Об оценке ошибки в методе последовательных приближений

А. Д. Мышкис (Минск) **и И. Ю. Эгле** (Рига)

Чтобы общая оценка точности какого-либо приближенного метода могла быть эффективно применена в конкретных случаях, необходимо выполнение по крайней мере следующих условий:

а) Эта оценка должна выражаться только через известные величины (в том числе через те, которые становятся известными в процессе применения метода), но не включать неизвестные коэффициенты, искомые величины и т. д.

б) Оценка ошибки не должна быть чрезмерно завышенной (как это обычно бывает с оценками, имеющими асимптотический характер, или с оценками, годными в слишком широком классе случаев).

в) Она должна быть приспособлена к распространенному способу применения данного приближенного метода.

г) Она не должна быть слишком трудоемкой.

Несоблюдение любого из этих условий приводит к тому, что оценка лишь с трудом может быть или совсем не может быть применена в конкретных случаях. Этот дефект свойствен многим из оценок, приводимых в различных источниках (повидимому, наиболее свободен от этого недостатка курс Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [1], где отчетливо сформулированы некоторые из приведенных выше условий — см., например, гл. II, §§ 1 и 2). Результатом является то печальное обстоятельство, что оценка ошибки в конкретных приближенных вычислениях проводится гораздо реже того, чем это желательно. Это тем более досадно, что некоторые известные оценки можно без труда изменить так, чтобы указанные требования удовлетворялись. Мы покажем это на примере метода последовательных приближений.

Пусть задано отображение T полного метрического пространства R в себя, удовлетворяющее для некоторого постоянного K, $0 \leqslant K < 1$, условию

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant K\rho(x, y) \quad (x \in R,\ y \in R). \tag{1}$$

Хорошо известно, что последовательность приближений $x_0, x_1, \ldots$, определенных соотношениями $x_0 \in R$, $x_{n+1} = Tx_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, сходится к единственному решению $\bar{x}$ уравнения $Tx = x$. При этом оценки

$$\rho(x_n, \bar{x}) \leqslant K\rho(x_{n-1}, \bar{x}),$$

$$\rho(x_n, \bar{x}) \leqslant K^n\rho(x_0, \bar{x}) \text{ или } \rho(x_n, \bar{x}) = O(K^n)$$

не удовлетворяют условию а), а оценка

$$\rho(x_n, \bar{x}) \leqslant \frac{K^n}{1-K}\,\rho(x_0, x_1)$$

зачастую — условию б). В то же время при применении метода последовательных приближений к решению конкретных уравнений обычно проводят итерации, пока какое-либо из приближений не будет достаточно мало отличаться от предшествующего, после чего процесс обрывают и считают искомое решение приближенно равным последнему из построенных приближений. В соответствии с этим способом (см. условие в)) находится оценка

$$\rho(x_n, \bar{x}) \leqslant \frac{K}{1-K}\,\rho(x_{n-1}, x_n), \tag{2}$$

систематически применявшаяся И. Вайсингером [2], [3]* и Л. Коллатцем [4] для различных типов уравнений.

Однако в ряде случаев применять эту общую оценку нецелесообразно; так, например, обстоит дело для нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (появляющихся, в частности, при решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений), которые и будут нас главным образом здесь интересовать. В этом случае указанная оценка слишком груба; кроме того, условие Липшица (1) для оператора, рассматриваемого во всем пространстве, обычно не выполняется. Поэтому мы выведем (§ 1) оценку, приспособленную именно к решению интегральных уравнений типа Вольтерра. В некоторых случаях эту оценку можно существенно улучшить (§ 2). Метод вывода оценки § 1 является весьма общим и применим едва ли не всюду, где встречается метод последовательных приближений. Поэтому в § 3 мы приводим общую схему получения такого рода оценок. Эта схема близка методу мажорант Коши—Канторовича (см., например, [5], гл. XII), однако мы не предполагаем рассматриваемые пространства линейными, что дает возможность включить в качестве частного случая указанную выше теорему об отображениях метриче-

---

* Отметим, что Вайсингер доказывает сходимость процесса последовательных приближений в несколько более широких предположениях, именно, при $\sum_{n=1}^{\infty} |T^n| < \infty$, где $|T^n|$ — постоянная, играющая для T^n ту же роль, что K для T (см. (1)); он дает аналогичное обобщение формулы (2). Легко доказать сходимость процесса к единственному решению уравнения $Tx = x$ в еще более широких предположениях, если для некоторого $n \geqslant 1$ $|T^n|$ существует, причем $|T^n| < 1$. Действительно, пусть $\lim_{k\to\infty} T^{nk}x_0 = \bar{x}$ $(k=1, 2, \ldots)$, $T^n\bar{x} = \bar{x}$. Тогда $\rho(T\bar{x}, \bar{x}) = \rho(T^{n+1}\bar{x}, T^n\bar{x}) \leqslant |T^n|\,\rho(T\bar{x}, x)$, т. е. $T\bar{x} = \bar{x}$. Единственность следует из того, что решение уравнения $Tx = x$ удовлетворяет и уравнению $T^n x = x$. Наконец, сходимость процесса следует из того, что $\rho(T^m x_0, \bar{x}) = \rho(T^{nk}T^{m-nk}x_0, T^{nk}\bar{x}) \leqslant |T^n|^k \rho(T^{m-nk}x_0, \bar{x}) \to 0$ при $m \to \infty$, где $k = \left[\frac{m}{n}\right]$. Если дополнительно потребовать существование $|T|$, то имеет место критерий Вайсингера.

ских пространств. Было бы не трудно реализовать эту общую схему для других классов уравнений, например для нелинейных алгебраических уравнений, для нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра с несколькими аргументами (появляющимися, в частности, при решении задачи Коши для систем уравнений гиперболического типа с частными производными) и т. д., но мы не станем на этом останавливаться.

§ 1. Вывод оценки

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра

$$y(x)=\varphi(x)+\int_{x_0}^{x}F(x,s,y(s))\,ds \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+h;\ h>0), \tag{3}$$

причем предположим сначала, что функция $F(x,s,y)$ определена при $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$, $x_0\leqslant s\leqslant x_0+h$, $-\infty<y<\infty$, непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет по y условию Липшица с постоянной $K\geqslant 0$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0+h]$ (значения функций могут считаться комплексными). Для применения метода последовательных приближений возьмем в качестве $y_0(x)$ произвольную непрерывную на $[x_0, x_0+h]$ функцию и построим итерации по формуле

$$y_n(x)=\varphi(x)+\int_{x_0}^{x}F(x,s,y_{n-1}(s))\,ds \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+h;\ n=1,2,\ldots).$$

Оценку отклонения последовательных приближений друг от друга проще всего производить при помощи системы степеней $x-x_0$. Именно, если для некоторых $n=1,2,\ldots,$ $A\geqslant 0$, $p>-1$

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant A(x-x_0)^p \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+h) \tag{4}$$

(если $p<0$, то при $x=x_0$ это неравенство считается выполненным), то

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[F(x,s,y_n(s))-F(x,s,y_{n-1}(s))]\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant KA\frac{(x-x_0)^{p+1}}{p+1} \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+h).$$

Повторяя этот переход, получим, что последовательные приближения $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$, ..., а потому и (единственное) решение уравнения (3), удовлетворяют неравенству (окончательная оценка)

$$|y(x)-y_n(x)|\leqslant KA\frac{(x-x_0)^{p+1}}{p+1}\left[1+K\frac{x-x_0}{p+2}+K^2\frac{(x-x_0)^2}{(p+2)(p+3)}+\ldots\right] \tag{5}$$
$$(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h).$$

Замечания. 1. Функцию F можно считать определенной не при всех значениях y, а только при $y=y_i(s)$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ и

$$|y-y_n(s)|\leqslant KA\frac{(s-x_0)^{p+1}}{p+1}\left[1+K\frac{s-x_0}{p+2}+\ldots\right].$$

2. Если $h < p+2$, то неравенство (5) может быть заменено следующим, более грубым:

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant KA \frac{(x-x_0)^{p+1}}{p+1} \left(1 - K \frac{x-x_0}{p+2}\right)^{-1}.$$

Аналогично можно поступить, если $h < p+3$ и т. д.

3. Легко видоизменить оценку, если в правой части неравенства (4) $A(x-x_0)^p$ заменено на $\sum_{i=1}^{i_0} A_i (x-x_0)^{p_i}$.

Допустим теперь, что, как это обычно бывает для нелинейных уравнений, функция F, оставаясь непрерывной по совокупности аргументов, уже не удовлетворяет условию Липшица на бесконечном интервале изменения y, но удовлетворяет этому условию при любых фиксированных $x \in [x_0, x_0+h]$, $s \in [x_0, x_0+h]$ на любом отрезке изменения y с концами a, b, причем постоянная Липшица K зависит от x, s, a и b: $K = K(a, b; x, s)$. Тогда оценка (5) должна быть изменена (отметим, что для оценки вида (2) аналогичное изменение в некоторых конкретных примерах проведено в работе [4]). Именно, предположим, что постоянные $A \geqslant 0$, $p > -1$ и $L \geqslant 0$ подобраны так, что для некоторого $n = 1, 2, \ldots$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, $x_0 \leqslant s \leqslant x_0 + h$ имеют место неравенства

$$\begin{gathered} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant A(x-x_0)^p, \quad K(y_n(s), y_{n-1}(s); x, s) \leqslant L, \\ K\Big(y_n(s) - AL\frac{(s-x_0)^{p+1}}{p+1}\left(1 + L\frac{s-x_0}{p+2} + L^2\frac{(s-x_0)^2}{(p+2)(p+3)} + \ldots\right), \\ y_n(s) + AL\frac{(s-x_0)^{p+1}}{p+1}(1+\ldots);\quad x, s\Big) \leqslant L. \end{gathered} \tag{6}$$

Тогда последовательность $y_n(x)$, $y_{n+1}(x), \ldots$ удовлетворяет неравенству (окончательная оценка)

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant AL\frac{(x-x_0)^{p+1}}{p+1}\left(1 + L\frac{x-x_0}{p+2} + L^2\frac{(x-x_0)^2}{(p+2)(p+3)} + \ldots\right) \tag{7}$$
$$(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h)$$

и равномерно стремится к пределу, являющемуся решением (и притом единственным, удовлетворяющим неравенству (7)) уравнения (3).

Действительно, оценивая приближение $y_{n+1}(x)$, убеждаемся в том, что оно удовлетворяет неравенству (7). Поэтому, в силу неравенства (6), при оценке $y_{n+2}(x)$ можно брать L в качестве постоянной Липшица; поэтому и $y_{n+2}(x)$ удовлетворяет неравенству (7) и т. д.

И здесь можно сделать замечания, аналогичные приведенным выше. В частности, в одном из неравенств (6) или (7) или в обоих этих неравенствах можно перейти к геометрической прогрессии.

Пример. Решим задачу Коши

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{8}$$

или, что эквивалентно, нелинейное интегральное уравнение

$$y(x)=\int_0^x [s^2+y^2(s)]\,ds \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Положим $y_0(x)\equiv 0$. Тогда

$$y_1(x)=\frac{x^3}{3},\quad y_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}.$$

В данном примере, оценивая постоянную Липшица при помощи производной, получим:

$$K(a,\ b;\ x,\ s)=2\max\{|a|,\ |b|\}. \tag{9}$$

Положим $n=2$, $A=\frac{1}{63}$, $p=7$. Постоянную L надо подобрать из неравенства

$$2\left[\frac{s^3}{3}+\frac{s^7}{63}+\frac{L}{63}\frac{s^8}{8}\left(1+\frac{Ls}{9}+\frac{L^2s^2}{9\cdot 10}+\ldots\right)\right]\leqslant L \quad (0\leqslant s\leqslant 1)$$

или, что более сильно,

$$2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{63}+\frac{L}{63}\frac{1}{8}\left(1-\frac{L}{9}\right)^{-1}\right]\leqslant L.$$

Этому неравенству мы, во всяком случае, удовлетворим, взяв $L=0{,}8$. Значит, искомое решение $\bar{y}(x)$, которое будет, очевидно, единственным, удовлетворяет неравенству

$$\left|\bar{y}(x)-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}\right)\right|\leqslant\frac{0{,}8}{63}\frac{x^8}{8}\left(1+0{,}8\frac{x}{9}+0{,}8^2\frac{x^2}{9\cdot 10}+\ldots\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{0{,}8}{63}\frac{x^8}{8}\left(1-\frac{0{,}8}{9}\right)^{-1}\leqslant 0{,}0018x^8 \quad (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{10}$$

§ 2. Уточнение оценки

Здесь мы покажем, как можно в некоторых случаях существенно улучшить оценку предыдущего параграфа. Допустим, что в условиях, в которых выведена оценка (7), имеет место неравенство

$$K\left(\min\left\{y_{n-1}(s),\ y_n(s)-AL\,\frac{(s-x_0)^{p+1}}{p+1}\left(1+L\,\frac{s-x_0}{p+2}+\ldots\right)\right\},\right.$$
$$\left.\max\left\{y_{n-1}(s),\ y_n(s)+AL\,\frac{(s-x_0)^{p+1}}{p+1}\left(1+L\,\frac{s-x_0}{p+2}+\ldots\right)\right\};\ x,\ s\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i,\,j=0}^{\infty}\alpha_{ij}(x-x_0)^i(s-x_0)^j \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_0+h;\ x_0\leqslant s\leqslant x_0+h), \tag{11}$$

причем последний ряд абсолютно сходится при $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$, $x_0\leqslant s\leqslant x_0+h$.

Тогда дальнейшую оценку можно провести так:

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}K(y_n(s),\ y_{n-1}(s);\ x,\ s)\,|y_n(s)-y_{n-1}(s)|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{i,\,j=0}^{\infty} \alpha_{ij}(x-x_0)^i (s-x_0)^j \cdot A(s-x_0)^p ds = A \sum_{i,\,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \frac{(x-x_0)^{i+j+p+1}}{j+p+1} \leqslant$$
$$\leqslant A\beta_1 (x-x_0)^{p+r+1},$$

где

$$r = \min_{\alpha_{ij}\neq 0} \{i+j\}, \quad \beta_1 = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} |\alpha_{ij}| \frac{h^{i+j-r}}{j+p+1}.$$

Повторяя этот процесс, получим вообще:

$$|y_{n+d}(x) - y_{n+d-1}(x)| \leqslant A\beta_1\beta_2 \ldots \beta_d (x-x_0)^{p+dr+d},$$

где

$$\beta_d = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} |\alpha_{ij}| \frac{h^{i+j-r}}{j+p+(d-1)r+d} \quad (d = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда все последовательные приближения $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$, ... и точное решение удовлетворяют неравенству

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant A\beta_1 (x-x_0)^{p+r+1} (1 + \beta_2 (x-x_0)^{r+1} + \beta_2\beta_3 (x-x_0)^{2r+2} + \ldots) \leqslant$$
$$\leqslant A\beta_1 (1 + \beta_2 h^{r+1} + \beta_2\beta_3 h^{2r+2} + \ldots)(x-x_0)^{p+r+1}.$$

(При помощи полученной оценки можно далее уточнить неравенство (11) и т. д.) Эта оценка может быть более точной, чем (7).

Мы продемонстрируем описанный способ улучшения оценки на том же примере (8). В § 1 уже получено, что

$$y_1(s) = \frac{s^3}{3}, \quad y_2(s) = \frac{s^3}{3} + \frac{s^7}{63},$$
$$AL \frac{s^{p+1}}{p+1}\left(1 + L\frac{s}{p+2} + \ldots\right) \leqslant 0{,}0018 s^8.$$

Поэтому в соответствии с (9) и (11) выберем

$$\sum_{i,\,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^i s^j = 2\left(\frac{s^3}{3} + \frac{s^7}{63} + 0{,}0018 s^8\right)$$

или, что проще (поскольку $0 \leqslant s \leqslant 1$).

$$\sum_{i,\,j}^{\infty} \alpha_{ij} x^i s^j = 0{,}703\, s^3.$$

Значит, $r = 3$,

$$\beta_1 = \frac{0{,}703}{11}, \ldots, \beta_d = \frac{0{,}703}{7+4d}.$$

Отсюда точное решение удовлетворяет неравенству

$$\left|\bar{y}(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63}\right| \leqslant \frac{1}{63}\,\frac{0{,}703}{11}\left(1 + \frac{0{,}703}{15} + \frac{0{,}703^2}{15\cdot 19} + \ldots\right) x^{11} \leqslant 0{,}0011 x^{11}$$
$$(0 \leqslant x \leqslant 1),$$

что значительно лучше прежней оценки (10).

§ 3. Общая схема оценки

Мы рассмотрим здесь объекты, более общие, чем метрические пространства. Именно, мы будем выражать отклонения не числами, а элементами некоторой непустой полуупорядоченной абелевой полугруппы Γ. (Напомним, что так называется совокупность элементов Γ, для любой пары которых $\gamma_1 \in \Gamma, \gamma_2 \in \Gamma$ однозначно определено $\gamma_1 + \gamma_2 \in \Gamma$, причем $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$ и $(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3 = \gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3)$; кроме того, некоторые $\gamma_1 \in \Gamma$, $\gamma_2 \in \Gamma$ могут находиться в соотношении $\gamma_1 < \gamma_2$, исключающем как $\gamma_2 < \gamma_1$, так и $\gamma_2 = \gamma_1$, причем если $\gamma_1 < \gamma_2$, $\gamma_2 < \gamma_3$, то $\gamma_1 < \gamma_3$; $\leqslant$ означает: либо $<$, либо $=$.) Будем считать, что Γ имеет первый элемент ν (для которого $\nu \leqslant \gamma$ при всех $\gamma \in \Gamma$); при этом если $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$, то $\gamma_1 + \gamma_3 \leqslant \gamma_2 + \gamma_3$, если же $\gamma_4 + \gamma_5 \leqslant \gamma_6$, то $\gamma_4 \leqslant \gamma_6$.

Итак, пусть дано непустое множество R, каждой паре элементов a, b которого поставлен в соответствие элемент $\gamma = \gamma(a, b) \in \Gamma$, причем всегда

$$\gamma(a, a) = \nu, \quad \gamma(a, b) = \gamma(b, a), \quad \gamma(a, c) \leqslant \gamma(a, b) + \gamma(b, c).$$

Предположим, далее, что для некоторых последовательностей $a_1, a_2, \ldots \in R$ однозначно определен «предел» $\bar{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in R$, не зависящий от изменения, выбрасывания или добавления любого конечного числа членов последовательности и удовлетворяющий следующему условию: если для некоторых $a \in R, \gamma \in \Gamma$ будет $\gamma(a_n, a) \leqslant \gamma$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то и $\gamma(\bar{a}, a) \leqslant \gamma$.

Пусть задано отображение f пространства R в себя и ему соответствующее («мажорантное» в свете идей Коши и Канторовича) отображение f^* полугруппы Γ в себя, причем (условие мажорирования)

$$\gamma(f(a), f(b)) \leqslant f^*(\gamma(a, b)) \quad (a \in R;\ b \in R), \tag{12}$$

$$\text{если } \gamma_1 < \gamma_2, \text{ то } f^*(\gamma_1) \leqslant f^*(\gamma_2) \quad (\gamma_1 \in \Gamma;\ \gamma_2 \in \Gamma). \tag{13}$$

Будем искать неподвижную точку отображения f, т. е. решение уравнения

$$f(a) = a \quad (a \in R), \tag{14}$$

при помощи итераций. Для этого при некотором $a_0 \in R$ положим

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда легко провести оценку при $n = 1, 2, \ldots$:

$$\gamma(a_{n+1}, a_n) = \gamma(f(a_n), f(a_{n-1})) \leqslant f^*(\gamma(a_n, a_{n-1})),$$

$$\gamma(a_{n+2}, a_{n+1}) \leqslant f^*(\gamma(a_{n+1}, a_n)) \leqslant f^*\big(f^*(\gamma(a_n, a_{n-1}))\big)$$

и т. д. Отсюда, если обозначить

$$f^{*1}(\gamma) = f^*(\gamma), \quad f^{*k+1}(\gamma) = f^*(f^{*k}(\gamma)) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

то при $1 \leqslant n < m$

$$\gamma(a_n, a_m) \leqslant \gamma(a_n, a_{n+1}) + \ldots + \gamma(a_{m-1}, a_m) \leqslant \sum_{k=1}^{m-n} f^{*k}(\gamma(a_n, a_{n-1})).$$

Значит, если найдется элемент $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, для которого

$$\sum_{k=1}^{p} f^{*k}(\gamma(a_n, a_{n-1})) \leqslant \tilde{\gamma} \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

то все итерации $a_n, a_{n+1}, \ldots$ лежат в «сфере» $\gamma(a, a_n) \leqslant \tilde{\gamma}$ и если $a_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \bar{a} \in R$, то и

$$\gamma(\bar{a}, a_n) \leqslant \tilde{\gamma}. \tag{15}$$

Это и служит обобщением оценки ошибки при выполнении условия Липшица.

Для существования $\bar{a}$ достаточно, например, выполнения «критерия Вейерштрасса» в следующей ослабленной форме: если для некоторой последовательности $b_1, b_2, \ldots \in R$ и некоторых $\gamma_0 \in \Gamma$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ имеют место неравенства

$$\gamma(b_k, b_{k+1}) \leqslant f^{*k}(\gamma_0) \ (k = 1, 2, \ldots), \quad \sum_{k=1}^{p} f^{*k}(\gamma_0) \leqslant \tilde{\gamma} \ (p = 1, 2, \ldots),$$

то последовательность $\{b_n\}$ стремится к пределу. Для того чтобы $\bar{a}$ удовлетворял уравнению (14), достаточно, чтобы из $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{b}$ всегда следовало $f(b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\bar{b})$. Наконец, для единственности решения этого уравнения достаточно, чтобы из $\gamma(b_1, b_2) \leqslant f^*(\gamma(b_1, b_2))$ следовало $b_1 = b_2$.

Для получения теоремы о сжатом отображении метрического пространства в себя (см. введение) надо положить

$$\gamma(a_1, a_2) = \rho(a_1, a_2), \quad f^*(\rho) = K\rho.$$

Для получения оценки при решении интегральных уравнений типа Вольтерра (при выполнении условия Липшица) надо в качестве R взять совокупность $C[x_0, x_0 + h]$ комплексных непрерывных на $[x_0, x_0 + h]$ функций, а в качестве Γ — совокупность таких неотрицательных функций, причем положить

$$\gamma(y_1, y_2) = |y_1(x) - y_2(x)|, \quad f^*(\gamma)(x) = K\int_{x_0}^{x} \gamma(x)\,dx,$$

где K — постоянная Липшица для F (см. (3)).

Можно перенести и обобщение Вайсингера (см. сноску на стр. 492) на уравнения (14). Для этого надо рассмотреть последовательность $f_1^*, f_2^*, \ldots$ отображений Γ в себя, причем условие (12) заменить на следующее:

$$\gamma(f^k(a), f^k(b)) \leqslant f_k^*(\gamma(a, b)) \quad (a \in R,\ b \in R;\ k = 1, 2, \ldots);$$

при этом условие (13) можно отбросить. Мы не будем приводить окончательной формулировки.

Чтобы дать общую схему случая, когда условие Липшица во всем пространстве не выполняется, надо предположить, что для каждых $\tilde{a} \in R$ и $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ определено отображение $f^*_{\tilde{a}\tilde{\gamma}}$ множества Γ в себя, причем (взамен (12) и (13))

$$\gamma(f(a), f(b)) \leqslant f^*_{\tilde{a}\tilde{\gamma}}(\gamma(a, b)) \quad (\text{при } \gamma(a, \tilde{a}) \leqslant \tilde{\gamma},\ \gamma(b, \tilde{a}) \leqslant \tilde{\gamma}),$$
$$\text{если } \gamma_1 \leqslant \tilde{\gamma},\ \gamma_2 \leqslant \tilde{\gamma},\ \gamma_1 \leqslant \gamma_2, \text{ то } f^*_{\tilde{a}\tilde{\gamma}}(\gamma_1) \leqslant f^*_{\tilde{a}\tilde{\gamma}}(\gamma_2).$$

Предположим, что натуральное число n и $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ выбраны так, что

$$\gamma(a_{n+1}, a_n) \leqslant f^*_{a_n\tilde{\gamma}}(\gamma(a_n, a_{n-1})),$$
$$\sum_{k=1}^{p} f^{*k}_{a_n\tilde{\gamma}}(\gamma(a_n, a_{n-1})) \leqslant \tilde{\gamma} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Тогда, подобно предыдущему, легко проверить, что все итерации $a_n, a_{n+1}, \ldots$ лежат в сфере $\gamma(a, a_n) \leqslant \tilde{\gamma}$.

Приведем здесь только одну реализацию общих рассмотрений, являющуюся одновременно обобщением оценки начала § 1 и одним из возможных способов перенесения понятия уравнений типа Вольтерра в банахово пространство.

Пусть в банаховом пространстве Y задано семейство линейных операторов T_α, слабо непрерывно зависящих от числового параметра α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, причем $T_\alpha T_\beta = T_{\min\{\alpha, \beta\}}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1;\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ и T_1 совпадает с единичным оператором. Непрерывный оператор V в Y называется *оператором типа Вольтерра*, если $T_\alpha V \equiv T_\alpha V T_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. (Для простейшего уравнения типа Вольтерра надо положить $Y = C[x_0, x_0 + h]$,

$$(T_\alpha f)(x) = \begin{cases} f(x) & (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha h), \\ f(\alpha h) & (x_0 + \alpha h \leqslant x \leqslant x_0 + h). \end{cases})$$

В качестве полугруппы Γ возьмем совокупность непрерывных неотрицательных функций на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ с обычным сложением и естественным упорядочением ($\varphi_1 < \varphi_2$, если $\varphi_1(\alpha) \leqslant \varphi_2(\alpha)$ и $\varphi_1(\alpha) \not\equiv \varphi_2(\alpha)$). Пусть, далее, $R = Y$ с пределом, соответствующим сходимости по норме, и

$$\gamma(y_1, y_2) = \| T_\alpha y_1 - T_\alpha y_2 \| \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1;\ y_1 \in Y,\ y_2 \in Y).$$

Положим $f = V$. Тогда отображение f^* полугруппы Γ в себя должно обладать свойством (12), имеющим вид

$$\| T_\alpha V y_1 - T_\alpha V y_2 \| \leqslant f^*(\| T_\alpha y_1 - T_\alpha y_2 \|) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1;\ y_1 \in Y,\ y_2 \in Y),$$

и свойством монотонности (13):

$$\text{если } \varphi_1(\alpha) \leqslant \varphi_2(\alpha), \text{ то } f^*(\varphi_1)(\alpha) \leqslant f^*(\varphi_2)(\alpha) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1;\ \varphi_1 \in \Gamma,\ \varphi_2 \in \Gamma).$$

(В частности, для обычного интегрального уравнения типа Вольтерра надо полагать

$$f^*(\varphi)(\alpha) = K \int_0^\alpha \varphi(s)\, ds \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1),$$

где K — постоянная Липшица для F (см. (3)). Тогда окончательная оценка (15) означает в данном случае, что

$$\| T_\alpha \bar{y} - T_\alpha y_n \| \leqslant \tilde{\varphi}(\alpha) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1),$$

и для обычного интегрального уравнения типа Вольтерра переходит в оценку (5) (если выполнено (4)). Легко указать и аналогичное обобщение оценки (7).

(Поступило в редакцию 22/XI 1953 г.)

Литература

1. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М.— Л., Гостехиздат, 1949.
2. J. Weissinger, Über das Iterationsverfahren, Zeitsch. für angew. Math. und Mech., **31**: 8—10 (1951), 245—246.
3. J. Weissinger, Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens, Math. Nachr., **8** (1952), 193—212.
4. L. Collatz, Fehlerabschätzungen zum Iterationsverfahren bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., **33** : 4 (1953), 116—127.
5. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., Гостехиздат, 1950.