Е. А. Горин, Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии,
УМН, 1978, том 33, выпуск 4, 169–188

https://www.mathnet.ru/rm3488

1978 г. июль — август *т. XXXIII, вып. 4 (202)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ Г. Е. ШИЛОВА ПО ТЕОРИИ КОММУТАТИВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР И ИХ ДАЛЬНЕЙШЕМ РАЗВИТИИ [1])

Е. А. Горин

Введение. Работы по теории коммутативных банаховых алгебр занимают особенное место в математическом творчестве Г. Е. Шилова. Еще в конце 30-х годов он вступил в тесный научный контакт с основоположником этой области функционального анализа И. М. Гельфандом и внес большой вклад в разработку основ теории. Вскоре им был открыт класс регулярных банаховых алгебр (их иногда называют шиловскими), включающий важные для математического анализа алгебры гладких функций, введено и исследовано одно из самых популярных понятий — понятие кольцевой границы пространства максимальных идеалов, за которым впоследствии прочно установилось наименование «граница Шилова». Детальное изучение специальных классов регулярных алгебр заняло период с 1947 по 1952 гг. В конце этого периода Г. Е. Шилов сделал фундаментальное открытие в общей теории коммутативых банаховых алгебр, показав, что алгебра с несвязным носителем (пространством максимальных идеалов) распадается в прямую сумму собственных замкнутых идеалов, чем была положительно решена одна из основных старых проблем. Решение потребовало введения новых понятий и разработки многомерного функционального исчисления. Эти идеи Г. Е. Шилова, развитые Вальбруком, Аренсом, Кальдероном и другими, во многом изменили лицо теории и вскоре позволили уяснить, что наряду с традиционными связями с теорией операторов и гармоническим анализом банаховы алгебры могут иметь плодотворные контакты с теорией комплексных пространств, алгебраической топологией и другими современными разделами математического анализа.

Примерно с середины 50-х годов интерес Г. Е. Шилова к банаховым алгебрам постепенно ослабевает — тогда он переключился на обобщенные функции и дифференциальные уравнения. Таким образом, активный период составляет примерно 10—12 лет, от которых теперь нас отделяет четверть века, но этот интервал только подчеркивает то огромное влияние, которое оказали его работы.

Банахова алгебра [2]) A — это алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и одновременно банахово пространство, причем отмеченные структуры дол-

[1]) Статья содержит расширенное изложение доклада, прочитанного автором 15 февраля 1977 г. в Московском математическом обществе.

[2]) В ранних работах Нагумо и Иосиды употреблялся термин «метрическое кольцо», в работах И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова —«нормированное кольцо», теперь иногда употребляют термин «полная нормированная алгебра». Термин «банахова алгебра», по-видимому, впервые использовал Амброуз (1945), и в настоящее время он является общепринятым.

жны быть согласованы. Ниже обычно предполагается, что алгебра обладает единицей и скалярные кратные единицы отождествляются с соответствующими скалярами. Можно считать, что $\| ab \| \leqslant \|a\| \cdot \| b \|$ для всех a, $b \in A$ и что $\| \lambda \| = | \lambda |$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. Если не оговорено противное, то рассматриваемая алгебра считается коммутативной. Типичные примеры: алгебра $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте X с sup-нормой, алгебры гладких или голоморфных функций, групповые алгебры $L^1(G)$ локально компактных абелевых групп со сверткой в качестве умножения (если группа G не дискретна, то единица добавляется; переходом к преобразованиям Фурье алгебраические операции можно сделать поточечными).

Обратимые элементы алгебры A составляют открытую подгруппу A^{-1}, которая является топологической группой в индуцированной топологии. В частности, максимальные идеалы замкнуты. Поскольку A — банахово пространство, не возникает никаких трудностей в определении голоморфных функций со значениями в A. Вместе с тем наличие в A дополнительной структуры позволяет рассматривать много специфических голоморфных функций, важнейшая из которых — резольвента $\lambda \to (\lambda - a)^{-1}$, определенная вне спектра $\sigma(a)$ элемента a. Максимальные идеалы коммутативной банаховой алгебры суть ядра мультипликативных функционалов. Совокупность всех таких функционалов составляет слабо замкнутое подмножество M_A единичной сферы сопряженного пространства и снабженное этой топологией называется пространством максимальных идеалов алгебры A. Образ $\hat{a}$ элемента $a \in A$ относительно естественного гомоморфизма $A \to C(M_A)$ называется преобразованием Гельфанда. Например, при $A = C(X)$ преобразование Гельфанда фактически сводится к тождественному, а при $A = L^1(G)$ — к преобразованию Фурье. Ядро гомоморфизма $A \to C(M_A)$ есть радикал алгебры, который здесь совпадает с множеством квазинильпотентов. Алгебры с тривиальным радикалом называются полупростыми или алгебрами функций, поскольку гельфандовское представление для таких алгебр является точным. Интересы Г. Е. Шилова в основном были связаны именно с такими алгебрами. По отношению к алгебрам функций один из основных результатов Г. Е. Шилова (в форме Аренса — Кальдерона) заключается в следующем. Рассмотрим упорядоченный набор элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$. Множество значений вектор-фукнции $(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)$ на M_A образует компакт в $\mathbb{C}^n$, который называется совместным спектром в смысле Шилова элементов $a_1, \ldots, a_n$ и обозначается $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$. Оказывается, если функция f голоморфна в некоторой окрестности этого компакта, то суперпозиция $f(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)$ есть преобразование Гельфанда элемента алгебры A (т. е. при естестенном отождествлении попадает в эту алгебру).

Усиления теоремы Стоуна — Вейерштрасса. Пусть X — компакт. Замкнутая подалгебра $A \subset C(X)$ называется равномерной, если она содержит константы и разделяет точки. Компакт X при этом естественно вкладывается в пространство максимальных идеалов (но не обязательно исчерпывает это пространство). Классическая теорема Стоуна — Вейерштрасса устанавливает, что если равномерная алгебра A симметрична, т. е. вместе с каждой функцией содержит комплексно-сопряженную, то $A = C(X)$.

В малоизвестной работе [1] Г. Е. Шилов следующим образом усилил теорему Стоуна — Вейерштрасса. Рассмотрим совокупность всех тех функций $a \in A$, комплексно-сопряженные к которым также принадлежат A. Такие функции образуют замкнутую подалгебру $B \subset A$. Компакт X разбивается на классы эквивалентности: $x_1 \sim x_2$, если $a(x_1) = a(x_2)$ для всех $a \in B$. Теорема Шилова устанавливает, что если непрерывная функция g на каждом классе эквивалентности совпадает с некоторым элементом алгебры A, то $g \in A$. Заметим, что в классической ситуации все классы эквивалентности одноточечны и теорема Шилова сводится к теореме Стоуна — Вейерштрасса. В работе [1] Г. Е. Шилов указал применения своей теоремы к некоторым вопросам комплексной аппроксимации. Позже [2] он вернулся к этой конструкции. Дело в том, что сужение $A \mid Y$ исходной алгебры A на каждый из классов эквивалентности $Y \subset X$ представляет собой равномерную подалгебру в $C(Y)$ и, повторяя процедуру, мы можем получать классы эквивалентности 2-го, 3-го и т. д. порядков. Довольно простые примеры показывают, что на конечном шаге процесс образования новых классов, вообще говоря, не обрывается. Поэтому для образования «предельных классов» приходится привлекать трансфиниты. Предельные классы $Y \subset X$ по-прежнему таковы, что сужения $A \mid Y$ замкнуты в $C(Y)$. Вместе с тем эти сужения — антисимметричные алгебры, т. е. не содержат вещественных функций, кроме констант. В заметке [2] Г. Е. Шилов выдвинул гипотезу, что исходная алгебра A восстанавливается и по этим своим антисимметричным компонентам. Эта гипотеза Г. Е. Шилова в дальнейшем была доказана Э. Бишопом [3]. Простое доказательство, использующее идею де Бранжа с привлечением крайних точек, нашел Гликсберг (см. по этому поводу [4], стр. 87; [5], стр. 137). В известном смысле логическое завершение этот круг вопросов получил в работе [6], см. также [54].

Теорема Шилова — Бишопа позволяет в принципе сводить изучение произвольных равномерных алгебр к изучению антисимметричных. Не удивительно, что она быстро нашла многочисленные красивые применения, в том числе и за рамками равномерных алгебр. Остановимся на одном примере.

Предположим, что для равномерной алгебры $A \subset C(X)$ подпространство $\operatorname{Re} A$ вещественных частей элементов алгебры замкнуто относительно равномерной сходимости на X. Гофман и Вермер [7] показали, что в таком случае $A = C(X)$. По теореме Шилова — Бишопа дело сводится к случаю, когда алгебра A антисимметрична. Фиксируем точку $x_0 \in X$ и, отправляясь от функций $a = u + iv \in A$, для которых $a(x_0) = 0$, организуем оператор $u \to v$. В силу предположенной антисимметрии такое определение корректно и приводит к неравенству $\max \mid u \mid \leqslant C \max \mid v \mid$, которое противоречиво, если X не одноточечно. В серии интересных работ А. Бернара, начатых заметкой [8], среди прочего было обнаружено, что в теореме Гофмана — Вермера можно снять априорное предположение о равномерности алгебры A. В качестве следствия отсюда сразу получается, например, простое доказательство одной теоремы Вика. Напомним, что замкнутое подмножество E единичной окружности называется множеством Хельсона, если $C(E)$ исчерпывается сужениями функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье, и множеством Карлесона, если достаточно абсолютно сходящихся рядов Тейлора. Теорема Вика устанавливает совпадение этих классов множеств E. Она вытекает из теоремы Бернара просто потому, что вещественные части абсолютно сходящихся рядов Фурье и Тейлора, очевидно, совпадают. Исследования Бернара продолжены им, в частности, в работах [42]—[44]. Любопытно, что в теоремах такого типа в предположении сепарабельности алгебры условие замкнутости пространства вещественных частей можно заменить условием замкнутости множества логарифмов модулей обратимых элементов, причем сепарабельность существенна (первый результат в этом направлении получен в [32]; изящные окончательные формулировки см. в [33]).

Граница Шилова. Понятие границы Шилова, по-видимому, одно из самых популярных в теории банаховых алгебр. Г. Е. Шилов рассматривал замкнутые подмножества F пространства M_A максимальных идеалов алгебры A, обладающие тем свойством, что

$$\max\{|\hat{a}(\xi)| : \xi \in F\} = \max\{|\hat{a}(\xi)| : \xi \in M_A\}$$

для всех $a \in A$ (правая часть здесь — спектральный радиус $|a|$). Такие подмножества называются границами. Первое нетривиальное наблюдение Г. Е. Шилова состояло в том, что пересечение любых двух замкнутых границ есть снова граница. В силу компактности отсюда вытекает, что границей служит пересечение Γ_A всех замкнутых границ и эта граница называется границей Шилова. В своих работах (их содержание отражено в книге [9]) Г. Е. Шилов указал удобные критерии принадлежности точки $\xi \in M_A$ к границе и применил это понятие к вопросу о расширении максимальных идеалов. Оказалось, что гомоморфизмы $\varphi : A \to \mathbb{C}$, отвечающие точкам границы Шилова, продолжаются до гомоморфизмов любого банахова расширения, тогда как за пределами границы это, вообще говоря, невозможно. Таким образом, точки границы Шилова составляют наиболее устойчивую часть «спектра алгебры», подобно тому, как это имеет место для границы спектра линейного оператора. Г. Е. Шилов использовал понятие границы для исследования обобщенных делителей нуля. Еще одно из первых применений этого понятия было связано с исследованиями И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка по C^*-алгебрам.

Понятие границы Шилова в дальнейшем с большим эффектом применялось при изучении равномерных алгебр, в частности, в вопросах равномерной аппроксимации. Важную промежуточную роль сыграло понятие представляющей меры, введенное Аренсом и Зингером (по поводу этого и других близких понятий см., например, гл. 2 книги [4]). Пусть φ: $A \to \mathbb{C}$ — гомоморфизм равномерной алгебры. Если продолжить φ с сохранением нормы на $C(\Gamma_A)$ и применить теорему Рисса, то можно утверждать существование такой вероятностной меры, что

$$\varphi(a) = \int_{\Gamma_A} \hat{a}(\xi)\, d\mu$$

для всех $a \in A$. Эта формула служит абстрактным аналогом формулы Пуассона, в которой она сводится, если A — стандартная алгебра голоморфных функций в диске, а φ отвечает внутренней точке. Отправляясь от абстрактной формулы Пуассона, можно ставить дальнейшие вопросы: единственность представляющей меры, существование представляющих мер со специальными свойствами, связь между представляющими мерами различных гомоморфизмов и т. д., что, в частности, приводит к классификации равномерных алгебр. Среди первых результатов такого сорта была теорема Вермера об одномерной аналитической структуре в пространстве максимальных идеалов. Бишоп показал, что среди представляющих мер данного гомоморфизма всегда имеется мера Иенсена, т. е. такая мера μ, что

$$\log|\varphi(a)| \leqslant \int_{\Gamma_A} \log|\hat{a}(\xi)|\, d\mu$$

для всех $a \in A$. Существование меры Иенсена равносильно тому, что не только $|\hat{a}|$, но и произвольные суммы вида $\sum c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} |\hat{a}_1|^{\alpha_1} \ldots |\hat{a}_n|^{\alpha_n}$, где $\alpha_k \geqslant 0$, $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \geqslant 0$, достигают максимума на границе Шилова. Если равномерная алгебра сепарабельна, то существует минимальная граница среди всех (а не только замкнутых) границ и для любого гомоморфизма существует представляющая мера, сосредоточенная на минимальной границе (Бишоп). Понятие минимальной границы тесно связано с общим понятием границы Шоке и теоремами о крайних точках (см. по этому поводу [10]).

Интересные результаты, связанные с границей Шилова, получаются с использованием комплексно-многомерного аппарата. Х. Росси показал, что границе Шилова принадлежат точки локального максимума (см. по этому поводу гл. 3 книги [4]). Недавно интересное обобщение понятия границы Шилова предложил Базенер ([11]; см. также [12]). Пусть A — равномерная алгебра. Для каждого набора $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ через $V(a)$ обозначается совокупность общих нулей в M_A функций $\hat{a}_k$. Далее, если V — компакт в M_A, то A_V — замыкание в $C(V)$ алгебры сужений $A \mid V$. Обозначая через $\partial_0 A$ границу Шилова, Базенер вводит множества $\partial_n A$ — замыкание объединения $\partial_0 A_{V(a)}$ по всевозможным n-наборам. Если, например, A — стандартная алгебра голоморфных функций в полидиске $|z_j| \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant m$, то в качестве $\partial_n A$ получается множество всех $(z_1, \ldots, z_m)$, для которых $|z_j| = 1$ по крайней мере у $m - n$ компонент. Эти обобщения понятия границы Шилова позволяют среди прочего дать содержательные многомерные варианты теоремы Вермера о максимальности и судить о наличии в пространстве максимальных идеалов равномерной алгебры естественной структуры k-мерного пространства Штейна.

Общие свойства регулярных алгебр. Рассмотрим полупростую алгебру A, реализованную в гельфандовском представлении, т. е. в виде алгебры функций на пространстве максимальных идеалов M_A. Такую алгебру Г. Е. Шилов называет регулярной, если для каждого замкнутого подмножества $F \subset M_A$ и каждой точки $\xi \in M_A \setminus F$ существует такой элемент $a \in A$, что $\hat{a} \mid F = 0$ и $\hat{a}(\xi) \neq 0$. Общая теория регулярных алгебр была детально изложена Г. Е. Шиловым в его книге [13], часть результатов, ставших теперь классическими, отражена в [9], [14] — [16] и ряде других книг. К числу регулярных относятся многие стандартные алгебры, возникающие в математическом анализе: алгебры вида $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте и им изоморфные, например, алгебра $\mathrm{AP}(\mathbb{R})$ почти периодических функций Бора, групповые алгебры $L^1(G)$ локально компактных абелевых групп, например, алгебра абсолютно сходящихся рядов Фурье или алгебра интегралов Фурье, алгебры функций, обладающих непрерывными производными.

Вместе с тем в дальнейшем были открыты интересные примеры нестандартных регулярных алгебр. Мак-Киссик [17] указал первый пример равномерной регулярной алгебры $R(X)$, отличной от $C(X)$. В качестве X берется подходящий плоский компакт и $R(X)$ — алгебра равномерных пределов на X последовательностей рациональных функций с полюсами вне X. Построение основано на специфическом эффекте неединственности для аналитических функций с большим числом особенностей (эффекты такого сорта отмечались Вольфом [18], изящная конструкция предложена А. А. Гончаром [19]). Отправляясь от примера Мак-Киссика и одного примера Коула (см. [20], приложение), можно построить еще более изощренные примеры ([21]; см. также [22]). Именно, существует слабо квазианалитическая (и, следовательно, антисимметричная) равномерная регулярная алгебра A, для которой A^{-1} плотно в A, пространство M_A максимальных идеалов метризуемо, наследственно уникогерентно (пересечение любых двух связных замкнутых подмножеств связано), $\dim M_A = 1$, все точки служат точками пика (т. е. минимальная граница совпадает с M_A) и, кроме того, над A приводимы все сепарабельные полиномы.

Одним из основных исходных пунктов построенной Г. Е. Шиловым теории послужил следующий обнаруженный им факт: если F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства M_A максимальных идеалов регулярной алгебры A, то в A найдется такой элемент a, что $\hat{a} \mid F_1 = 0$ и $\hat{a} \mid F_2 = 1$. Для алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте X это утверждение вытекает из теоремы Урысона, однако известная из топологии схема доказательства в общей ситуации не работает — в теореме Шилова весьма существенно, что областью определения служит пространство максимальных идеалов. Если отказаться от этого условия, то теорема перестает быть верной и, более того, в классе равномерных алгебр на X нормальность в указанном выше смысле влечет за собой совпадение X с пространством максимальных идеалов (см., например, [23], стр. 270 и дальше). Оригинальное доказательство Г. Е. Шилова носит не метрический, а алгебраический характер. В дальнейшем выяснилось, что за пределами алгебр вида $C(X)$ и не может быть сколько-нибудь общих оценок нормы разделяющего элемента (см., в частности, [24] — [26]).

Применяя прием, ставший теперь классическим, Г. Е. Шилов показал, что в регулярной алгебре A для каждого открытого покрытия пространства максимальных идеалов существует подчиненное этому покрытию разбиение единицы. Отсюда сразу вытекает, что каждая функция на M_A, которая в некоторой окрестности любой из точек M_A совпадает с некоторым элементом алгебры A, сама принадлежит этой алгебре. Таким образом, тот факт, например, что представимость функции абсолютно сходящимся рядом Фурье зависит только от локального поведения функции, оказался следствием очевидной регулярности по Шилову алгебры $L^1(\mathbb{Z})$.

Хотя аналогичным свойством локальности обладают многие стандартные алгебры функций и за пределами регулярных, это свойство, как выяснилось в дальнейшем, распространяется даже не на все равномерные алгебры. Первый пример такого сорта был указан Э. Каллин ([27]; см. также [4], стр. 74).

В примере Каллин «дефект нелокальности» бесконечный и, с другой стороны, добавление к исходной алгебре локально принадлежащих к ней функций приводит после дальнейшего пополнения к локальной равномерной алгебре. Отметим, что согласно теореме Риккарта [28] указанные процедуры не меняют пространства максимальных идеалов. Вместе с тем А. Д. Варшавский [29] показал, что эти процедуры (в отличие от примера Каллин), вообще говоря, не приводят к локальной алгебре, а затем Сидней [30] выяснил, что процесс «локального пополнения» может не оборваться ни на каком конечном шаге. Исходный пример Э. Каллин допускает также следующее усовершенствование [31]. Существует такая тройка $A_0 \subset A \subset A_1$ равномерных алгебр с общим пространством максимальных идеалов, что A_0 и A_1 локальны, A не локальна и при этом каждая последующая алгебра является одномерным расширением предыдущей.

При исследовании конкретных регулярных алгебр Г. Е. Шилова естественно интересовали случаи локального совпадения, и по ходу дела он обнаруживал интересные аналитические факты. Приведем один пример (который мы опишем в контексте абстрактного гармонического анализа). Пусть G — локально компактная абелева группа и G_0 — ее замкнутая подгруппа. Обозначим через $B(G)$ алгебру функций на G, которые служат преобразованиями Фурье комплексных регулярных борелевских мер ограниченной вариации с естественной нормой и сверткой (мер) в качестве умножения. Пусть Γ — аннулятор в $\hat{G}$ подгруппы G_0. В соответствии с основными фактами теории двойственности (см. [34], гл. 6) имеет место изоморфизм $(G/G_0)^{\wedge} = \Gamma$. Произведем отождествление по канонической инъекции $B(\hat{\Gamma}) \to B(G)$. Пусть теперь Q — замкнутое подмножество в G. Для совпадения $B(G) \mid Q$ с $B(\hat{\Gamma}) \mid Q$, очевидно, необходимы условия $\chi \mid Q \in B(\hat{\Gamma}) \mid Q$ для всех $\chi \in \hat{G}$ и ограниченность в совокупности норм всех этих функций в $B(\hat{\Gamma}) \mid Q$. Прием, примененный Г. Е. Шиловым в [13] (стр. 25), показывает, что эти условия и достаточны. Например, при $G = \mathbb{R}^n$, $G_0 = \mathbb{Z}^n$ получается, что сужение на куб $0 < \varepsilon \leqslant x_j \leqslant 1 - \varepsilon$, $1 \leqslant j \leqslant n$, любой функции, представимой интегралом Лебега — Стилтьеса, представляется и абсолютно сходящимся рядом Фурье. В частности, имеет место локальный изоморфизм этих алгебр. При $n = 1$ аналогичный факт отмечался Винером (см. [35], стр. 20).

Важную роль для теории регулярных алгебр и ее приложений сыграло открытое Г. Е. Шиловым аналитическое условие регулярности карлемановского типа.

Рассмотрим сначала непрерывную функцию $\omega(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для которой $\omega(t) \geqslant 1$ и $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1)\omega(t_2)$. Пусть $L^1(\mathbb{R}, \omega)$ — совокупность локально суммируемых на оси функций $f(t)$, для которых

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\omega(t)\,dt < \infty.$$

Совокупность таких функций образует банахову алгебру со сверткой в качестве умножения (единица присоединяется). Операции становятся поточечными, если перейти к преобразованиям Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,dt.$$

Пространство максимальных идеалов этой алгебры естественно отождествляется с одноточечной компактификацией полосы $\alpha_- \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \alpha_+$, где

$$\alpha_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{\ln \omega(-t)}{t}.$$

В частности, полоса вырождается в вещественную ось, если выполняется условие

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \omega(t)}{1+t^2}\,dt < \infty.$$

Из результатов работы Г. Е. Шилова [13] вытекает, что условие (1) равносильно регулярности алгебры $L^1(\mathbb{R}, \omega)$. В сторону достаточности это может быть установлено следующим образом. Не ограничивая общности, можно предположить, что функция $\omega(t)$ является четной и гладкой. Пусть

$$(2) \qquad u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \omega(t)\,dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

В силу условия (1) интеграл (2) имеет смысл. Далее, $u(x, 0) = \ln \omega(x)$ на вещественной оси, $u \geqslant 0$ и $\Delta u = 0$ при $y > 0$. Обозначим через v гармонически сопряженную к u функцию в верхней полуплоскости и положим $\Phi = e^{u+iv}$. Тогда функция Φ голоморфна в открытой верхней полуплоскости, непрерывна в замкнутой полуплоскости, $|\Phi(z)| \geqslant 1$ и $|\Phi(x)| = \omega(x)$ на вещественной оси. Пусть

$$f_0(t) = \frac{1}{(t+i)^2\,\Phi(t)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что $f_0 \in L^1(\mathbb{R}, \omega)$. Далее, $\hat{f}_0(\lambda) = 0$ при $\lambda \geqslant 0$, но $\hat{f}_0(\lambda) \not\equiv 0$. Поэтому, используя сдвиги и отражения, допустимые в рассматриваемом классе, мы можем для любого $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ указать такую функцию $f \in L^1(\mathbb{R}, \omega)$, что $\hat{f}(\lambda_0) = 1$ и $\hat{f}(\lambda) = 0$ при $|\lambda - \lambda_0| \geqslant \varepsilon$, откуда и вытекает регулярность.

Заметим, что условие (1) равносильно условию сходимости при каждом t ряда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \omega(tn)}{1+n^2}$$

и в таком виде, как показал Домар [36], оно распространяется на произвольные локально компактные абелевы группы.

Пусть теперь A — произвольная коммутативная банахова алгебра. Общая теорема Шилова устанавливает, что алгебра $\hat{A}$ регулярна, если A обладает системой образующих a, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \| e^{ita} \|}{1+t^2}\, dt < \infty.$$

Действительно, для данного a положим $\omega(t) = \|e^{ita}\|$. Функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1), и поэтому алгебра $L^1(\mathbb{R}, \omega)$ регулярна. Ясно, что $\hat{a}(\xi) \in \mathbb{R}$ при каждом $\xi \in M_A$. Если $\hat{a}(\xi_1) \neq \hat{a}(\xi_2)$, то, подбирая подходящую функцию $f \in L^1(\mathbb{R}, \omega)$ и полагая

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ita}\, dt,$$

мы можем получить такой элемент $b \in A$, что $\hat{b}(\xi) = 0$ в окрестности точки ξ_1 и $\hat{b}(\xi) = 1$ в окрестности точки ξ_2 (в работе [13] доказательство этой теоремы использует теорему Пэли — Винера и предшествует теореме о регулярности алгебр типа $L^1(\mathbb{R}, \omega)$). Из доказательства видно, что можно утверждать больше: независимо от того, полупроста алгебра A или нет, существуют такие элементы b_1, $b_2 \in A$, что $b_1 b_2 = 0$, но $\hat{b}_1(\xi_1) \neq 0$, $\hat{b}_2(\xi_2) \neq 0$. (Подобные соображения играют некоторую роль в работах А. Г. Баскакова, см., в частности, [37], в которых строится вариант шиловской теории регулярных алгебр для неполупростых алгебр и банаховых модулей над ними.)

Шиловский критерий регулярности сыграл заметную роль в ряде вопросов, связанных с проблемой инвариантного подпространства (см., в частности, [38], [39]), а также в общей теории представлений абелевых групп с отделимым спектром (см., в частности, [40], [41]).

Спектральный анализ и синтез; однородные алгебры. Одна из центральных задач теории коммутативных банаховых алгебр состоит в описании замкнутых идеалов. Эта задача тесно связана с классическими проблемами спектрального анализа и синтеза. Замкнутому идеалу $I \subset A$ сопоставляется семейство содержащих его максимальных идеалов, т. е. множество точек $\xi \in M_A$, для которых $\hat{a}(\xi) = 0$ при всех $a \in I$. Конкретное описание таких максимальных идеалов как раз и составляет «проблему спектрального анализа». Пусть K — пересечение всех максимальных идеалов, содержащих данный идеал I. Очевидно, что K — замкнутый идеал, причем $I \subset K$. Говорят, что идеал I допускает спектральный синтез, если $I = K$. Связь с классическими постановками вопроса осуществляется путем перехода к сопряженному пространству. Каждому замкнутому идеалу $I \subset A$ сопоставляется его аннулятор $\{\psi \in A^* : \psi \mid I = 0\}$. Аннулятор есть слабо замкнутое подпространство $E \subset A^*$, инвариантное относительно операторов, сопряженных к операторам умножения на элементы алгебры. Обратно, каждое такое подпространство $E \subset A^*$ порождается некоторым замкнутым идеалом. Сформулированная выше задача анализа равносильна описанию мультипликативных функционалов $\varphi \in E$, а задача синтеза —вопросу о порождаемости E такими функционалами. «Конкретный» спектральный анализ заключается в исследовании для данного функционала ψ идеала $\{a \in A\colon \psi(ax) = 0$ для всех $x \in A\}$. Классическая постановка вопроса соответствует алгебре $L^1(\mathbb{R})$. В этом случае сопряженное пространство реализуется в виде $L^\infty(\mathbb{R})$, инвариантность подпространства E равносильна его инвариантности относительно сдвигов, мультипликативным функционалам соответствуют экспоненты (характеры) $e^{i\lambda t}$ и речь идет о возможности аппроксимации L^∞-функций экспонентами, попадающими в слабо замкнутое подпространство системы их сдвигов.

Г. Е. Шилову принадлежит ряд принципиальных соображений, связанных с общей постановкой проблемы спектрального синтеза. Пусть A — произвольная полупростая алгебра, реализованная в гельфандовском представлении. Каждому замкнутому идеалу $I \subset A$ сопоставим его оболочку — замкнутое подмножество $F \subset M_A$ общих нулей функций $\hat{a}$, отвечающих элементам $a \in I$. Г. Е. Шилов [13] показывает, что среди замкнутых идеалов с данной оболочкой $Y \in M_A$, кроме очевидного максимального $I(Y)$, существует минимальный $J(Y)$, который получается замыканием идеала $J_0(Y)$ всех функций $\hat{a}$, равных нулю в окрестности множества Y. Тем самым изучение произвольных замкнутых идеалов сводится к изучению идеалов, промежуточных между $I(Y)$ и $J(Y)$. В частности, для идеала с оболочкой Y спектральный синтез заведомо имеет место, если $I(Y) = J(Y)$. Например, тауберова теорема Винера — не что иное, как отсутствие промежуточных идеалов для «бесконечно удаленной» точки пространства максимальных идеалов алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Применяя подобные общие соображения к другим конкретным алгебрам, Г. Е. Шилов получал среди прочего довольно тонкие новые теоремы тауберова типа.

Еще в 1939 г. В. А. Диткин [45] при исследовании проблем спектрального синтеза в алгебре $L^1(\mathbb{Z})$ абсолютно сходящихся рядов Фурье обнаружил важную роль того обстоятельства, что если $a \in L^1(\mathbb{Z})$ и $\hat{a}(\xi_0) = 0$, то $a = \lim aa_n$, где $\hat{a}_n(\xi) = 0$ в окрестности точки ξ (аналогичный факт верен для групповых алгебр произвольных локально компактных абелевых групп, причем семейство $\{a_n\}$ можно выбрать общим для всех a). В работе [13] Г. Е. Шилов ввел «условие Диткина» в контексте общих регулярных алгебр, рассмотрел с этой точки зрения множество конкретных алгебр и получил результаты В. А. Диткина из общих соображений.

В проблеме спектрального синтеза для групповых алгебр $L^1(G)$ локально компактных абелевых групп в дальнейшем был достигнут существенный прогресс. Теперь хорошо известно, что если граница замкнутого множества $F \subset \hat{G}$ счетна (или конечна), то $I(F) = J(F)$ (кстати, для счетных F можно утверждать больше: если ядро гомоморфизма ω: $L^1(G) \to B$ в банахову алгебру B имеет оболочкой счетное множество, то замыкание в B образа гомоморфизма ω есть полупростая алгебра; это получается из общих соображений, см. [46]). С другой стороны, Малявэн (см. [35]) показал, что для любой не компактной локально компактной абелевой группы G существует такое замкнутое подмножество $F \subset \hat{G}$, что $I(F) \neq J(F)$. Тонкие аналитические вопросы, связанные со спектральным анализом и синтезом в полугрупповой алгебре $L^1(\mathbb{R}_+)$, решаются в работах В. П. Гурария (см., в частности, [47]).

Заметное место в исследованиях Г. Е. Шилова занял цикл работ [48] — [52], посвященных специальным классам регулярных алгебр — однородным алгебрам типа C. Пусть A — полупростая регулярная алгебра. Для каждой точки $\xi \in M_A$ через $J(\xi)$ обозначим наименьший замкнутый идеал с оболочкой $\{\xi\}$. Пусть $\| a \|_\xi$ — норма образа в $A/J(\xi)$ элемента a, т. е. расстояние от a до $J(\xi)$. Если верхняя грань $\| a \|_\xi$ по всем $\xi \in M_A$ задает на A норму, эквивалентную исходной, то A называется алгеброй типа C. Этот класс алгебр был введен Г. Е. Шиловым еще в работе [13]. К числу таких алгебр относятся стандартные алгебры гладких функций, но, например, групповые алгебры, вообще говоря, устроены иначе (исключение — конечные группы). Однородность в смысле Г. Е. Шилова означает, что пространством максимальных идеалов алгебры служит локально компактная абелева группа, норма инвариантна относительно сдвига и оператор сдвига непрерывен. В работе [48] Г. Е. Шилов установил, что каждая однородная алгебра типа C может быть получена в виде непрерывной суммы примарных алгебр, т. е. алгебр с одним максимальным идеалом. Там же было доказано, что на простейшей группе — окружности все однородные алгебры типа C, содержащие каждую бесконечно дифференцируемую функцию, исчерпываются классической серией C^r.

В дальнейших работах на эту тему Г. Е. Шилов начал систематическое исследование однородных алгебр типа C на торах $\mathbb{T}^n$. Оказалось, что уже на двумерном торе имеются нестандартные алгебры. Общая схема рассуждений здесь такова. Пусть A — однородная регулярная алгебра типа C на торе $\mathbb{T}^n$, содержащая $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. «Банахова техника» позволяет установить, что в таком случае $C^r(\mathbb{T}^n) \subset A$ для некоторого конечного r, тригонометрические полиномы плотны в A и для каждого $\xi \in \mathbb{T}^n = M_A$ имеет место точная последовательность

$$C^r/\widetilde{J}(\xi) \to A/J(\xi) \to 0.$$

Здесь в первом члене $\widetilde{J}(\xi)$ — идеал функций из C^r, равных нулю в точке ξ вместе со всеми производными до порядка r. Отсюда следует, что $A/J(\xi)$ изоморфна фактор-алгебре алгебры полиномов $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ по идеалу, порожденному мономами $X_1^{\alpha_1}\ldots X_n^{\alpha_n}, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \geqslant r+1$. Описание идеалов в последней фактор-алгебре — в принципе не сложная задача (хотя бы потому, что они имеют конечную коразмерность; ср. [53]), а такое описание приводит и к описанию возможных кандидатов в алгебры $A/J(\xi)$. В случае, рассмотренном Г. Е. Шиловым в [51], имеем $n = 2$, $r = 1$, $C^2/\widetilde{J}(\xi)$ изоморфна алгебре полиномов $c_0 + c_1X_1 + c_2X_2$, $X_1^2 = X_2^2 = X_1X_2 = 0$, идеал коразмерности 1 задается условием вида

$$\omega_1X_1 + \omega_2X_2 = 0.$$

Исключая тривиальную возможность $A = C(\mathbb{T}^2)$, мы получаем для тригонометрических полиномов серию норм вида

$$\max|f| + \max\left|\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \omega\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\right|.$$

Если $\omega \in \mathbb{R}$, то пополнением служит алгебра функций, имеющих в каждой точке $\xi \in \mathbb{T}^2$ непрерывную производную по определенному направлению. Все такие алгебры, очевидно, локально изоморфны, тогда как глобальный изоморфизм зависит от арифметической природы числа ω (на что Г. Е. Шилов обращал внимание еще в работе [48]). При $\omega \notin \mathbb{R}$ возникают существенно новые алгебры. Типичный (и единственный с точки зрения локального изоморфизма) случай соответствует значению $\omega = i$. В этом случае получается шиловская алгебра векторно-гладких функций на торе: векторное поле (u, v), отвечающее функциям $u + iv$ из алгебры, обладает непрерывной дивергенцией и ротором, но не обязательно гладкостью. Класс векторно-гладких функций был известен в анализе с начала века, но до работ Г. Е. Шилова не было известно, что он естественно выделяется мультипликативными условиями.

Уже случай $r = 2$ связан с существенными осложнениями в разных пунктах, на что Г. Е. Шилов указывал при постановке соответствующей задачи [2]. Поясним это примером. Предположим, что, действуя в соответствии со сказанным выше, мы рассматриваем в качестве образа $C^2/J(\xi)$ фактор-алгебру, определяемую дополнительным условием $X_1X_2 = 0$. Формула, задающая норму на тригонометрических полиномах, должна тогда содержать чистые производные $\partial^2 f/\partial\xi_1^2$, $\partial^2 f/\partial\xi_2^2$, но не обязана содержать смешанную $\partial^2 f/\partial\xi_1\partial\xi_2$. Заранее не ясно, что произойдет в результате пополнения, удержится ли (непрерывная) смешанная производная благодаря непрерывности чистых. Очевидно, например, что смешанная производная, понимаемая в смысле обобщенных функций, будет функционалом типа L^2-функции. Оказалось, однако (см. [55], [56]), что непрерывность смешанной производной в этой ситуации не обязательна и тем самым возникающая здесь алгебра не совпадает с $C^2(\mathbb{T}^2)$. Отметим, кстати, работу [57], в которой среди прочего установлено (простыми общими средствами), что неравенство

$$\varepsilon \max\left|P\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\varphi\right| \leqslant \sum_1^m \max\left|Q\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\varphi\right|$$

в случае однородных полиномов P, $Q_1, \ldots, Q_m$ выполняется для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в том и только в том случае, когда полином P есть линейная комбинация полиномов $Q_1, \ldots, Q_m$ с постоянными коэффициентами.

Продвижение по цепочке r-гладкостей может приводить к различиям между понятиями локального, локально гладкого и локально линейного изоморфизма, делает возможным появление континуальных семейств (модулей) неизоморфных алгебр, конкретное описание алгебр в «векторно-гладких» терминах становится затруднительным. Возникающая картина напоминает, по-видимому не случайно, классификацию особенностей. Как указывает В. П. Паламодов, более обозримой может оказаться глобальная классификация. Ряд интересных результатов, связанных с этой проблематикой, в последнее время получила Андриана Мадгерова. Среди предшествующих работ важную роль сыграл обзор [58] и статья [59], в которой установлено, что в дополнительном предположении инвариантности алгебры относительно автоморфизмов тора остается только классическая серия $C^r(\mathbb{T}^n)$; этот результат является прямым обобщением теоремы Г. Е. Шилова об алгебрах на окружности.

Интересные задачи могут возникать при рассмотрении вместо торов более общих групп Ли и однородных пространств. В этой связи отметим еще одно направление исследований, при котором отказываются от регулярности и типа C, сохраняют однородность и предполагают равномерность алгебры. На окружности имеется однородная антисимметричная равномерная алгебра граничных значений голоморфных в круге функций, вещественный аннулятор которой тривиален (алгебра Дирихле). Аналогичные алгебры существуют на многомерных торах и других группах (например, почти периодические функции, голоморфно продолжаемые в верхнюю полуплоскость, приводят к антисимметричной алгебре Дирихле на бесконечномерном компакте Бора). Вместе с тем оказалось [60], что если на компактной группе существует равномерная двусторонне инвариантная антисимметричная алгебра Дирихле, то группа абелева и связна. А. Л. Розенберг [61] обнаружил, что в случае групп Ли сепарабельность вещественного аннулятора некоторой равномерной двусторонне инвариантной алгебры на группе влечет за собой коммутативность связной компоненты единицы группы. Среди других работ, в которых изучались инвариантные пространства и алгебры на однородных многообразиях, в том числе инвариантные относительно комплексной группы Ли биголоморфных автоморфизмов алгебры на комплексных многообразиях типа шара, укажем [62] — [68].

Функциональное исчисление и его приложения. Легко показать, что коммутативная банахова алгебра A тогда и только тогда допускает разложение в прямую сумму собственных замкнутых идеалов, когда единица алгебры представима в виде нетривиальной суммы двух идемпотентов, произведение которых равно нулю. Существование нетривиального идемпотента в алгебре A, очевидно, влечет за собой несвязность пространства M_A максимальных идеалов. Вопрос относительно обращения этого утверждения возник вместе с возникновением теории, но долгое время оставался открытым.

Положительный ответ был получен Г. Е. Шиловым в его знаменитой работе [69] 1953 г., в которой впервые в теории коммутативных банаховых алгебр с большим эффектом был использован многомерный комплексный аппарат и в основном построено многомерное функциональное исчисление, что решающим образом повлияло на дальнейшую судьбу теории.

Формулировка основной теоремы дана во введении. У Г. Е. Шилова, который для доказательства использовал довольно громоздкие интегральные представления Коши — Вейля, дополнительно предполагалось, что совместный спектр рассматриваемого набора элементов является полиномиально выпуклым, однако это не помешало ему получить, например, теорему об идемпотентах в полном объеме (и мы хотим подчеркнуть это обстоятельство). В дальнейшем были найдены иные подходы, но теорема Шилова тем не менее не стала пока тривиальной. Аренс и Кальдерон [70] среди прочего сняли условие полиномиальной выпуклости и указали новые приложения. Независимо оригинальные пути построения функционального исчисления были открыты Вальбруком ([71], [72]; см. также [73]).

Сейчас имеются по крайней мере два способа построения функционального исчисления. Один из них (см., например, [4], [14]) связан с рассмотрением дифференциальных форм со значениями в алгебре, использует общую формулу Стокса и поэтому в идейном плане прост. Второй способ (см., например, [74]—[76]) ближе к первоначальному подходу Г. Е. Шилова и в общих чертах заключается в следующем.

Рассматриваются алгебра A и область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Пусть $A_\Omega = \{a \in A^n \colon \sigma(a) \subset \Omega\}$. Речь идет о построении естественного гомоморфизма $f \to \tilde{f}$ из алгебры $\mathcal{O}_\Omega$ голоморфных функций f на Ω в алгебру функций $\tilde{f} \colon A_\Omega \to A$. Если Ω — полидиск, то гомоморфизм $f \to \tilde{f}$ строится просто при помощи кратной формулы Коши. Если Ω — полиномиальный полиэдр, определяемый неравенствами $|p_j(z)| < 1$, $1 \leqslant j \leqslant m$, то дело сводится к предыдущему случаю путем рассмотрения отображений Ока $z \to (z, p(z))$ и привлечения теоремы о продолжении голоморфных функций (которая в свою очередь вытекает из B-теоремы Картана для полидиска). Наконец, общий случай сводится к последнему при помощи следующей простой, но весьма полезной леммы Аренса — Кальдерона: к заданному набору $a_1, \ldots, a_n \in A$ можно так добавить $b_1, \ldots, b_m \in A$, что при естественной проекции $\mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ полиномиально выпуклая оболочка $\sigma(a, b)$ будет проектироваться в Ω. Таким образом, все «технические трудности» сконцентрированы в разрешимости проблемы Кузена для полидиска. Заметим, что предположение о полупростоте алгебры A снимается таким же способом.

Идеи функционального исчисления в дальнейшем развивались в различных направлениях. В работах Аллана [77]—[79] среди прочего развивается функциональное исчисление для функций бесконечного количества аргументов. Довольно детально обсуждался вопрос о единственности и автоматической непрерывности функционального исчисления. В предположении непрерывности функциональное исчисление единственно. Для полупростых алгебр непрерывность тривиально вытекает из алгебраических свойств. Оказывается, это остается верным для алгебр с конечномерным радикалом, но может нарушаться для алгебр с нильпотентным радикалом, даже в дополнительном предположении, что радикал топологически отщепим [80]. Автоматическая непрерывность всегда имеет место для более общего варианта функционального исчисления (Аренса), когда в качестве исходной рассматривается алгебра голоморфных функций $f \colon \Omega \to A$ со значениями в A вместо $\mathbb{C}$ [81].

Интересные работы по функциональному исчислению принадлежат Ж. Тейлору (см., в частности, [82], [83]). В этих работах исходным объектом служит не банахова алгебра, а банахов модуль. Точнее, рассматривается конечный набор коммутирующих операторов банахова пространства и их совместный спектр определяется при помощи некоторого формального комплекса (Кошуля). В случае операторов регулярного представления спектр Тейлора сводится к спектру Шилова, но, вообще говоря, естественно связанные с набором операторов банаховы алгебры приводят к более широкому спектру. Главный результат Тейлора заключается в построении функционального исчисления в этой ситуации (некоторые проблемы в построениях Тейлора устранил А. Я. Хеленский).

Иное определение совместного спектра набора коммутирующих операторов или спектра представления абелевой группы дает Ю. И. Любич [84]. Спектр Любича, вообще говоря, составляет часть спектра Тейлора, определяется проще, но построение содержательного функционального исчисления по отношению к спектру Любича без дополнительных органичений вряд ли возможно. С другой стороны, нет хорошего определения спектра Тейлора для представлений абелевых групп. Интересное сравнительное изучение этих спектров, включающее оригинальное постороение функционального исчисления для спектра Тейлора содержится в диссертации Р. Леви [41].

Теорема Г. Е. Шилова об идемпотентах по существу означает, что каждому разбиению пространства максимальных идеалов M_A на два открыто-замкнутых множества естественно соответствует в точности один идемпотент алгебры A. Обозначим через $S(A)$ аддитивную группу целочисленных комбинаций идемпотентов. Тогда, по теореме Шилова, имеет место канонический изоморфизм $S(A) = H^0(M_A, \mathbb{Z})$ (чеховские когомологии). Заметим, кстати, что естественное отображение $A \to \exp A$ является накрывающим, и так как имеет место точная последовательность $0 \to S(A) \to A \to \exp A \to 0$, то $\pi_1(\exp A) = S(A)$ и $\pi_q(\exp A) = 0$ при $q > 1$, подобно простейшему случаю $A = \mathbb{C}$.

В алгебраической топологии еще с 30-х годов была известна теорема Брушлинского — Эйленберга, согласно которой $A/\exp A = H^1(X, \mathbb{Z})$, если $A = C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на компакте X (или даже на любом отделимом паракомпактном пространстве). Аренс и Ройден (см. по этому поводу [4], [75]) установили, что указанный изоморфизм сохраняется для произвольно коммутативной банаховой алгебры A, если положить $X = M_A$. Поучительна схема доказательства. В силу B-теоремы Картана изоморфизм имеет место, если X — многообразие Штейна и A — алгебра всех голоморфных функций на X. Так как теория когомологий непрерывна, то изоморфизм распространяется на равномерные алгебры с конечным числом образующих, ибо пространство максимальных идеалов такой алгебры реализуется в виде полиномиально выпуклого компакта, допускающего аппроксимацию полиэдрами, а функции, голоморфные в окрестности компакта, согласно теореме Шилова принадлежат алгебре. Еще один предельный переход по числу образующих позволяет доказать теорему для произвольных равномерных алгебр, после чего условие на норму и предположение о полупростоте легко снимаются.

Аналогичным способом, с использованием одной теоремы Серра, Э. Браудер [85] (см. также [75]) доказал, что $H^n(M_A, \mathbb{C}) = 0$, если алгебра A обладает системой из $\leqslant n$ образующих. Например, минимальное число образующих в алгебре $C(S^2)$ равно 3. Интересное добавление к теореме Браудера сделано в [86]: алгебра всех непрерывных функций на n-мерном конечном комплексе обладает системой из $n + 1$ образующих.

Для полупростых алгебр A теорема Аренса — Ройдена по существу означает, что гомотипическая классификация непрерывных отображений $f : M_A \to \mathbb{C}^*$ совпадает с гомотопической классификацией отображений $\hat{a} : M_A \to \mathbb{C}^*$, отвечающих элементам $a \in A$: в каждом классе непрерывных отображений имеется отображение такого типа, гомотопность с сохранением типа равносильна гомотопности в классе непрерывных отображений. В такой и близких интерпретациях теорема обобщалась различными авторами (см., в частности, работы [87]—[92]), и мы вкратце опишем лишь некоторые результаты.

Пусть S — многообразие Штейна. Отображение $f : M_A \to S$, где A — полупростая алгебра, назовем спектральным, если для любой функции g, голоморфной в окрестности $f(M_A)$, суперпозиция $g \circ f$ принадлежит $\hat{A}$. Можно показать, что для многообразий Штейна спектральность отображения f равносильна тому, что $g \circ f \in \hat{A}$ для каждой функции g, голоморфной всюду на S. Например, при $S = \mathbb{C}^n$ это вытекает из теоремы Шилова — Аренса — Кальдерона — Вальбрука. Теорема Аренса — Ройдена в указанной выше интерпретации, оказывается, сохраняется для спектральных отображений в однородные пространства комплексных групп Ли (в исходном случае таким пространством служит простейшая группа *). Более общий результат [92] состоит в указании широкого класса расслоений $\widetilde{S} \to S$, обладающих свойством, что каждое спектральное отображение $f: M_A \to S$, допускающее непрерывное накрывающее $\widetilde{f} : M_A \to S$, обладает и спектральным накрывающим. Такие результаты имеют многочисленные конкретные применения, и мы остановимся на примере, интересном с точки зрения теории эллиптических уравнений (классические применения функционального исчисления, скажем, в теории интегральных уравнений, хорошо известны, и говорить о них не имеет смысла; приводимый ниже пример рассмотрен в [92]; по поводу соответствующей задачи теории эллиптических операторов см. [93]). Рассмотрим $(n \times k)$-матрицу, $1 \leqslant k < n$, с элементами a_{ij} из коммутативной банаховой алгебры A. Требуется дополнить матрицу элементами той же алгебры до невырожденной квадратной, т. е. $(n \times n)$-матрицы, для которой $\det a_{ij} \in A^{-1}$ (вариант известной проблемы Серра). Необходимое условие заключается, конечно, в том, что $\operatorname{rank} \hat{a}_{ij}(\xi) = k$ для всех $\xi \in M_A$. Это условие недостаточно даже в случае $A = C(M_A)$. Действительно, пусть, например, $A = C(S^5)$, где S^5 — сфера, реализованная в виде поверхности единичного шара пространства $\mathbb{C}^3$. Согласно «теореме Адамса» (см. по этому поводу [94], гл. 15) на сфере S^5 нет двух всюду независимых непрерывных векторных полей. Однако возможность дополнить строчку (z_1, z_2, z_3) легко приводила бы к существованию таких векторных полей. Положительный результат в общей задаче состоит в том, что существование нужного непрерывного дополнения матрицы $\hat{a}_{ij}$ влечет за собой разрешимость задачи и над исходной алгеброй.

Выше мы указывали, что для однородных пространств S комплексных групп Ли гомотопическая классификация спектральных отображений $f : M_A \to S$ совпадает с непрерывной. При отказе от однородности дело существенно осложняется. Рассмотрим, например, пространство G_n комплексных полиномов $\lambda^n + z_1\lambda^{n-1} + \ldots + z_n$ с дискриминантом $d_n(z) = d_n(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$. Комплексная структура на G_n индуцируется естественным вложением $G_n \subset \mathbb{C}^n$. Гомотопическая классификация отображений $M_A \to G_n$ тесно связана с вопросом о (полной) приводимости сепарабельных полиномов над A (см. [95]). Из теоремы о неявных функциях для банаховых алгебр (см., например, [4], стр. 119) легко вытекает, что полная приводимость сепарабельных полиномов над $C(M_A)$ степени n влечет за собой полную приводимость над A сепарабельных полиномов той же степени. Однако обратное не имеет места ([96], [97]), более того, при $5 \leqslant k < n$ можно указать такую пару $A \subset B$ равномерных алгебр с общим пространством максимальных идеалов, что над A приводим все сепарабельные полиномы степени $\leqslant n$, тогда как над B имеются неприводимые сепарабельные полиномы степени k, хотя $\dim B/A = 1$. (Построение использует некоторые специальные свойства коммутантов кос Артина и конечность множества непостоянных голоморфных функций на алгебраическом многообразии, выпускающих значения 0 и 1; пространство максимальных идеалов получается пересечением многообразия $d_k(z) = 1$, плоскости $z_1 = 0$ и некоторого шара.) Далее, если M_A — конечный комплекс, то из полной приводимости сепарабельных полиномов степени n над $C(M_A)$ вытекает, что все они гомотопны в том же классе полиномам с постоянными коэффициентами. Этот факт является следствием того обстоятельства, что G_n есть $K(\pi, 1)$-пространство для группы $\pi = B(n)$ кос Артина из n нитей (важность этого обстоятельства для теории алгебраических функций впервые отмечена В. И. Арнольдом [98]). Вместе с тем весьма сомнительно, что при $n > 3$ гомотопию можно осуществить над алгеброй A, если исходный полином имеет коэффициенты из этой алгебры, т. е. в классе спектральных отображений в G_n. Решение этого вопроса могло бы представить интерес за рамками банаховых алгебр. Дело в том [99], что универсальная накрывающая над G_n, наделяемая естественной голоморфной структурой, представляется в виде $\mathbb{C}^2 \times V^{n-2}$, где V^{n-2} — ограниченная область голоморфности в $\mathbb{C}^{n-2}$, гомеоморфная клетке. Осуществимость указанной выше гомотопии по существу равносильна голоморфной стягиваемости V^{n-2}. Хотя известны [100] области голоморфности в $\mathbb{C}^k$, $k > 1$, топологически стягиваемые, но не стягиваемые голоморфно, нам не известно ни одного примера ограниченной области голоморфности такого сорта.

Добавление. В заключение мы приведем развивающую ряд предшествующих результатов теорему (автора), в которой терминология и понятия, введенные Г. Е. Шиловым, играют решающую роль.

Рассмотрим класс B_σ целых функций первого порядка и типа $\leqslant \sigma$, ограниченных на вещественной оси. (Обозначение класса — стандартное; выше мы употребляли символ σ для обозначения спектра, но вскоре выяснится, что обе роли σ согласованы). Хорошо известно (см., например, [101], [102]), что для функций этого класса $|g(z)| \leqslant Me^{\sigma|y|}$ и что $\sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ задает на B_σ структуру банахова пространства. Классическое неравенство С. Н. Бернштейна устанавливает, что $\|g'\| \leqslant \sigma \|g\|$ для всех $g \in B_\sigma$. Важность этого и подобных неравенств известна в теории приближений, теоремах вложения и других вопросах (см., например, [103], [104]). Вместе с тем неравенство Бернштейна имеет простой алгебраический смысл. Действительно, легко показать, что спектр оператора $a = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ в пространстве B_σ совпадает с отрезком $[-\sigma, \sigma]$ и поэтому неравенство Бернштейна означает просто, что для этого оператора $\|a\| = |a|$, где $|a|$ — спектральный радиус, подобно тому, как это имеет место для эрмитовых операторов гильбертова пространства.

Пусть A — банахова алгебра. Элемент $a \in A$ называется эрмитовым ([105], [106]; см. также [76], стр. 55), если $\| e^{ita} \| = 1$ для всех вещественных t. Очевидно, что $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ — эрмитов элемент алгебры ограниченных операторов на B_σ и, в соответствии с неравенством Бернштейна, это наводит на мысль, что $\|a\| = |a|$ для произвольных эрмитовых элементов. Последнее утверждение независимо и примерно одновременно было доказано в нескольких работах (см., в частности, [107]—[110]), причем в [110] было установлено, что $\|\lambda_0 + \lambda_1 a\| = |\lambda_0 + \lambda_1 a|$ при всех $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$. Доказательства обычно использовали неравенство Бернштейна или его варианты ([102], стр. 186). Далее, широкий класс функций f, включающий линейные, для которых $\|f(a)\| = |f(a)|$ при любых эрмитовых a, указан в [111], где, кстати, применяются элементарные методы.

Общая постановка вопроса может заключаться в следующем. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор коммутирующих эрмитовых элементов алгебры A.

Так как спектр каждого эрмитова элемента вещественный, то совместный спектр набора a содержится в $\mathbb{R}^n$ и не меняется при вариации алгебры A, так что без ограничения общности можно считать, что в подобных ситуациях a порождает алгебру. Функционально исчисление для таких наборов, во-первых, несложно, поскольку каждый компакт из вещественного подпространства $\mathbb{R}^n$ является полиномиально выпуклым, а, во-вторых, допускает расширение за рамки голоморфных функций. Действительно, если f — преобразование Фурье конечной меры ν, то мы можем положить

$$\widetilde{f}(a) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ita}\, d\nu(t), \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

Это определение корректно в следующем смысле. Пусть $\sigma = \sigma(a)$ и $J(\sigma)$ — минимальный замкнутый идеал с оболочкой σ в алгебре преобразований Фурье мер. Если $f \in J(\sigma)$, то $\widetilde{f}(a) = 0$. Кроме того, фактор-норма f по идеалу $J(\sigma)$ оценивает $\|\widetilde{f}(a)\|$, и эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. Легко понять, что дальнейшее расширение функционального исчисления для произвольных эрмитовых элементов невозможно.

Следующая теорема ввиду сказанного легко вытекает из теоремы Бохнера о представлении положительно определенных функций. Пусть

$$|f(\xi)| = \max\{|f(x)| : x \in \sigma\}.$$

Если существует такая положительно определенная функция f_1, что $f(x) - f(\xi)f_1(x - \xi)$ принадлежит идеалу $J(\sigma)$, то

$$\|\widetilde{f}(a)\| = |\widetilde{f}(a)| = |f(\xi)|$$

для всех эрмитовых коммутирующих наборов с совместным спектром σ. Заметим, что если σ — множество спектрального синтеза (например, отрезок на оси), то условие заключается просто в том, что $f \mid \sigma$ после нормировки становится следом на σ положительно определенной функции (характеристической функции вероятностной меры), что позволяет привлекать для проверки условия стандартные средства, например теорему Пойя (см. [112], стр. 581). При всей своей простоте сформулированная теорема поэтому позволяет охватить целый ряд классических неравенств, включающих производные и разности, в том числе неравенства С. Н. Бернштейна, Бора — Фавара, Боаса, С. М. Никольского, С. Б. Стечкина (ссылки на оригинальные работы см., например, в [102], [104], [113]), причем sup-норму можно заменять любой однородной, например L^p — нормой. Кроме того, представляя f комбинацией положительно определенных функций, мы можем давать оценки $\|\widetilde{f}(a)\|$ и в тех случаях, когда они не сводятся к $|\widetilde{f}(a)|$. Например, при $0 < r < 1$ для оператора дробной производной порядка r, в отличие от случая $r \geqslant 1$, константа в неравенстве Бернштейна заведомо больше σ^r (К. И. Осколков). Вместе с тем, легко показать, что в качестве дополнительного множителя достаточно взять $(2 - r)$, причем возникающее неравенство точно при $r \to 0$ (и при $r \to 1$).

Сформулированная выше теорема обращается следующим способом. Пусть σ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда можно указать такие наборы эрмитовых элементов с совместным спектром σ, что если для некоторой функции f имеет место равенство $\|\widetilde{f}(a)\| = |\widetilde{f}(a)|$, то сужение $f \mid \sigma$ после соответствующей нормировки становится следом положительно определенной функции. В качестве элементов a_k можно взять операторы $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ в пространстве B_σ, которое состоит из целых функций 1-го порядка, ограниченных на $\mathbb{R}^n$ с преобразованием Фурье (в смысле обобщенных функций), сосредоточенным на σ. Если положить ($p \geqslant 1$) $\sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n\colon \sum_1^n |\xi_k|^p \leqslant 1\}$, то B_σ будет состоять из целых функций, для которых

$$|g(z)| \leqslant M e^{(\sum_1^n |y_k|^q)^{1/q}},$$

где $1/p + 1/q = 1$. Несложное сопоставление сформулированных выше предложений позволяет утверждать, что для оператора Лапласа $\| \Delta \| = | \Delta |$ только в крайних случаях $q = 1$ и $q = \infty$. В частности, в отличие от случая алгебры операторов гильбертова пространства (в этом случае эрмитовость совпадает с обычной), существуют пары коммутирующих эрмитовых элементов, для которых $\| a_1 + ia_2 \| > | a_1 + ia_2 |$, хотя всегда $\| a_1 + ia_2 \| \leqslant 2 | a_1 + ia_2 |$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Е. Шилов, О кольцах функций с равномерной сходимостью, УМЖ 4 (1951), 404—411.

[2] Г. Е. Шилов, О некоторых задачах общей теории коммутативных нормированных колец, УМН 12:1 (1957), 246—249; 12:5 (1957), 270.

[3] Э. Бишоп, Обобщение теоремы Стоуна — Вейерштрасса, Математика 7:3 (1963).

[4] Т. Гамелин, Равномерные алгебры, М., «Мир», 1973.

[5] У. Рудин, Функциональный анализ, М., «Мир», 1975.

[6] Е. Л. Аренсон, Алгебры с равномерной сходимостью и восстанавливающие покрытия, Матем. сб. 79:2 (1969), 217—249.

[7] K. Hoffman, J. Wermer, A characterisation of $C(X)$, Pacif. J. Math. 12:3 (1962), 941—944.

[8] A. Bernard, Une caractérisation de $C(X)$ parmi les algèbres de Banach, C.R. Acad. Sci. Paris 287 (1968), A634—A635.

[9] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, М., Физматгиз, 1960.

[10] Р. Фелпс, Лекции о теоремах Шоке, М., «Мир», 1968.

[11] R. Basener, A generalized Shilov boundary and analytic structure, Proc. Am. Math. Soc. 47:1 (1975), 98—104.

[12] N. Sibony, Multi-dimentional analytic structure in the spectrum of a uniform algebra, Lect. Notes 512 (1976), 139—165.

[13] Г. Е. Шилов, О регулярных нормированных кольцах, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 21 (1947).

[14] Н. Бурбаки, Спектральная теория, М., «Мир», 1972.

[15] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, М., «Наука», 1968.

[16] Л. Люмис, Введение в абстрактный гермонический анализ, М., ИЛ, 1956.

[17] R. McKissick, A non-trivial normal sup norm algebra, Bull. Am. Math. Soc. 69:3 (1963), 391—395.

[18] J. Wolf, Sur les series $\sum A_k/(z - a_k)$, C.R. Acad. Sci. 173 (1921), 1327—1328.

[19] А. А. Гончар, О примерах неединственности аналитических функций, Вестн. МГУ, сер. матем., № 1 (1964), 37—43.

[20] A. Browder, Introduction to Function Algebras, Benjamin, N.Y., 1969.

[21] Е. А. Горин, М. И. Караханян, Несколько замечаний об алгебрах непрерывных функций на локально связном компакте, Тезисы 7-й Всесоюзной топологической конф., Минск, 1977, 56.

[22] М. И. Караханян, Об алгебрах непрерывных функций на локально связном компакте, Функц. анализ 12:2 (1978), 93—94.

[23] К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.

[24] Y. Katznelson, A characterization of the algebra of all continuous functions on a compact Hausdorff space, Bull. Amer. Math. Soc. **66**:4 (1960), 313—315.
[25] Е. А. Горин, Характеристика кольца всех непрерывных функций на бикомпакте, ДАН **142**:4 (1962), 781—784.
[26] Е. А. Горин, О некоторых характеристических свойствах $C(X)$, Теория функций, функц. анализ и их прил. **14** (1971), 186—195.
[27] E. Kallin, A non-local function algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. **49** (1963), 821—824.
[28] C. Rickart, The maximal ideal space of functions locally approximable in a function algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 1320—1326.
[29] А. Д. Варшавский, Функциональная алгебра второй степени нелокальности, Матем. сб. **80**:2 (1969), 266—280.
[30] S. Sidney, High-order non-local uniform algebras, Proc. Lond. Math. Soc. **23**:4 (1971), 735—752.
[31] Б. Т. Батикян, Е. А. Горин, Замечание о нелокальных алгебрах, Иссл. по линейным операторам и теории функц., Труды научн. сем. ЛОМИ **7** (1976), 172—177.
[32] Е. А. Горин, Модули обратимых элементов нормированной алгебры, Вестн. МГУ, сер. матем., № 5 (1965), 35—39.
[33] Б. Т. Батикян, О логарифмах модулей обратимых элементов банаховой алгебры, Матем. заметки **23**:3 (1978), 373—377.
[34] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., Гостехиздат, 1954.
[35] Ж. П. Кахан, Абсолютно сходящиеся ряды Фурье, М., «Мир», 1976.
[36] Y. Domar, Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras, Acta Math. **96** (1956), 1—66.
[37] А. Г. Баскаков, К спектральному анализу в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами, Воронежск. ун-т, Воронеж, 1977 (Рукопись деп. в ВИНИТИ 26.07.1977 г., № 3058-77 Деп.), РЖ Матем., 1977, 12Б917.
[38] J. Wermer, The existence of invariant subspaces, Duke Math. J. **19** (1952).
[39] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Об операторах с отделимым спектром, Матем. сб. **56**:4 (1962), 433—468; **71**:2 (1966), 287—288.
[40] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман, О представлениях с отделимым спектром, Функц. анализ **7**:2 (1973), 52—61.
[41] Р. Н. Леви, О совместных спектрах некоторых коммутирующих операторов, Диссертация, МГУ, 1973.
[42] A. Bernard, Algèbres ultraséparates de fonctions continues, C.R. Acad. Sci. Paris **270** (1970), A818—A819.
[43] A. Bernard, Fonctions qui opèrent sur Re A, C.R. Acad. Sci. Paris **271** (1970).
[44] A. Bernard, Espace des partie réelles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions, J. of Funct. An. **10** (1972), 387—409.
[45] В. А. Диткин, Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах, Учен. зап. МГУ **30** (1939), 83—130.
[46] Е. А. Горин, Спектральная устойчивость некоторых банаховых алгебр, Функц. анализ 8:2 (1974), 73—74.
[47] В. П. Гурарий, Гармонический анализ в пространствах с весом, Труды ММО **35** (1976), 21—76.
[48] Г. Е. Шилов, Однородные кольца функций, УМН **6**:1 (1951), 91—137.
[49] Г. Е. Шилов, Векторно-гладкие функции, УМН **6**:5 (1951), 176—184.
[50] Г. Е. Шилов, О кольце функций на n-мерном торе, Научн. зап. КГУ **11**:7 (1952).
[51] Г. Е. Шилов, Об однородных кольцах функций на торе, ДАН **82**:5 (1952).
[52] Г. Е. Шилов, О двоякопериодических векторно-гладких функциях, УМЖ **4**:1 (1952), 25—35.
[53] J. Détraz, Sous-algèbras de codimension fini d'une algèbre de Banach, C.R. Acad. Sci. Paris **266** (1968), 117—119.
[54] M. Hayashi, On the decomposition of function algebras, Hokkaido Math. J. **3**:1 (1974), 1—22.
[55] Б. С. Митягин, О второй смешанной производной, ДАН **123**:4 (1958), 606—609,

[56] Б. С. Митягин, О некоторых свойствах функций двух переменных, Вестник МГУ, сер. матем. 5 (1959), 137—152.

[57] K. de Leeuw, H. Mirkil, A priori estimates for differential operators on L_∞ norm, Illinois J. of Math. 8:1 (1964), 112—124.

[58] H. Mirkil, The work of Shilov on commutative semi-simple Banach algebras Math. Dep. Univ. of Chicago, 1952 (mimeog.); Notas Mat. Rio de Janeiro, № 20 (1966).

[59] K. de Leeuw, H. Mirkil, Intrinsics algebras on the torus, Trans. Amer. Math. Soc. 81:2 (1956), 320—330.

[60] D. Rider, Translation-invariant function algebras on compact groups, Proc. Amer. Math. Soc. 17:5 (1966), 977—985.

[61] А. Л. Розенберг, Инвариантные алгебры на компактных группах, Матем. сб. 81:2 (1970), 176—184.

[62] K. de Leeuw, H. Mirkil, Trnalsation-invariant function algebras on abelina groups, Bull. Soc. Math. France 88:3 (1960), 345—370.

[63] K. de Leeuw, H. Mirkil, Rotation-invariant algebras on the n-sphere, Duke Math. J. 30:4 (1963), 667—672.

[64] A. B. Willcox, Šilov type C algebras over a connected locally compact abelian group, Pacif. J. Math. 7 (1957), 1251—1277.

[65] J. A. Wolf, Translation-invariant function algebras on compact groups, Pacif. J. Math. 15:3 (1965), 1093—1099.

[66] В. М. Гичев, Инвариантные алгебры функций на группах Ли, Функц. анализ 12:2 (1978), 74—75.

[67] М. Л. Аграновский, Инвариантные алгебры на границах симметрических областей, ДАН 197:1 (1971), 9—11.

[68] М. Л. Аграновский, Р. Э. Вальский, Максимальность инвариантных алгебр функций, СМЖ 12:1 (1971), 3—12.

[69] Г. Е. Шилов, О разложении коммутативного нормированного кольца в прямую сумму идеалов, Матем. сб. 32:2 (1953), 353—364.

[70] R. Arens, A. Calderon, Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. of Math. 62 (1955), 204—216.

[71] L. Waelbroeck, Le calcul symbolique dans les algebres commutatives, J. Math. P. et Appl. 33 (1954), 147—186.

[72] L. Waelbroeck, Etude spectrale des algèbres complètes, Acad. R. Belgique. Cl. des Sci. (Mémoires), 1960.

[73] F. Bingen, J. Tits, L. Waelbroeck, Seminar sur les Algebres de Banach, Univ. Libre de Bruxelles, Inst. de Math. (1962—1963).

[74] Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, М., «Мир», 1969.

[75] Л. Хёрмандер, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., «Мир», 1968.

[76] F. Bonsall, J. Duncan, Complete normed algebras, N.I., Heid, Berlin, 1973.

[77] G. R. Allan, An extension of the Shilov — Arens — Calderon theorem, J. Lond. Math. Soc. 44 (1969), 595—601.

[78] G. R. Allan, On lifting analytic relations in commutative Banach algebras, J. Funct. An. 5 (1970), 37—43.

[79] G. R. Allan, Some aspects of the theory of commutative Banach algebras and holomorphic functions of several complex variables, Bull. Lond. Math. Soc. 3 (1971).

[80] H. G. Dales, The uniqueness of the functional calculus, Proc. Lond. Math. Soc. 27:4 (1973), 638—648.

[81] J. P. McClure, Automatic continuity of functional calculus for vector-valued functions, J. Lond. Math. Soc. 5:2 (1972), 154—158.

[82] J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, J. Funct. An. 6:2 (1970), 172—191.

[83] J. L. Taylor, The analytic functional calculus for several commuting operators, Acta Math. 125 (1970), 1—38.

[84] Ю. И. Любич, О спектре представления топологической абелевой группы, ДАН 200:4 (1971), 777—780.

[85] A. Browder, Cohomology of maximal ideal spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 515—516.

[86] Д. Г. Водовоз, М. Г. Зайденберг, О числе образующих в алгебре непрерывных функций, Матем. заметки **10**:5 (1971), 537—540.

[87] М. Е. Новодворский, О некоторых гомотопических инвариантах пространства максимальных идеалов, Матем. заметки **1**:4 (1967), 487—494.

[88] В. Л. Эйдлин, О топологической характеристике пространства максимальных идеалов банаховой алгебры, Вестн. ЛГУ **13** (1967), 173—174.

[89] J. Wagner, Faisceeau Structural associe a une algèbre de Banach, Sèm. P. Lelong (Analyse), 9-e année, 1968/69.

[90] J. L. Taylor, Topological invariants of the maximal ideal space of a Banach algebra, Adv. Math. **19**:2 (1976), 149—206.

[91] J. L. Taylor, Twisted products of Banach algebras and third Čech cohomology, Lect. Notes **575** (1977), 157—174.

[92] В. Я. Лин, Голоморфные расслоения и многозначные функции от элементов банаховой алгебры, Функц. анализ **7**:2 (1973), 43—51.

[93] М. А. Шубин, Факторизация матриц, зависящих от параметра, и эллиптические уравнения в полупространстве, Матем. сб. 85:1 (1971), 65—84.

[94] Д. Хьюзмоллер, Расслоенные пространства, М., «Мир», 1970.

[95] Е. А. Горин, В. Я. Лин, Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос, Матем. сб. **78**:4 (1969).

[96] Е. А. Горин, В. Я. Лин, О сепарабельных полиномах над коммутативными банаховыми алгебрами, ДАН **218**:3 (1974), 505—508.

[97] Е. А. Горин, Голоморфные функции на алгебраическом многообразии и приводимость сепарабельных полиномов над некоторыми коммутативными банаховыми алгебрами, Тезисы 7-й Всесоюзной топологической конф., Минск, 1977, 55.

[98] В. И. Арнольд, О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов, УМН **23**:4 (1968), 247—248.

[99] Ш. И. Калиман, Голоморфная универсальная накрывающая пространства полиномов без кратных корней, Функц. анализ **9**:1 (1975), 71.

[100] A. Hirchowitz, A propos de principe Oka, C.R. Acad. Sci. Paris **272** (1971).

[101] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

[102] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., «Наука», 1965.

[103] М. Г. Крейн, О представлении функций интегралами Фурье — Стилтьеса, Уч. зап. Куйбышевского пед. и учительск. ин-та им. В. В. Куйбышева **7** (1943).

[104] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1969.

[105] G. Lumer, Semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29—43.

[106] Ю. И. Любич, Консервативные операторы, УМН **20**:5 (1965), 221—225.

[107] В. Э. Кацнельсон, У консервативного оператора норма равна спектральному радиусу, сб. Матем. исслед. (Кишинев) 5:3 (1970), 186—189.

[108] F. F. Bonsall, M. J. Crabb, The spectral radius of Hermitian element of a Banach algebra, Bull. London Math. Soc. **2** (1970), 178—180.

[109] A. Browder, On Bernsteins inequality and the norm of Hermitian operators, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 871—873.

[110] A. M. Sinclair, The norm of a Hermitian element in a Banach algebra, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 446—450.

[111] H. König, A functional calculus for Hermitian elements of complex Banach algebras, Arch. Math. 28:4 (1977), 422—430.

[112] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей, том 2, М., «Мир», 1967.

[113] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию 24 марта 1978 г.