках можно поменять местами. Пусть $y \in R(x_0)$. Множество $\Lambda(y)$, а следовательно, и более узкое множество $\Lambda_2(y)$ ограничены. Действительно, в силу (2.3), существует v такое, что

$$(h_{iy}(x_0, y), v) \geq 1, \quad i \in Q(y).$$

Отсюда для любого $\lambda \in \Lambda(y)$ имеем

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i (h_{iy}(x_0, y), v) = (f_y(x_0, y), v).$$

Итак, $\Lambda_2(y)$ — выпуклый компакт, функция $d^2L(y, v, \lambda)$ вогнута по v и линейна по λ . Поэтому

$$\sup_{v \in V_2(y)} \inf_{\lambda \in \Lambda_2(y)} d^2L(y, v, \lambda) = \inf_{\lambda \in \Lambda_2(y)} \sup_{v \in V_2(y)} d^2L(y, v, \lambda)$$

(см. [2], стр. 13). Супремумы по $v \in V_2(y)$ достигаются в силу отрицательной определенности $f_{yy}(x_0, y)$, а инфимумы по $\lambda \in \Lambda_2(y)$ — в силу компактности $\Lambda_2(y)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если $\Omega(x)$ не зависит от x :

$$\Omega(x) \equiv \Omega = \{y | h_i(y) \leq 0, i=1, 2, \dots, m\},$$

то множества R_2 , V_2 и Λ_2 в теореме 5 задаются так:

$$R_2(x_0) = \left\{ y \in R(x_0) \mid \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial g} = (f_x(x_0, y), g) \right\},$$

$$V_2(y) = \{v | (h_{iy}(y), v) \leq 0, i \in Q(y), (f_y(x_0, y), v) = 0\},$$

$$\Lambda_2(y) = \Lambda(\bar{y}) = \left\{ \lambda \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i h_{iy}(y) = f_y(x_0, y), \lambda_i \geq 0, \lambda_i h_i(y) = 0 \right\}$$

при любом $y \in R(x_0)$. Если к тому же все функции $h_i(y)$ линейны, то d^2L заменяется на d^2f , а минимум по $\lambda \in \Lambda_2(y)$ исчезает. Такая формула была получена в [8].

§ 4. Производные высших порядков

Пусть $n \geq 2$ и уже получено разложение

$$\varphi(x_0 + tg) = \varphi(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^i \varphi(x_0)}{\partial g^i} \frac{t^i}{i!} + o(t^{n-1}),$$

где $\partial^i \varphi(x_0)/\partial g^i$ — некоторые числа. Тогда предел

$$\frac{\partial^n \varphi(x_0)}{\partial g^n} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{n!}{t^n} \left[\varphi(x_0 + tg) - \varphi(x_0) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^i \varphi(x_0)}{\partial g^i} \frac{t^i}{i!} \right]$$

если он существует, называется n -й производной по направлению.

Введем множество $\Gamma_n(y, v_1, \dots, v_{n-1})$ допустимых направлений n -го порядка. Пусть множества $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ уже определены. Фиксируем $y \in \Omega(x_0)$, $v_1 \in \Gamma_1(y), \dots, v_{n-1} \in \Gamma_{n-1}(y, v_1, \dots, v_{n-2})$ и введем множество

$$\begin{aligned} \gamma_n(y, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \\ &= \left\{ v_n \mid \exists t_0 > 0: y + \sum_{i=1}^n t^i v_i \in \Omega(x_0 + tg) \text{ при } 0 \leq t < t_0 \right\}. \end{aligned}$$

Замыкание $\gamma_n(y, v_1, \dots, v_{n-1})$ обозначим через $\Gamma_n(y, v_1, \dots, v_{n-1})$ и назовем множеством допустимых направлений n -го порядка.

Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема n раз. Тогда для любого $v=1, 2, \dots, n$ справедливо разложение

$$(4.1) \quad f\left(x_0 + tg, y + \sum_{i=1}^v t^i v_i\right) = f(x_0, y) + \sum_{i=1}^v A_i(y, v_1, \dots, v_i) \frac{t^i}{i!} + o(t^v),$$

где A_i не зависят от v и выражаются через производные функции f порядка не более i .

Предположим также, что для любой последовательности $\{y_s\}$, $y_s \in R(x_0 + t_s g)$, $t_s \rightarrow +0$, существует подпоследовательность $\{y_k\}$, представимая в виде

$$y_k = \bar{y} + \sum_{i=1}^{n-1} t_k^i \bar{v}_i + t_k^n v_{nk} + o(t_k^n),$$

где $\bar{y} \in \Omega(x_0)$, $\bar{v}_1 \in \Gamma_1(\bar{y}), \dots, \bar{v}_{n-1} \in \Gamma_{n-1}(\bar{y}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-2})$, $v_{nk} \in \Gamma_n(\bar{y}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1})$, $t_k v_{nk} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Заметим, что доказательство теоремы 4, по существу, состояло в проверке этого условия для $n=2$.

Теорема 6. Если $n \geq 2$, существует первая производная по направлению и справедлива формула (4.4), то при сделанных предположениях существует производная любого порядка $v=2, 3, \dots, n$ и справедливы равенства

$$(4.2) \quad \frac{\partial^v \varphi(x_0)}{\partial g^v} = \sup_{\{y, v_1, \dots, v_{v-1}\} \in T_{v-1}} \sup_{v_v \in \Gamma_v(y, v_1, \dots, v_{v-1})} A_v(y, v_1, \dots, v_v),$$

где $A_v(y, v_1, \dots, v_v)$ — из разложения (4.1), T_{v-1} — множество наборов $[y, v_1, \dots, v_{v-1}]$, на которых достигается супремум в формуле для $(v-1)$ -й производной, причем T_{v-1} не пусто для $v=1, 2, \dots, n$.

Доказательство равенств (4.2) осуществляется последовательно: сначала для $\nu=2$, затем для $\nu=3$ и т. д. Схема доказательства такая же, как и в теореме 4.

Поступила в редакцию 15.05.1973

Цитированная литература

1. А. И. Сотсков. Необходимые условия минимума для одного типа негладких задач. Докл. АН СССР, 1969, 189, № 2, 261–264.
2. Е. Г. Гольштейн. Выпуклое программирование. Элементы теории. М., «Наука», 1970.
3. В. Ф. Демьянов. О задаче минимакса при связанных ограничениях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, 12, № 3, 799–805.
4. В. В. Береснев. Необходимые условия экстремума в выпуклой задаче максимина на связанных множествах. Кибернетика, 1972, № 2, 87–91.
5. Б. Н. Пшеничный. Выпуклые многозначные отображения и им сопряженные. Кибернетика, 1972, № 3, 94–102.
6. В. Ф. Демьянов, А. Б. Певный. Первые и вторые маргинальные значения задач математического программирования. Докл. АН СССР, 1972, 207, № 2, 277–280.
7. В. Ф. Демьянов, А. Б. Певный. Вычисление первых и вторых маргинальных значений в задачах математического программирования. В сб. «Оптимизация», № 5 (22). Новосибирск, «Наука», СО, 1972, 63–72.
8. В. Ф. Демьянов. К задаче о минимаксе. Докл. АН СССР, 1969, 187, № 2, 225–228.
9. W. W. Hogan. Directional derivatives for extremal value functions. Western Manag. Sci. Inst. Working paper № 177, Los Angeles, 1971.
10. Ю. Н. Тюрин. Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования. Экономика и матем. методы, 1965, 1, № 3, 391–410.
11. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., «Мир», 1964.
12. Б. Н. Пшеничный. Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969.
13. В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. Введение в минимакс. М., «Наука», 1972.
14. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л., Изд-во ЛГУ, 1968.
15. В. Г. Болтянский. Оптимальное управление дискретными системами. М., «Наука», 1973.
16. А. Я. Дубовицкий, А. А. Миллюгин. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, 5, № 3, 395–453.