О. Б. Скаскив, О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию,
Матем. заметки, 1985, том 37, выпуск 1, 41–47

https://www.mathnet.ru/mzm5278

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 37, № 1 (1985)

О ПОВЕДЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДА ДИРИХЛЕ, ЗАДАЮЩЕГО ЦЕЛУЮ ФУНКЦИЮ

О. Б. Скаскив

§ 1. **Введение.** Пусть F — целая функция, представленная абсолютно сходящимся в $\mathbf{C}$ рядом Дирихле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \qquad z=x+iy, \tag{1.1}$$

где $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, $M(x, F) = \sup\{|F(x+iy)|: y \in \mathbf{R}\}$, а $\mu(x, F)$ и $\nu = \nu(x, F)$ — соответственно, максимальный член и центральный индекс ряда (1). Пусть $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$, а V — класс положительных неубывающих непрерывных на $[0, \infty)$ функций v, таких, что

$$\int_0^\infty dt/v(t) < \infty,$$

$$t^2/v(t) \uparrow \infty \ (t \to \infty) \quad \text{и} \quad t^2/(v(t)\ln t) \to \infty \quad (t \to \infty).$$

М. Н. Шеремета [1] показал, что если $v \in V$ и $v(t) \ln n(t) = o(t^2)$ $(t \to \infty)$, то

$$\ln M(x, F) \sim \ln \mu(x, F) \tag{1.2}$$

при $x \to +\infty$ вне некоторого множества конечной меры. При этом он высказал гипотезу, что условие $v(t) \ln n(t) = o(t^2)$ $(t \to \infty)$ можно заменить более слабым условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < \infty, \tag{1.3}$$

которое, возможно, является также и необходимым условием в том смысле, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} = \infty, \tag{1.4}$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty \qquad (n \to \infty),$$

то существует функция вида (1), для которой соотношение (2) при $x \to +\infty$ вне некоторого множества конечной меры не выполняется.

Настоящая статья посвящена доказательству этой гипотезы.

ТЕОРЕМА. *Пусть дана функция вида* (1). *Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение* (2) *при* $x \to +\infty$ *вне некоторого множества конечной меры, достаточно и в указанном смысле необходимо, чтобы выполнялось условие* (3).

§ 2. Вспомогательные утверждения. Можем считать, что $a_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$, ибо прибавление к функции (1) экспоненциального многочлена не отразится на соотношении (2). Тогда $\ln n(t) = 0$ при $0 \leqslant t < \lambda_1$ и, как указано в [1], условие (3) эквивалентно условию

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t < \infty. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$N_1(t) = \int_0^t \frac{\ln n(u)}{u} \, \mathrm{d}u. \tag{2.2}$$

Ясно, что $N_1(t) = 0$ при $0 \leqslant t < \lambda_1$. Функции $\ln n(t)$ и $N_1(t)$ имеют одинаковую категорию роста [2, с. 63] и поэтому соотношение (2.1) выполняется в том и только том случае, если

$$\int_0^{\infty} \frac{N_1(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t < \infty. \tag{2.3}$$

Через E в дальнейшем будем обозначать класс измеримых на $[0, \infty)$ множеств конечной меры, т. е. множеств E_0, таких, что $\int_{E_0 \cap [0, \infty)} dx < \infty$.

Будем называть $x \in [0, \infty)$ нормальным значением, если существует $\nu \in \mathbf{N}$, такое, что для всех $n \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\frac{|a_n|}{|a_\nu|} \exp\{(\lambda_n - \lambda_\nu) x\} < \frac{\alpha_n}{\alpha_\nu} \exp\{s_\nu (\lambda_n - \lambda_\nu)\}, \tag{2.4}$$

где (α_n) и (s_n) — некоторые последовательности из $\mathbf{R}$ такие, что $\alpha_n > 0$ $(n \geqslant 0)$,

$$-\infty < s_0 < \varkappa_0 < s_1 < \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{n-1} < s_n < \varkappa_n < \ldots, \qquad (2.5)$$

и $\varkappa_n = (\ln \alpha_n - \ln \alpha_{n+1})/(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$. Значение x, не являющееся нормальным, называется исключительным. М. Н. Шеремета [3] показал, что если $\ln n(t) = O(t)$ $(t \to \infty)$, а последовательность (s_n) ограничена, то множество исключительных значений содержится в E. Используя это утверждение, докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Пусть показатели ряда* (1) *удовлетворяют условию* (3). *Тогда для любого* $A > 0$, *всех* $n \geqslant 0$ *и всех* $x \geqslant 0$ *вне некоторого исключительного множества из* E *выполняются неравенства*

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leqslant \mu(x, F) \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} N_1(At)\,dt\right\} \qquad (2.6)$$

и

$$\ln \mu(x, F) \geqslant \int_0^{\lambda_\nu} \frac{N_1(At)}{t}\,dt, \qquad \nu = \nu(x, F). \qquad (2.7)$$

Доказательство. Положим

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{N_1(At)}{t^2}\,dt,$$

$$\alpha_n = \exp\left\{-\int_0^{\lambda_n} \alpha(t)\,dt\right\}, \quad s_n = \alpha(\lambda_n). \qquad (2.8)$$

Легко показать, что при таком выборе α_n и s_n неравенства (2.5) выполняются. В силу (2.3), последовательность s_n ограничена, а из (2.1) вытекает, что $\ln n(t) = o(t)$ $(t \to \infty)$. Поэтому согласно приведенному выше результату М. Н. Шереметы множество исключительных значений содержится в E. Вне этого множества, ввиду (2.4), имеем

$$\frac{|a_n| e^{x\lambda_n}}{\mu(x, F)} \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_\nu} \exp\{s_\nu(\lambda_n - \lambda_\nu)\} =$$
$$= \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_\nu))\,dt\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} (\lambda_n - t)\,\alpha'(t)\,dt\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} N_1(At)\,dt\right\},$$

т. е. (2.6) доказано. Неравенство (2.7) вытекает из (2.4) и (2.8) при $n=0$.

§ 3. Доказательство достаточности. Положим

$$\sigma_\eta(x)=\sum\nolimits_{\lambda_n\geqslant\eta\lambda_\nu}|a_n|\exp\{x\lambda_n\},$$
$$\nu=\nu(x, F),\quad \eta>1. \tag{3.1}$$

Учитывая, что

$$\ln n=\ln n(\lambda_{n-1})\leqslant$$
$$\leqslant(\ln q)^{-1}\int_{\lambda_n}^{q\lambda_n}\frac{\ln n(t)}{t}dt\leqslant\frac{N_1(q\lambda_n)}{\ln q},\qquad q>1,$$

из (2.6) имеем

$$\frac{\sigma_\eta(x)}{\mu(x, F)}\leqslant\sum\nolimits_{\lambda_n\geqslant\eta\lambda_\nu}\frac{1}{n\lambda_n}\exp\left\{\ln n+\ln\lambda_n-\right.$$
$$\left.-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}\frac{\lambda_n-t}{t^2}N_1(At)\,dt\right\}\leqslant$$
$$\leqslant K\max\{\exp\{\psi(y)\}\colon\ y\geqslant\eta\lambda_\nu\}, \tag{3.2}$$

где

$$\psi(y)=N_1(qy)/\ln q+\ln y-\int_{\lambda_\nu}^{y}\frac{y-t}{t^2}N_1(At)\,dt,$$
$$K=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(n\lambda_n)^{-1}.$$

Для достаточно больших y имеем

$$\psi'(y)=\frac{\ln n(qy)+\ln q}{y\ln q}-\int_{\lambda_\nu}^{y}\frac{N_1(At)}{t^2}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\ln n(qy)}{y\ln q}-\int_{\lambda_\nu}^{y}\frac{N_1(At)}{t^2}\,dt\leqslant\frac{2N_1(q^2y)}{y\ln^2 q}-$$
$$-\int_{\lambda_\nu}^{y}\frac{N_1(At)}{t^2}\,dt\leqslant\frac{2N_1(q^2y)}{y\ln^2 q}-(\delta-1)\frac{N_1(Ay/\delta)}{y}, \tag{3.3}$$

где $1<\delta<\eta$. Положим $\delta=(1+\eta)/2$, $q=\exp\{2/\sqrt{\eta-1}\}$. Тогда $\delta-1=2/\ln^2 q$ и, если выбрать $A>q^2\delta$, то из (3.3) получим, что $\psi'(y)<0$, т. е. $\psi(y)$ убывающая функция на $[\eta\lambda_\nu, \infty)$ при всех достаточно больших λ_ν. Поэтому из (3.2) вытекает, что при $x\to+\infty$

вне некоторого множества из E выполняется неравенство

$$\frac{\sigma_\eta(x)}{\mu(x, F)} \leqslant K \exp\{\psi(\eta\lambda_\nu)\} <$$
$$< K \exp\left\{-N_1(A\lambda_\nu)(\eta - 1 - \ln\eta) + \frac{N_1(q\eta\lambda_\nu)}{\ln q} + \ln\eta\lambda_\nu\right\}.$$

Выбирая $\eta > \eta_0$, где $\eta_0 > 1$ — решение уравнения

$$\eta - 1 - \ln\eta = \sqrt{\eta - 1}/2,$$

а также $A > \max\{q^2\delta, q\eta\}$, получаем, что

$$\sigma_\eta(x)/\mu(x, F) \leqslant K \exp\{-P(\eta) N_1(A\lambda_\nu) + \ln\eta\lambda_\nu\}$$

при x вне некоторого множества из E, где

$$P(\eta) = \eta - 1 - \ln\eta - \sqrt{\eta - 1}/2.$$

Таким образом, для всех x вне некоторого множества из E имеем

$$M(x, F) \leqslant$$
$$\leqslant \mu(x, F)[n(\eta\lambda_\nu) + K \exp\{-P(\eta) N_1(A\lambda_\nu) + \ln\eta\lambda_\nu\}]. \tag{3.4}$$

Так как в силу (2.2) $N_1(t)$ — выпуклая функция от $\ln t$, то $\ln t/N_1(t) \to 0$ $(t \to \infty)$, и из (3.4) для всех x вне некоторого множества из E получаем, что $M(x, F) \leqslant \leqslant 2n(\eta\lambda_\nu)\mu(x, F)$. Так как при $A > e\eta$ в силу (2.7)

$$\ln\mu(x, F) \geqslant \int_{\lambda_\nu/e}^{\lambda_\nu} \frac{N_1(At)}{t}\,dt \geqslant N_1\left(\frac{A}{e}\lambda_\nu\right) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\eta\lambda_\nu}^{A\lambda_\nu/e} \frac{\ln n(t)}{t}\,dt \geqslant \ln n(\eta\lambda_\nu)\ln(A/(e\eta)),$$

то, выбрав $A > \max\{q^2\delta, q\eta, e\eta\}$, при $x \to +\infty$ вне некоторого множества из E имеем

$$1 \leqslant \frac{\ln M(x, F)}{\ln\mu(x, F)} \leqslant 1 + (\ln(A/(e\eta)))^{-1} + o(1),$$

т. е., ввиду произвольности A, достаточность доказана.

§ 4. **Доказательство необходимости.** Можем считать, что $a_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ и $\ln n(t) = O(t)$ $(t \to \infty)$. Пусть $B = (1 + q)^{-1}$, $q > 0$

$$N(t) = \int_0^t \frac{n(t) - 1}{t}\,dt,$$

а

$$\psi_0(y) = -By\int_1^y t^{-2}\ln(N(A(t+1))/\ln(t+1))\,\mathrm{d}t.$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\psi_0(\lambda_n)+\lambda_n z}. \tag{4.1}$$

Как уже отмечалось в § 2, из (4) вытекает, что $\int_0^\infty t^{-2}\ln n(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, т. е. ввиду неравенства $N(t)+1 \geqslant n(t/\mathrm{e})$, выполняется соотношение

$$\int_1^\infty \frac{\ln(N(A(t+1))/\ln(t+1))}{t^2}\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Поэтому функция (4.1) — целая.

Точку максимума $\bar{y} = u(x)$ функции $\psi(y, x) = yx + \psi_0(y)$ при каждом фиксированном x найдем из уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -B\int_1^y \frac{\ln(N(A(t+1))/\ln(t+1))}{t^2}\,\mathrm{d}t - B\,\frac{\ln(N(A(y+1))/\ln(y+1))}{y} + x = 0.$$

Легко видеть, что $\psi(y, x) = B\ln(N(A(\bar{y}+1))/\ln(\bar{y}+1))$. Таким образом,

$$\ln\mu(x, F) \leqslant \max\{\psi(y, x):\ y \geqslant 1\} = \psi(\bar{y}, x). \tag{4.2}$$

Далее, при каждом фиксированном x

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{B[(n(A(y+1))-1)\ln(y+1) - N(A(y+1))]}{y(y+1)\ln(y+1)N(A(y+1))}.$$

Поскольку $n(t) = 1$ при $0 \leqslant t < 1$, $n(1) = 2$, то

$$N(A(y+1)) < (n(A(y+1))-1)\ln(y+1), \quad A < 1,$$

и поэтому $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} < 0$ при $y \geqslant 1$. Значит, при каждом фиксированном x $\psi(y, x)$—вогнутая функция от y на $[1, \infty)$. Отсюда получим, что при $1 \leqslant y \leqslant \bar{y}$, $x \geqslant 0$

$$\psi(y, x) \geqslant \psi(1, x) = x \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Пусть $\lambda_m = \min\{\lambda_n:\ \lambda_n > \bar{y}\}$, тогда

$$M(x, F) = F(x) \geqslant \sum_{n=1}^{m} \exp\{\psi(\lambda_n, x)\} \geqslant \int_1^{\bar{y}} \exp\{\psi(y, x)\}\,\mathrm{d}n(y).$$

Учитывая (4.3), получим

$$M(x, F) \geqslant n(\bar{y}) - 2.$$

Отсюда в силу (4.2) при $x \to +\infty$ имеем

$$\begin{aligned}\ln M(x, F) &\geqslant \ln(n(\bar{y}) - 1) + o(1) \geqslant \\ &\geqslant \ln(n(A(\bar{y}+1)) - 1) + o(1) \geqslant \\ &\geqslant \ln(N(A(\bar{y}+1))/\ln(\bar{y}+1)) + o(1) \geqslant \\ &\geqslant (1+q)\ln \mu(x, F) + o(1),\end{aligned}$$

т. е. $\ln M(x, F)/\ln \mu(x, F) \geqslant 1 + q + o(1)$, $q > 0$, при $x \to +\infty$. Завершая доказательство, отметим, что предположение, сделанное относительно считающей функции последовательности (λ_n), не уменьшает общности рассуждений. Действительно, пусть это предположение не выполняется, тогда существует такая подпоследовательность (μ_k) последовательности (λ_n), для которой выполняется $\ln n(t) = O(t)$ $(t \to \infty)$. Для этой последовательности (μ_k) указанным выше способом строим функцию

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \exp\{\mu_k z\}.$$

Тогда положим

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{\lambda_n z\}, \quad a_{n_k} = b_k,$$

а остальные коэффициенты a_n всегда можем выбрать положительными достаточно малыми так, чтобы выполнялось $\mu(x, F) = \mu(x, F_1)$. Учитывая, что при этом $M(x, F_1) \geqslant M(x, F)$, получим

$$\ln M(x, F_1) \geqslant (1 + q + o(1)) \ln \mu(x, F_1)$$

при $x \to +\infty$, что и завершает доказательство теоремы.

Дрогобычский педагогический институт

Поступило 15.07.81

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Шеремета М. Н. Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле.— Мат. сб., 1979, т. 110, № 1, с. 102—116.
[2] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.
[3] Шеремета М. Н. Метод Вимана — Валирона для рядов Дирихле.— Укр. мат. журн., 1978, т. 30, № 4, с. 488—497.