



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Karasev, Lagrangian rings. Multiscale asymptotics of a spectrum near resonance, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1987, Volume 21, Issue 1, 78–79

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

March 15, 2025, 06:57:53



УДК 517.98

ЛАГРАНЖЕВЫ КОЛЬЦА. МНОГОМАСШТАБНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА

М. В. Карасев

1. Наличие резонансов или некомутирующих симметрий приводит к вырождению старшей части асимптотики спектра дифференциального оператора. Если нет резонансов, то символ секулярного оператора, снимающего вырождение, является скалярной функцией на эйлеровых орбитах алгебры симметрий [1; 2]. В настоящей работе мы хотим показать, что при появлении резонанса секулярный символ становится операторнозначным и его собственные значения — *термы* — задаются квантованием некоторой вспомогательной гамильтоновой системы, известной, видимо, со времен Лагранжа и Лапласа [3]. При этом задачу снятия вырождения удается до конца решить в трех случаях. Во-первых, когда алгебра симметрий абелева. Во-вторых, когда рассматриваются спектральные серии, соответствующие точкам покоя вспомогательной системы, т. е. положениям равновесия резонансного тора. Эти случаи — простейшие; решение получается здесь комбинацией методов [4; 5] и метода Борна — Оппенгеймера.

Наиболее интересная ситуация возникает при больших отклонениях тора от положения равновесия. Из-за взаимодействия близких термов упомянутые выше методы здесь непосредственно неприменимы. Но при условии интегрируемости вспомогательной системы (например, при однократном резонансе) вклады близких термов в асимптотику удается эффективно просуммировать, вводя вместо собственных функций операторные (смешанные) состояния [6]. Их главными фронтами осцилляций служат лагранжевы подмногообразия с краем — тороидальные кольца, замечаемые при колебаниях резонансным тором. Проекция края этих колец на конфигурационное пространство представляет собой кустик у, возникшую за счет резонанса. Совершенно изменяется также сама структура асимптотики и в разложении по степеням параметра появляются дробные показатели. Асимптотика теперь строится сразу в нескольких масштабах, которые определяются степенью малости возмущения относительно параметра квазиклассического приближения, степенью резонанса в основной системе, во вспомогательной системе и т. д.

При некотором соотношении между этими степенями дробные показатели отсутствуют и одновременно исчезает вспомогательная гамильтонова система. Вычисление термов требует тогда точного решения некоторого дифференциального уравнения порядка ≥ 2 (впервые оно было получено в [7]; см. также [8; 9]). В модельном примере, рассмотренном ниже, этот вырожденный случай соответствует нулевому субглавному символу $a = b = c = 0$.

2. На торе T^3 рассмотрим вейлевский оператор $H = H(x, y, z; -i\nabla_x, -i\nabla_y, -i\nabla_z)$ с символом $H(x, y, z; \xi, \zeta, \eta) = \xi^2 + \zeta^2 + a\xi + b\zeta + c\eta + V$, где $0 \leq x, y, z \leq 2\pi$, a, b, c, V — гладкие вещественные функции на торе. Главный символ $H_0(\xi, \zeta) = \xi^2 + \zeta^2$ имеет некоммутативную алгебру симметрий с образующими z, η и, кроме того, его орбитальные частоты $\partial H_0 / \partial \xi, \partial H_0 / \partial \zeta$ попадают в резонанс при любых целых ξ, ζ . Не уменьшая общности, можно считать, что резонанс наступает на луче $\xi = 0, \zeta \geq 1$; любой другой приводится к нему поворотом и растяжением координат x, y . Нас будет интересовать лишь область $|\xi| \leq |\zeta|^{1/2}$, так как при $|\zeta|^{1/2} \ll |\xi| \ll |\zeta|$ применима обычная нерезонансная схема, а область $|\xi| \sim |\zeta|$ соответствует уже переходу в зону нового резонанса.

После усреднения по траектории нерезонансной части главного символа $H_0(0, \zeta)$ (т. е. после подходящего унитарного преобразования U) мы перейдем от оператора H к новому оператору $\bar{H} = UH U^{-1}$ с символом

$$\bar{H} = \zeta^2 + \zeta \circ s(x, p; z, k) + \mathcal{R}, \quad p \equiv \zeta^{-1/2} \xi, \quad k \equiv \zeta^{-1} \eta. \quad (1)$$

Здесь $s = s_0 + \zeta^{-1/2} s_1$, $s_0 = p^2 + \bar{b}(x, z) + k\bar{c}(x, z)$, $s_1 = p\bar{a}(x, z)$, чертой обозначено среднее по переменной y , а остаток \mathcal{R} равномерно ограничен $\mathcal{R} = O(1)$ в области $|p| \leq |\zeta|^{1/2}$ (и, тем более, в интересующей нас области $|p| \leq 1$).

Отметим, что на спектре значения нерезонансного «действия» $\zeta = n$ целые. Найдем асимптотику собственных значений оператора H при $n \rightarrow \infty$.

Из (1) следует, что операторнозначный секулярный символ в данной задаче имеет вид $\hat{s} = s(x, -in^{-1/2}\nabla_x; z, k)$. Таким образом, помимо n сразу возникает новый масштаб асимптотики \sqrt{n} . Вспомогательная система, определяемая в (x, p) -пространстве функцией Гамильтона $s_0(x, p; z, k)$, параметрически зависит от образующих алгебры симметрий. Ее квантование дает термы (функции от z, k), отстоящие друг от друга на расстояние $\sim n^{-1/2}$. Мы рассмотрим здесь лишь высокие термы, т. е. третий из перечисленных

в разделе 1 случаев, и опишем взаимодействие динамики в (z, k) -пространстве симметрий с динамикой в (x, p) -пространстве.

3. Фиксируем последовательности целых чисел $m \sim n$, $l \sim n^{1/2}$. Пусть для всех (z, k, E) из некоторого компакта уравнение $\bar{b}(x, z) + k\bar{c}(x, z) = E$ имеет относительно x два гладких решения $x_i = x_i(z, k, E)$ ($i = 0, 1$), причем, $0 < x_0 < x_1 < 2\pi$ и на интервале (x_0, x_1) функция $\bar{b} + k\bar{c}$ строго меньше E , а вне отрезка $[x_0, x_1]$ вблизи его концов она строго больше E . Точки x_0, x_1 — это границы зоны колебаний резонансного тора. Обозна-

чим $J(z, k, E) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} (E - \bar{b} - k\bar{c})^{1/2} dx$. Предположим, что кривые $\Gamma(E)$ в (z, k) -прост-

ранстве, заданные уравнением $J(z, k, E) = (l + 1/2) n^{-1/2}$, замкнуты. Через $e(z, k)$ обозначим решение этого уравнения относительно неизвестной E , а через $\epsilon_{n, l, m}$ — те значения энергии E , при которых действие $\Sigma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma(E)} k dz$ принимает значения m/n .

Пусть τ координата угол, сопряженная Σ .

Введем также действие $I = J(z, k, s_0(x, p; z, k))$ для гамильтониана s_0 и две частоты: $\omega(z, k, I) = \partial s_0 / \partial I$ — частота колебаний резонансного тора вдоль кривых $\{s_0 = e(z, k)\}$ в (x, p) -пространстве и $\Omega(E) = \partial e / \partial \Sigma$ — частота движения вдоль кривых $\Gamma(E) = \{e(z, k) = E\}$ в (z, k) -пространстве. Усреднение вдоль первого семейства кривых и дополнительное усреднение вдоль второго семейства (относительно нормированных инвариантных мер) обозначим скобками $\langle \dots \rangle$ и «...».

Пусть $\text{ad}(I)$ гамильтоново поле функции I в (x, p) -пространстве. Поскольку I адiabатический инвариант, то среднее от его дифференциала $\partial I = \partial_z, k I$ по параметрам z, k равно нулю: $\langle \partial I \rangle = 0$. Поэтому уравнение $\text{ad}(I) \varphi = \partial I$ имеет единственное решение φ с нулевым средним $\langle \varphi \rangle = 0$. Именно это решение описывает взаимодействие вблизи кривых термов. Оно задает 1-форму в (z, k) -пространстве и позволяет построить две функции: $\nu = \varphi(\text{ad}(e))$ и $\mu = \varphi(\text{ad}(I))$. Обозначим $\delta = \langle s_1 - \nu - \omega \mu / 2 \rangle$. Кроме того, по двум базисным циклам на торе $\{I = \text{const}, e = E = \text{const}\}$ в (x, p, z, k) -пространстве проинтегрируем форму $(\nu d\tau - \Omega p dx) / 2\pi$. Один из этих двух интегралов равен ΩI ; второй обозначим через $\sigma = \sigma(I, E)$. Договоримся также значения какой-либо величины $g(I, E)$ при $I = (l + 1/2) n^{-1/2}$ и $E = \epsilon_{n, l, m}$ обозначать через $g_{n, l, m}$.

Теорема. Пусть для выбранной последовательности целых чисел $m \sim n$, $l \sim n^{1/2}$ каждая частота $\Omega_{n, l, m}$ несоизмерима с частотой $(\partial \sigma / \partial I)_{n, l, m}$ (так что константа в общем условии несоизмеримости (5.11) [3] растет медленнее $n^{1/8}$). Тогда оператор \mathbf{H} имеет резонансную серию собственных значений $n^2 + p\epsilon_{n, l, m} + n^{1/2} (\delta_{n, l, m} + \sigma_{n, l, m}) + \epsilon_{n, l, m} + O(n^{-1/2})$.

Формула для чисел $\epsilon_{n, l, m} = O(1)$ опущена из-за ее чрезвычайной громоздкости.

Главный фронт осцилляций собственных состояний оператора \mathbf{H} , отвечающих указанной резонансной серии, является трехмерным лагранжевым кольцом. Точнее, в фазовом пространстве $T^*(T^3)$ с координатами $(x, y, z; k_x, k_y, k_z)$ (где $\vec{k} \sim -in^{-1/2}$) фронт задается соотношениями $k_x = 0, k_y = 1, (z, k_z) \in \Gamma(E), x_0(z, k_z, E) \leq x \leq x_1(z, k_z, E)$, где $E = \epsilon_{n, l, m}$.

Рассмотренная здесь на модельном примере схема построения резонансных серий применима и в общей ситуации работ [1, 2].

Примечание при корректуре. Дифференциальные операторы с символами типа (1), содержащие параметры разных масштабов по разным переменным, возникли также в работе Л. В. Берлянда, С. Ю. Доброхотова (УМН. — 1986. — т. 41, № 4. — С. 195) по методу усреднения для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами. Здесь многомасштабность асимптотики заложена в самой постановке задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карасев М. В. // Функцион. анализ и его прил. — 1984. Т. 18, вып. 2. — С. 65—66. 2. Карасев М. В. // Функцион. анализ и его прил. — 1986. Т. 20, вып. 1. — С. 21—32.
3. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: 1985. — С. 5—304. Деп. в ВИНТИ. 4. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 5. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1976. 6. Карасев М. В. // ТМФ. — 1984. Т. 61, № 1. — С. 118—127. 7. Маслов В. П. // ДАН СССР. — 1958. Т. 123, № 4. — С. 631—634. 8. Маслов В. П., Воробьев Е. М. // ДАН СССР. — 1968. Т. 179, № 3. — С. 558—561. 9. Велиев О. А., Молчанов С. А. // Функцион. анализ и его прил. — 1985. Т. 19, вып. 3. — С. 86—87.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило в редакцию
9 декабря 1985 г